

UNIVERSITÉ DE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

—

Cours de M2 Mathématiques fondamentales
Année 2006-2007

Bruno KLINGLER

Introduction aux motifs de Voevodsky

Une approche géométrique

Notes rédigées par :
Benjamin COLLAS
Ismaël SOUDÈRES

Version du 23 mai 2007

Introduction [en rédaction]

Panorama Ces notes rassemblent les deux premières parties d'un cours de M2 d'introduction à la théorie des motifs qui en comporte quatre.

La partie un présente le cadre théorique nécessaire à la construction des motifs. Elle sera notamment complétée par le *théorème de représentation de Brown*.

La partie deux aborde les notions géométriques d'intersection de cycles et de groupes de Chow. La relation entre groupes de K théorie et groupes de Chow supérieurs présentée lors d'un exposé pourra venir compléter cette partie.

Les parties trois et quatre sur les motifs proprement dits sont en cours de rédaction.

Construction de \mathcal{M}_S Concernant les motifs proprement dits, ces notes de cours sont à associer aux notes *A guide to Voevodsky's motives* de *Beilinson et Vologodsky* (Cf. Beilinson et Vologodsky (2006)) et au cours plus détaillé *Lecture notes on motivic cohomology* de *Mazza, Voevodsky et Weibel* (Cf. Mazza *et al.* (2006)).

Table des matières

Introduction [en rédaction]	i
1 Catégories et outils d'algèbre homologique	1
1.1 DG-Catégories	1
1.1.1 Définitions	1
1.1.2 La catégorie des DG-catégories	2
1.1.3 Modules sur une DG-catégories	3
1.1.4 Catégorie dérivée ; Catégorie homotopique	5
1.2 Catégories triangulées	7
1.2.1 Rappel sur les catégories triangulées	7
1.2.2 Catégories exactes et Frobenius	8
1.2.3 Catégorie stable associée à une catégorie exacte	12
1.3 Localisation	14
1.3.1 Généralités	14
1.3.2 Localisation dans les catégories triangulées	15
1.3.3 Catégories dérivées ; cas des catégorie exactes.	17
1.4 \mathcal{A} -modules semi-libres et catégorie prétriangulées	19
1.4.1 Catégorie dérivée vue comme H^0 d'une DG-catégorie	19
1.4.2 DG-catégories triangulées et prétriangulées	21
1.4.3 Notion de DG-modèle	23
1.5 Théorème de représentation [en cours de rédaction]	23
1.5.1 Préliminaires	23
1.5.2 Génération compacte et génération parfaite	23
1.5.3 Théorème de Représentabilité de Brown	23
1.5.4 Application : dualité de Grothendieck	23
2 Cycles algébriques et groupes de Chow	25
2.1 Cycles algébriques	25
2.1.1 Définitions	25
2.1.2 Images directes et réciproques	26
2.1.3 Vers une théorie de l'intersection	28
2.2 Groupes de Chow	30
2.2.1 Définitions et propriétés	30
2.2.2 Fibrés vectoriels et projectifs	32
2.2.3 Intersection en général	36
2.2.4 Un aperçu de K-théorie	39
2.3 Groupes de Chow supérieurs	42
2.3.1 Définitions	42

2.3.2	Structure et propriétés	43
2.3.3	Un peu de K-Théorie	44
3	Catégories de motifs [en rédaction]	45
3.1	Correspondances finies et transfert	45
3.1.1	Correspondances finies	45
3.1.2	Préfaisceaux avec transferts	47
3.1.3	Complexe de préfaisceaux avec transferts	51
3.2	Introduction à une catégorie de Motifs	52
3.2.1	Catégorie de motifs effectifs	53
3.2.2	Stratégie	54
3.2.3	Introduction de la topologie de Nisnevich	55
3.3	Correspondance finies et prémotifs	56
3.3.1	Correspondance noeuds	56
3.3.2	Le cas général	56
3.3.3	Localisation des correspondances finies	56
4	Construction d'une catégorie de Motifs [en rédaction]	57
4.1	Principaux résultat	57
4.2	Double localisation	57
4.2.1	A^1 -localisation	57
4.2.2	Nisnevitch localisation	57
A	Rappels divers	59
A.1	Complétion Karoubienne	59
	Bibliographie	61

Chapitre 1

Catégories et outils d'algèbre homologique

Cette partie présente le contexte catégorique nécessaire à la construction des motifs de Voevodsky. On y aborde les notions de DG-catégorie, de catégorie de Frobenius et de catégorie stable ainsi que de structure de catégorie triangulée.

Il s'agit dans un premier temps d'expliquer comment stabiliser par localisation la structure triangulée de la catégorie dérivée d'une DG-catégorie. Utilisant la notion de module semi-libre, on explicite de deux façons la réalisation d'une catégorie dérivée comme catégorie homotopique d'une DG-catégorie. On introduit ensuite les notions de structures prétriangulées et fortement triangulées dans le but de discuter de la question de la structure triangulée naturellement associée à $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$.

On aborde enfin le théorème de *représentation de Brown* et l'on clôt ce chapitre par une application à la *dualité de Grothendieck*.

1.1 DG-Catégories

1.1.1 Définitions

Par convention, pour une catégorie \mathcal{C} , on notera généralement $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes dans \mathcal{C} de X dans Y . Soit k un anneau.

Définition 1.1.1 (*k*-catégorie). Une catégorie \mathcal{A} est une *k*-catégorie si pour tout X et Y , objets de \mathcal{A} , l'ensemble des morphismes $\mathcal{A}(X, Y)$ est un *k*-module et la composition est *k*-bilinéaire. On demande en plus que la composition induise sur $\mathcal{A}(X, X)$ une structure de *k*-algèbre.

Une *k*-catégorie \mathcal{A} est dite graduée si de plus, chaque objet V est muni d'une \mathbb{Z} -gradation et que les morphismes respectent la graduation (pour tout n , $f(V^n) \subset V^{p+n}$).

Cela induit une graduation sur les groupes de morphismes.

Exemple 1.1.2. Soit $\mathcal{G}(k)$ la catégorie des *k*-modules gradués. Elle possède une structure tensorielle naturelle sur $\mathcal{G}(k)$ donnée par $(V \otimes W)^n = \bigoplus_{k+l=n} V^k \otimes W^l$.

Définition 1.1.3 (DG *k*-modules). Un *k*-module \mathbb{Z} gradué V est un DG *k*-module (ou DG module) s'il existe une différentielle d_V de degré 1. On parle aussi de module différentiel gradué ou *differential graded (DG) module* en anglais.

Proposition 1.1.4. *La catégorie des DG *k*-modules est munie d'une structure tensorielle naturelle.*

Définition 1.1.5 (DG-catégorie). Une catégorie \mathcal{A} est une DG k -catégorie si c'est une k -catégorie telle que,

- pour tout couple d'objets X et Y de \mathcal{A} , $\mathcal{A}(X, Y)$ est un DG k -module,
- pour X, Y, Z objets de \mathcal{A} , la composition

$$\mathcal{A}(Y, Z) \otimes \mathcal{A}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{A}(X, Z)$$

est un morphisme de DG k -module, induisant une structure de DG k -algèbre sur $\mathcal{A}(X, X)$.

Exemple 1.1.6. Soit B une k -algèbre. La catégorie composée d'un objet B peut être vue comme un DG-catégorie.

Exemple 1.1.7 (Exemple clé). Soit B une k -algèbre. On construit la catégorie $\mathcal{C}_{DG}(B)$ de la façon suivante. Ses objets sont ceux de $C(B)$ des complexes de B modules à droite. Les morphismes sont définis par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}}(M, N)^n = \{\text{morphisms } f : M \rightarrow N \text{ de degré } n\}.$$

La différentielle dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}}(M, N)$ est donnée par $df = d_N \circ f - (-1)^n f \circ d_M$.

Ceci munit $\mathcal{C}_{DG}(B)$ d'une structure de DG catégorie.

Remarque 1.1.8. Dans l'exemple précédent, on ne demande pas que les morphismes respectent la différentielle. Autrement dit un morphisme de degré n n'a pas à rendre les carrés suivants commutatifs.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M^r & \longrightarrow & M^{r+1} & \longrightarrow & M^{r+2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\ & & & & & & & & \\ & & \cdots & \longrightarrow & N^{r+n} & \longrightarrow & N^{r+1+n} & \longrightarrow & N^{r+2+n} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Définition 1.1.9. Soit \mathcal{A} une DG catégorie. On note $\mathrm{H}^0(\mathcal{A})$ la catégorie ayant les mêmes objets que \mathcal{A} mais ayant pour morphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^0(\mathcal{A})}(X, Y) = \mathrm{H}^0(\mathcal{A}(X, Y)).$$

Comme $\mathcal{A}(X, Y)$ est un k -module différentiel gradué, parler de son H^0 a du sens. On définit de même la catégorie $\mathrm{H}^*(\mathcal{A})$ ayant les même objets que \mathcal{A} et pour morphismes les H^* des groupes de morphismes dans \mathcal{A} .

Remarque 1.1.10. Soit \mathcal{A} une DG-catégorie. Alors $\mathrm{H}^0(\mathcal{A})$ est une DG catégorie et $\mathrm{H}^*(\mathcal{A})$ est graduée.

Exemple 1.1.11. la catégorie $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}_{DG}(B))$ n'est rien d'autre que la catégorie des complexes de B -module à homotopie près (*Cf.* exemple 1.1.7).

1.1.2 La catégorie des DG-catégories

Définition 1.1.12 (DG foncteur). Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux DG-catégories. Soit \mathcal{F} un foncteur de \mathcal{A} dans \mathcal{B} . Le foncteur \mathcal{F} est un DG foncteur si et seulement si,

$$\text{pour tout } X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}), \quad \mathcal{F}(X, Y) : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

est un morphisme de DG k -modules (i.e. préservant la graduation et commutant aux différentielles).

Remarque 1.1.13. Un DG foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induit donc un foncteur en cohomologie :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\mathcal{F}) : \mathrm{H}^0(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{B}) \\ \mathrm{H}^*(\mathcal{F}) : \mathrm{H}^*(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathrm{H}^*(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Définition 1.1.14 (DG-cat). La catégorie DG-cat est la catégorie ayant pour objets les petites DG-catégories et pour morphismes, les DG-foncteurs.

Remarque 1.1.15. Une petite catégorie est une catégorie dont les objets forment un ensemble.

Définition 1.1.16 (Produit tensoriel de deux DG-catégories). On définit le produit tensoriel de deux DG-catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} , comme la DG catégorie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ telle que :

$$\begin{aligned} \text{Obj}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) &= (\text{Obj}(\mathcal{A})) \times (\text{Obj}(\mathcal{B})) \\ (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})((X, Y), (X', Y')) &= \mathcal{A}(X, X') \otimes_k \mathcal{B}(Y, Y'). \end{aligned}$$

Le produit tensoriel $\mathcal{A}(X, X') \otimes_k \mathcal{B}(Y, Y')$ est celui de deux DG k -modules défini à la proposition 1.1.4

Définition 1.1.17 (Morphismes de foncteurs). On rappelle qu'un morphisme θ du foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ vers le foncteur $\mathcal{F}' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une collection de morphismes $(\theta_X \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}'(X)))_{X \in \mathcal{A}}$ tel que pour tout X, Y dans \mathcal{A} le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \rightarrow & \mathcal{F}'(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(Y) & \rightarrow & \mathcal{F}'(Y) \end{array}$$

Définition 1.1.18 (*Hom* interne). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux DG catégories. On définit la DG-catégorie $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ par,

$$\begin{aligned} \text{Obj}(\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})) &= \text{DG foncteur } \mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \\ \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})(\mathcal{F}, \mathcal{F}')^n &= \left\{ \begin{array}{l} \theta \text{ morphisme de foncteurs tels que :} \\ \forall X \in \mathcal{A}, \theta_X \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}'(X))^n \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

La différentielle sur $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ est définie par $d(\theta) = (d_{\mathcal{B}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}'(X))} \circ \theta_X)_{X \in \mathcal{A}}$.

La notion de "morphismes" de DG foncteurs (que sont les objets de la catégorie précédente) mérite que l'on clarifie le vocabulaire,

Définition 1.1.19. On appelle morphisme de DG foncteurs de degré n un morphisme entre deux DG foncteurs entre deux DG-catégories tels que

$$\forall X \in \mathcal{A}, \quad \theta_X \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}'(X))^n.$$

On appelle DG morphismes de DG foncteurs un morphisme de DG foncteurs de degré 0.

Proposition 1.1.20. *La catégorie DG-cat est une catégorie tensorielle avec Hom interne. C'est à dire qu'on a une adjonction entre le Hom interne et le produit tensoriel qui se traduit par,*

$$\text{Hom}_{DG-cat}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{DG-cat}(\mathcal{A}, \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C})).$$

1.1.3 Modules sur une DG-catégories

Objectif - Il s'agit ici de construire sur \mathcal{A} une catégorie triangulée plus simple $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ à partir de $\mathcal{H}^0(\mathcal{C}_{DG}(k))$. On détaille ici les objets obtenus.

Soit \mathcal{A} une DG k -catégorie.

Définition 1.1.21 (\mathcal{A} -modules). Un \mathcal{A} -module à gauche est un DG foncteur $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_{DG}(k)$.

Un \mathcal{A} -module à droite est un \mathcal{A}^{OP} module à gauche : $M^{\text{OP}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_{DG}(k)$.

Remarque 1.1.22. On fera attention au fait que dans la catégorie \mathcal{A}^{op} la composition est modifiée par un signe $(-1)^{\deg(f)\deg(g)}$.

Remarque 1.1.23. Soit M un \mathcal{A} module à droite. Alors quelque soit X dans \mathcal{A} , $M(X)$ est un complexe de k -modules et pour tout Y dans \mathcal{A} on a,

$$M(Y) \otimes \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow M(X).$$

Exemple 1.1.24. Soit A une k -algèbre vue comme une k DG-algèbre. On note \tilde{A} la DG-catégorie, à un objet, associée. Un DG \tilde{A} -module est un complexe de A -modules à droite.

Définition 1.1.25 ($\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$). La catégorie $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ des \mathcal{A} modules est la DG-catégorie dont les objets sont les \mathcal{A} modules à droites ($\mathcal{F} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}_{DG}(k)$) et les morphismes, les morphismes de DG-foncteurs.

En d'autre termes,

$$\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}om(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathcal{C}_{DG}(k)).$$

On définit de façon générale,

Définition 1.1.26. Soit \mathcal{A} une DG-catégorie.

On définit $Z^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))$ comme la catégorie ayant les mêmes objets que \mathcal{A} mais pour morphisme, les morphismes de degré 0, c'est à dire,

$$(Z^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))) (M, N) = Z^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))(M, N).$$

De même $H^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))$ est la catégorie formé des mêmes objets que \mathcal{A} mais dont les morphismes sont,

$$H^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))(M, N) = H^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))(M, N).$$

Exemple 1.1.27. Soit \tilde{B} la DG-catégories associée à la DG-algèbre B . On a alors,

- $Z^0(\mathcal{C}_{DG}(\tilde{B})) = \mathcal{C}(B)$ la catégorie des complexes de B -DG module.
- $H^0(\mathcal{C}_{DG}(\tilde{B})) = \mathcal{H}(B)$ la catégorie des complexes de B -DG module à homotopie près.

Afin d'alléger les notations, on pose,

Définition 1.1.28. On note $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = Z^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))$ et $\mathcal{H}^0(\mathcal{A}) = H^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))$ la catégorie des DG- \mathcal{A} -modules à homotopie près.

Remarque 1.1.29. Comme dans toute DG-catégorie, il existe un foncteur de décalage $[n]$. Dans notre cadre, ce foncteur décale le complexe image pour chaque $X \in \mathcal{A}$:

$$(M[n])(X) = (M(X))[n].$$

Proposition 1.1.30. Les épimorphismes sont les morphismes de foncteurs qui en tout but sont surjectifs, c'est à dire :

$$\theta_X : M(X) \twoheadrightarrow N(X) \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{A}.$$

Les monomorphismes sont les morphismes de foncteurs qui sont en tout but injectifs, c'est à dire

$$\theta_X : M(X) \hookrightarrow N(X) \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{A}.$$

Le résultat de structure est le suivant,

Proposition 1.1.31. $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne.

Démonstration. On consultera l'article Keller (2006)[p. 5]. □

Proposition 1.1.32 (DG-Yoneda). *Le foncteur de Yoneda :*

$$\begin{aligned} \wedge : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}) \\ X &\longmapsto X^\wedge = \mathcal{A}(X, \bullet) \end{aligned}$$

est pleinement fidèle.

Remarque 1.1.33. En particulier pour tout $X \in \mathcal{A}$ et $M \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})}(X^\wedge, M) \xrightarrow{\sim} M(X).$$

Exemple 1.1.34. Soit B une k DG algèbre, \tilde{B} la DG-catégorie associée et X son unique objet. X^\wedge est alors le complexe formé d'un B -module libre de rang 1 concentré en degré 0.

Proposition 1.1.35. *On a quelque soit $X \in \mathcal{A}$, $M \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ et $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathcal{H}^0(\mathcal{A})(X^\wedge, M[n]) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})}(X^\wedge, M)) = \mathrm{H}^n(M(X)).$$

1.1.4 Catégorie dérivée ; Catégorie homotopique

1.1.4.1 Catégorie dérivée et catégories abéliennes

Considérant \mathcal{A} une catégorie abélienne, on note $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes d'objets de \mathcal{A} à homotopie près et $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée, c'est à dire la localisation de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ par rapport aux quasi-isomorphismes.

Pour des rappels sur ces notions bien connues, on pourra consulter les premiers chapitres de Kashiwara et Schapira (1990). Si \mathcal{A} est de plus une DG catégorie, on a,

Proposition 1.1.36. *La catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{A}^{op})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Ceci découle de la pleine fidélité de Yoneda. □

Remarque 1.1.37. C'est l'équivalent de $\mathcal{H}(\tilde{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(B)$ (voir l'exemple 1.1.7).

Définition 1.1.38. Soit \mathcal{A} une DG-catégorie. Par analogie, on notera, $D(\mathcal{A})$ la localisation de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ par rapport aux quasi-isomorphismes (q.i. sur chaque image).

Remarque 1.1.39. Il n'est pas évident de déterminer si les morphismes dans $D(\mathcal{A})$ sont des ensembles ou même de s'assurer que $D(\mathcal{A})$ est une catégorie additive.

La section 1.2.2 viendra compléter les propriétés des catégories dérivées d'une DG catégorie. Avant toute chose, donnons dans le cadre des catégories additives un résultat permettant de contrôler la structure de la catégorie $D(\mathcal{A})$.

1.1.4.2 Structure de catégorie de modèle sur $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$

Objectif - Dans le cadre d'une DG-catégorie \mathcal{A} , il s'agit de contrôler la structure de $D(\mathcal{A})$ à partir de celle de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$. Une méthode consiste à établir que $D(\mathcal{A})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$. Ce résultat prendra tout son sens dans la partie suivante, qui permettra de munir $D(\mathcal{A})$ d'une structure triangulée.

Techniquement, on définit par analogie aux modules projectifs ou injectifs sur un anneau les notions de fibrants et de cofibrants.

Définition 1.1.40. On dit que $P \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ est *cofibrant* si pour tout $M \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ il répond au problème suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & \nearrow & \downarrow \wr \text{q.i.} \\ P & \longrightarrow & M \end{array}$$

On dit que $I \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ est *fibrant* si pour tout $L \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ il répond au problème suivant :

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & I \\ \wr \text{q.i.} \downarrow & & \nearrow \\ & & M \end{array}$$

Remarque 1.1.41. La définition d'un quasi-isomorphisme qui sera donnée en 1.3.18, correspond au fait d'être un quasi-isomorphisme en chaque but. On pourra aussi consulter Keller (1996)[p. 14-15].

Proposition 1.1.42. *Pour tout $X \in \mathcal{A}$, X^\wedge est cofibrant.*

Démonstration. C'est une application direct de Yoneda. Il s'agit de montrer que pour tout M et L dans $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & \nearrow & \downarrow \wr \text{q.i.} \\ X^\wedge & \longrightarrow & M \end{array}$$

Comme la surjectivité (qui est une surjectivité sur le but) assure que $L(X) \twoheadrightarrow M(X)$, on en conclut que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})}(X^\wedge, L) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})}(X^\wedge, M)$. D'où le résultat. \square

Proposition 1.1.43. *A chaque élément de $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$, on peut associer un fibrant et un cofibrant.*

- $\forall M \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}), \exists PM$ tel que $PM \xrightarrow{\text{q.i.}} M$ avec PM cofibrant
- $\forall M \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}), \exists IM$ tel que $M \xrightarrow{\text{q.i.}} IM$ avec IM cofibrant

Démonstration. Une esquisse de la démonstration est donnée dans la section 1.4.1, au lemme 1.4.9. On en trouvera les détail dans l'article Avramov et Halperin (1986). \square

Exemple 1.1.44. Dans le cas où l'on considère la catégorie \tilde{B} associée à une k -DG algèbre,

- $PM \xrightarrow{\text{q.i.}} M$ est une résolution projective d'un complexe de module,
- $M \xrightarrow{\text{q.i.}} IM$ est une résolution injective.

On a alors le théorème suivant,

Théorème 1.1.45. *Le foncteur de localisation $\mathcal{H}^0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle. Il admet un adjoint à gauche $M \mapsto PM$ et un adjoint à droite $M \mapsto IM$.*

En particulier,

$$\mathcal{H}^0(\mathcal{A})(PL, M) \simeq \mathrm{D}(\mathcal{A})(L, M) \simeq \mathcal{H}^0(L, PM)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 1.1.43 □

On peut maintenant énoncer l'analogie de la proposition 1.1.36,

Corollaire 1.1.46. *La catégorie $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$.*

Plus exactement, on obtient,

Corollaire 1.1.47. *Pour $X \in \mathcal{A}$, on a,*

$$\mathrm{D}(\mathcal{A})(X^\wedge, M)[n] \simeq \mathcal{H}^0(\mathcal{A})(X^\wedge, M)[n] \simeq \mathrm{H}^n(M(X)).$$

Signalons pour la culture le résultat structurel suivant quant aux possibilités duales de munir une DG-catégorie d'une structure de catégorie de modèle¹,

Théorème 1.1.48. *Soit \mathcal{A} une DG-catégorie, alors $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ admet deux structures de catégories de modèles :*

- *Structure projective : les fibrations sont les épimorphismes. Tout objet est fibrant et les objets cofibrants sont les DG modules $P \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ cofibrants.*
- *Structure injective : les cofibrations sont les monomorphismes. Tout objet est cofibrant et les objets fibrants sont les DG modules $I \in \mathcal{A}$ fibrants.*

Ayant obtenu $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ comme sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$, on cherche à munir cette dernière d'une structure triangulée. Ceci nous permettra en particulier de contrôler la structure de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Dans notre cadre, ces catégories ne sont pas abéliennes, et l'opération de localisation usuelle ne préserve pas forcément la structure triangulée. On introduit donc de nouvelles notions catégoriques telles les catégories stables et de Frobenius.

1.2 Catégories triangulées

Objectif - Selon le plan précédemment énoncé, il s'agit dans cette partie de montrer que pour une DG-catégorie \mathcal{A} , la catégorie $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée

Après quelques rappels sur la notion de catégories triangulées, on introduit les notions de catégories exactes et de Frobenius qui fournissent un cadre adéquat à la résolution de ce problème. On fait alors apparaître $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ comme catégorie stable associée à une catégorie de Frobenius afin d'obtenir sa structure triangulée.

L'essentiel des notions et des résultats présentés ici sont issus de Keller (1996) où l'on trouvera des compléments bibliographiques.

1.2.1 Rappel sur les catégories triangulées

Soit \mathcal{A} une catégorie additive munie d'un endofoncteur $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

¹Référence de Quillen recherchée

Définition 1.2.1. On appelle S -suite toute suite de la forme :

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow SA$$

Un morphisme de S -suite de (u, v, w) à (u', v', w') est un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & SX \\ x \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow S_X \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & SX' \end{array}$$

Dans la suite, on notera une S -suite sous l'une des formes suivantes :

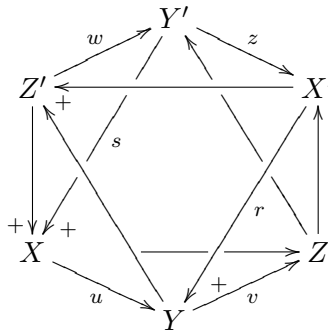
$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{+} \begin{array}{c} Z \\ + \swarrow \quad \nwarrow \\ X \longrightarrow Y \end{array}$$

Définition 1.2.2 (Catégorie Suspendue). Soit \mathcal{A} une catégorie additive munie d'un endofoncteur et d'une classe de S -suite appelée *triangle*. On dit que \mathcal{A} est *suspendue* si elle satisfait les axiomes suivants :

- (SP0) Toute S -suite isomorphe à un triangle est elle même une triangle.
- (SP1) $(0 \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow 0)$ est un triangle pour tout X dans \mathcal{A} .
- (SP2) Si (u, v, w) est un triangle alors $(v, w, -Su)$ est aussi un triangle.
- (SP3) On peut toujours compléter les diagrammes commutatifs de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & SX \\ x \downarrow & & y \downarrow & & z \downarrow & & \downarrow S_X \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & SX' \end{array}$$

- (SP4) Pour toute paire de morphismes $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, il existe un diagramme commutatif (dit *diagramme de l'octaèdre*)



où les 8 triangles commutent ainsi que les 3 carrés "contenant la face du centre".

Définition 1.2.3. Soit \mathcal{A} une catégorie suspendue. Si l'endofoncteur S est inversible (c'est à dire définit une équivalence) alors on dit que \mathcal{A} est triangulée.

1.2.2 Catégories exactes et Frobenius

Objectif - Dans cette section, on introduit différentes notions catégoriques dans le but de construire des catégories triangulées. Une première notion est celle de catégorie exacte, une seconde plus fine celle de catégorie de Frobenius.

En plus de Keller (1996) on pourra consulter Quillen (1975) pour de plus amples détails sur les notions abordées ici.

1.2.2.1 Catégorie exacte

Définition 1.2.4 (Catégorie exacte). Soit \mathcal{E} une catégorie additive. On dit que \mathcal{E} admet une structure de catégorie exacte si elle est munie d'une classe distinguée de suites exactes,

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} \twoheadrightarrow C$$

où i est le noyau de p et p le conoyau de i .

Les morphismes i sont appelés *inflations* et les morphismes p *déflations*. Les paires (i, p) sont aussi appelés *conflations*.

Axiomes : les conflations doivent vérifier les axiomes suivants,

(Ex0) L'identité de l'objet 0 est une déflation.

(Ex1) La composition de deux déflations est une déflation.

(EX1') La composition de deux inflations est une inflation.

(EX2) Les déflations sont stables par changement de base,

$$\begin{array}{ccc} B' & \cdots \twoheadrightarrow & B \\ p' \downarrow & \square & \downarrow p \\ C' & \longrightarrow & C \end{array}$$

(Ex2') Les inflations sont stables par cochangement de base,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ i \downarrow & \square & \downarrow i' \\ B & \cdots \twoheadrightarrow & B' \end{array}$$

Remarque 1.2.5. Une catégorie abélienne est une catégorie exacte telle que tout morphisme f admet une factorisation $f = i \circ p$ avec i une inflation et p une déflation. Dans ce cas la classe des conflations coïncide avec les suites exactes courtes.

Remarque 1.2.6. Le caractère *abélien* est une propriété. Le caractère *exact* est la donnée d'une structure.

Exemple 1.2.7. Une catégorie additive \mathcal{A} munie de la classe des suites exactes courtes scindées, est une catégorie exacte.

Exemple 1.2.8. La catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ des complexes d'objet de \mathcal{A} admet une structure de catégorie exacte donnée par les suites de complexes, telle qu'en chaque degré la suite soit exacte scindée.

Dans le cas d'une DG-catégorie \mathcal{A} , ce dernier exemple nous indique comment mettre une structure de catégorie exacte sur $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}^0(\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}))$.

Proposition 1.2.9. Soit \mathcal{A} une DG-catégorie.

Alors $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ admet une structure de catégorie exacte où les conflations sont les suites :

$$M \longrightarrow N \longrightarrow P \quad \text{exactes scindées en chaque but.}$$

Exemple 1.2.10. La structure exacte ainsi définie sur $\mathcal{C}_{DG}(k) \sim \mathcal{C}(\text{Mod}(k))$ coïncide avec celle induite par le caractère abélien de la catégorie des complexes de k -modules.

Définition 1.2.11 (injectifs-projectifs). Soit \mathcal{A} une catégorie exacte.

Un objet I (resp. P) de \mathcal{A} est un injectif (resp. un projectif) si la suite,

$$\mathcal{A}(B, I) \xrightarrow{i^*} \mathcal{A}(A, I) \longrightarrow 0 \quad (\text{ resp. } \mathcal{A}(P, B) \xrightarrow{p_*} \mathcal{A}(P, C) \longrightarrow 0)$$

est exacte pour toute conflation $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$.

Définition 1.2.12. On dit que \mathcal{A} possède suffisamment d'injectif (resp. de projectif) si pour tout objet $A \in \mathcal{A}$ il existe une conflation :

$$A \xrightarrow{i_A} IA \xrightarrow{p_A} SA \quad (\text{ resp. } P_1A \xrightarrow{i} PA \xrightarrow{p} A)$$

avec IA injectif (resp. PA projectif).

1.2.2.2 Catégorie de Frobenius

On établit ici deux résultats sur la structure de Frobenius, dans le cadre des catégories additives et des DG-catégories.

Définition 1.2.13. Soit \mathcal{A} une catégorie exacte. On dit que \mathcal{A} est de *Frobenius* si \mathcal{A} admet suffisamment d'injectifs et suffisamment de projectifs et si les projectifs sont égaux aux injectifs.

Proposition 1.2.14. *Soit \mathcal{A} une catégorie additive. Alors, la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ munie de la structure de catégorie exacte définie dans l'exemple 1.2.8 est de Frobenius. Les injectifs sont égaux aux projectifs et sont les complexes homotopes à 0.*

Démonstration. La preuve se déroule en trois étapes que nous allons détailler ici.

Conflation canonique : Considérons un objet A de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. On construit une conflation,

$$A \xrightarrow{i_A} IA \xrightarrow{p_A} SA$$

de la façon suivante :

$$(IA)^n = A^n \oplus A^{n+1}, \quad d_{IA}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_A = \begin{pmatrix} 1 \\ d_A^n \end{pmatrix}$$

$$(SA)^n = A^{n+1}, \quad d_{SA}^n = -d_A^{n+1}, \quad p_A = (-d \quad 1)$$

La paire (i_A, p_A) est clairement une conflation et l'on utilise maintenant le lemme,

Lemme 1.2.15. *Soit $A \in \mathcal{A}$ alors IA est injectif. De plus $IA[-1]$ est projectif.*

Lien entre IA et A si A est injectif, le cas des projectifs. Supposons A injectif. On a alors le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & IA \\ \text{id} \downarrow & \swarrow f_A & \\ A & & \end{array}$$

qui fournit un inverse à gauche pour i_A en temps que morphisme de complexe. On remarquera que f_A n'est bien entendu pas la première projection qui ne commute pas aux différentielles.

Réciproquement, si i_A admet un inverse à gauche dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ alors il existe un inverse à gauche de morphisme de foncteur

$$\mathrm{Hom}(\bullet, A) \xrightarrow{i_{A,*}} \mathrm{Hom}(\bullet, IA).$$

De la même façon A est projectif si et seulement si $IA[-1] \xrightarrow{p_A[-1]} A$ admet un inverse à droite dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Homotopie à 0. Supposons que i_A admette un inverse à gauche f_A . Alors A est homotope à 0 et $s : A \rightarrow A[-1]$ (qui n'est pas un morphisme de complexe) est donné par $s^n(x) = f_A^{n-1}(0, x)$. De même si $p_A[-1]$ admet un inverse à droite $g_A = (g_{1,A}, g_{2,A})$, A est homotope à 0 avec $s^n(x) = g_{1,A}^n(x)$. □

Nous avons finalement démontré la proposition, que l'on peut reformuler de façon abstraite,

Proposition 1.2.16. *Le foncteur d'oubli $F : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{Gr}(\mathcal{A})$, à valeur dans la catégorie des \mathcal{A} modules gradués, admet un inverse à gauche F_g (resp. à droite F_d) :*

$$F_g : N \mapsto (N^n \oplus N^{n+1})_n \text{ et } d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } F_d : N \mapsto (N^{n-1} \oplus N^n)_n \text{ et } d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

D'autre part, pour $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, on a les équivalences,

$$\begin{aligned} A \text{ est injectif} &\Leftrightarrow A \text{ est facteur direct de } IA = F_g FA \\ &\Leftrightarrow A \text{ est homotope à } 0 \\ &\Leftrightarrow A \text{ est projectif} \\ &\Leftrightarrow A \text{ est facteur direct de } IA[-1] = F_d FA \end{aligned}$$

Occupons nous de la démonstration du lemme laissée en attente,

Démonstration du lemme 1.2.15. Soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ un complexe. Soit $N \xrightarrow{i} M$ une inflation telle que :

$$\begin{array}{ccc} N & \begin{array}{c} \xleftarrow{\dots} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{i} \end{array} & M \\ \downarrow & & \\ IA & & \end{array}$$

On cherche à construire un morphisme de complexe $M \rightarrow IA$.

Il faut prendre garde que la section s n'est définie que degré par degré et ne prend pas en compte la différentielle. La première projection $IA \rightarrow A$, dont on remarquera qu'elle ne commute pas à la différentielle, induit une application en chaque degré,

$$M^n \xrightarrow{s} N^n \longrightarrow IA^n = A^n \oplus A^{n+1} \xrightarrow{\alpha^n} A^n,$$

où figurent en pointillés les flèches qui ne commutent pas nécessairement aux différentielles.

On définit alors $\tilde{\alpha} : M \rightarrow IA$ par $\tilde{\alpha}^n(x) = (\alpha^n(x), \alpha^{n+1}(dx))$.

Il est alors aisé de vérifier que $\tilde{\alpha}$ répond au problème.

Pour montrer que $IA[-1]$ est projectif, on raisonne de façon similaire en utilisant :

$$A^n \xrightarrow{\beta^n} IA[-1] = A^{n-1} \oplus A^n \longrightarrow N^n \xrightarrow{s} M^n.$$

et $\tilde{\beta}^n(x, y) = d(\beta^{n-1}(x)) + \beta^n(y)$. □

Dans le cadre des DG-catégories, on obtient de même,

Proposition 1.2.17. *Soit \mathcal{A} une DG-catégorie.*

Alors $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ munie de la structure de catégorie exacte donnée dans l'exemple 1.2.9 est de Frobenius. Les injectifs sont égaux aux projectifs et sont les "homotopes" à 0.

Démonstration. C'est à peu de chose près le même raisonnement que dans le cas des complexes. Il suffit de modifier un peu la définition de F_g et F_d de façon à prendre en compte la structure de DG-algèbre.

On définit le foncteur d'oubli $F : \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}) \rightarrow \widetilde{\text{Gr}}(\mathcal{A})$ comme précédemment, $\widetilde{\text{Gr}}(\mathcal{A})$ désignant la catégorie des foncteurs de \mathcal{A} dans les k -modules gradués.

On définit ensuite $F_g : \widetilde{\text{Gr}}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ (resp. F_d) par :

$$F_g(M) : A \in \mathcal{A} \mapsto (M(A)^n \oplus M(A)^{n+1})_n \text{ et } d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{resp. } F_d(M) : A \in \mathcal{A} \mapsto (M(A)^{n-1} \oplus M(A)^n)_n \text{ et } d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

F_g (resp. F_d) étant un foncteur il reste à définir son comportement vis à vis d'un morphisme $f \in \mathcal{A}(A, B)$. On suppose f de degré p . M étant un foncteur, f induit $Mf : M(A) \rightarrow M(B)$ et $d_{\mathcal{A}(A, B)}f$ induit $Mdf : M(A) \rightarrow M(B)$. On pose alors :

$$F_g(M)(f) = \begin{pmatrix} Mf & 0 \\ Mdf & (-1)^p Mf \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } F_d(M)(f) = \begin{pmatrix} (-1)^p Mf & 0 \\ (-1)^p Mdf & Mf \end{pmatrix} \right).$$

On suit ensuite le même raisonnement que précédemment. □

1.2.3 Catégorie stable associée à une catégorie exacte

Objectif - Dans le cadre des catégories de Frobenius associée à une DG-catégorie, on introduit la notion de catégorie stable, machine à fabriquer des catégories triangulées.

Nous munirons $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ d'une structure triangulée et contrôleront ainsi la structure de $D(\mathcal{A})$ conformément à ce qui était annoncé.

1.2.3.1 Catégorie stable

Soit \mathcal{A} une catégorie exacte ayant suffisamment d'injectifs.

Définition 1.2.18 (Catégorie stable). On définit la catégorie stable

$$\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/(\text{ideal des morphismes factorisant par un injectif})$$

Plus exactement, les objets sont les mêmes et les morphismes sont les classes d'équivalences de morphismes dans \mathcal{A} modulo le sous groupe des morphismes qui factorise par un injectif.

On remarquera que la composition dans $\underline{\mathcal{A}}$ est induite par celle de \mathcal{A} .

Exemple 1.2.19. Si \mathcal{A} est une DG-catégorie, on munit $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ de la structure exacte de la section précédente. Alors $\underline{\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}^0(\mathcal{A})$.

On remarque que,

Proposition 1.2.20. *La catégorie $\underline{\mathcal{A}}$ est additive, le foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ est additif mais n'est pas exact en général.*

Il s'agit maintenant de munir $\underline{\mathcal{A}}$ d'une structure de catégorie suspendue.

1.2.3.2 Catégorie suspendue

Proposition 1.2.21. *L'application $A \mapsto SA$ peut être étendue en un foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ de la façon suivante : soit $f : A \rightarrow B$, on pose $S\bar{f} = \bar{h}$ où h est un morphisme d'un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & IA & \xrightarrow{p_A} & SA \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{i_B} & IB & \xrightarrow{p_B} & SB. \end{array}$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que $S\bar{f}$ existe et est bien défini. Pour l'existence, on commence par le diagramme suivant qui provient de l'injectivité de IB :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & IA & \xrightarrow{p_A} & SA \\ \downarrow f & \searrow i_A \circ f & \downarrow g & & \\ B & \xrightarrow{i_B} & IB & \xrightarrow{p_B} & SB. \end{array}$$

On conclut ensuite par une chasse au diagramme. On peut vérifier que \bar{h} ne dépend pas du g choisit. \square

Définition 1.2.22. À chaque conflation (i, p) de \mathcal{A} , on associe une suite dans $\underline{\mathcal{A}}$ appelé *triangle standard* :

$$A \xrightarrow{\bar{i}} B \xrightarrow{\bar{p}} C \xrightarrow{\partial\varepsilon} SA$$

définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \quad \partial\varepsilon = \bar{e} \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow e \\ A & \xrightarrow{i_A} & IA & \xrightarrow{p_A} & SA \end{array}$$

Comme précédemment, g existe par injectivité de IA et on conclut par une chasse au diagramme.

Définition 1.2.23. Un triangle est une suite $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow SA$ (on parle de S -séquence ou de S -suites) isomorphe à un triangle standard.

Théorème 1.2.24. *La catégorie $\underline{\mathcal{A}}$ munie du foncteur de suspension S et des triangles de la définition précédente vérifie les axiomes (SP0) à (SP4) de la définition 1.2.2*

Démonstration. On pourra consulter Hartshorne (1966). \square

Le théorème suivant répond à la problématique introduite en début de partie,

Théorème 1.2.25. *Si \mathcal{A} une catégorie de Frobenius, alors $\underline{\mathcal{A}}$ est triangulée*

Démonstration. \square

En particulier, on obtient,

Proposition 1.2.26. *Soit \mathcal{A} une DG-catégorie alors $\underline{\mathcal{C}}_{DG}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée.*

On peut résumer ce qui précède par le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Catégorie exacte} & \rightsquigarrow & \text{Catégorie suspendue} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Catégorie Frobenius} & \rightsquigarrow & \text{Catégorie stable triangulée}
 \end{array}$$

1.3 Localisation

Objectif - L'objectif de cette section est double. Suivant notre plan, il s'agit de mieux contrôler ce qui se passe dans la catégorie $D(\mathcal{A})$ et de relier cette dernière à la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Dans un cadre plus général, il s'agit ici de bien comprendre les différentes approches de localisation. En effet, dans le cadre de la construction motivique, il nous faudra localiser non plus par rapport aux quasi-isomorphismes mais par rapport à des classes de morphismes plus généraux que sont les suites d' \mathbb{A}^1 -homotopie et de Mayer-Vietoris.

1.3.1 Généralités

Objectif - On rappelle ici les bases de la théorie de la localisation. Ce qui nous intéresse, en particulier, est de savoir à quelles conditions la catégorie dérivée est une catégorie "petite" et de quel est le comportement de la localisation vis à vis des sous catégories.

Théorème 1.3.1. *Gabriel et Zisman (1971) Soit \mathcal{C} une catégorie et Σ une classe de morphismes de \mathcal{C} . Il existe une catégorie large $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ (i.e. les morphismes entre deux objets ne forment pas un ensemble) et un foncteur $\mathcal{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ "universel" parmi les foncteurs rendant les morphismes de Σ inversible.*

Le fait que le théorème précédant ne nous donne l'existence que d'une catégorie large est un grand problème car il n'y a alors plus aucun espoir de contrôler les morphismes dans la localisation. Afin d'obtenir une description simple de la catégorie dérivée, on introduit la définition suivante,

Définition 1.3.2. On dit que la classe de morphismes Σ admet un *calcul des fractions à gauche* si elle satisfait les quatre axiomes suivants :

- (F1) Pour tout objet, l'identité est dans Σ .
- (F2) La composition de deux éléments de Σ est encore dans Σ .
- (F3) Tout diagramme $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} Y$ avec $s \in \Sigma$ peut être complété en un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 s \downarrow & & \downarrow t \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y'
 \end{array}$$

avec $t \in \Sigma$.

- (F4) Si f, g sont des morphismes et qu'il existe s dans Σ tel que $fs = gs$ alors il existe t dans Σ tel que $tf = tg$.

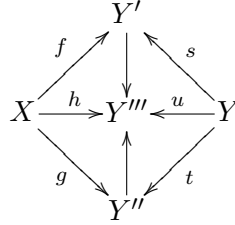
Théorème 1.3.3. *Si Σ admet un calcul des fractions à gauche alors $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ admet la description suivante :*

- Les objets de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ sont ceux de \mathcal{C} .

- Les morphismes $X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ sont les classes d'équivalences de diagramme

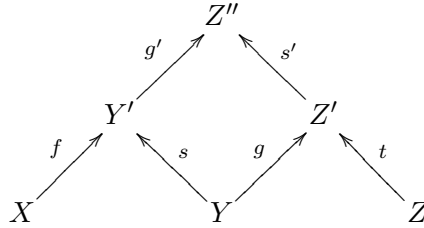
$$X \xleftarrow{f} Y' \xrightarrow{s} Y$$

où par définition (s, g) est équivalent à (t, g) s'il existe un diagramme commutatif :



On note $(s|f)$ la classe d'équivalence de (s, f) .

La composition est donnée par $(s|f) \circ (t|g) = (s't|g'f)$ où s' et g' sont définis par le diagramme commutatif suivant issu de (F3),



Le foncteur $\mathcal{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ est donné par

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \\ (f : X \rightarrow Y) &\longmapsto (\text{id}_Y, f) \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant aux comportements de la localisation vis à vis des sous-catégories.

Définition 1.3.4. Soit \mathcal{B} une sous catégorie pleine de \mathcal{C} . On note $\mathcal{B} \cup \Sigma$ la classe des morphismes dans \mathcal{B} qui sont dans Σ . On dit que \mathcal{B} est *cofinale* dans \mathcal{C} pour Σ si pour tout $s : X \rightarrow X'$ de Σ avec X' dans \mathcal{B} , il existe X'' dans \mathcal{B} et $m : X' \rightarrow X''$ tel que la composition $m \circ s$ soit dans Σ .

Proposition 1.3.5. La classe $\mathcal{B} \cap \Sigma$ admet un calcul des fractions. Si la catégorie \mathcal{B} est cofinale dans \mathcal{C} pour Σ alors le foncteur canonique :

$$\mathcal{B}[(\mathcal{B} \cap \Sigma)^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$$

est pleinement fidèle.

1.3.2 Localisation dans les catégories triangulées

Objectif - On décrit ici le cas particulier des catégories triangulées et de leurs sous-catégories. On termine par quelques résultats sur la dualité de Verdier.

Soit (\mathcal{T}, S) une catégorie triangulée.

1.3.2.1 Définitions

Définition 1.3.6 (catégorie pleine suspendue, triangulée). Soit \mathcal{N} une sous-catégorie de \mathcal{T} .

Une catégorie \mathcal{N} est dite sous-catégorie *pleine suspendue* si elle est une sous-catégorie additive pleine de \mathcal{T} vérifiant $S\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ et telle que \mathcal{N} soit *fermée par extension*.

Plus exactement, si deux termes X et Z d'un triangle

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow SX$$

sont dans \mathcal{N} alors le troisième terme Y appartient aussi à \mathcal{N} .

On dit que \mathcal{N} est une sous-catégorie *pleine triangulée* si de plus $\Sigma^{-1}\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$.

Considérons \mathcal{N} une sous-catégorie pleine suspendue. On note Σ la classe des morphismes s de \mathcal{T} qui apparaissent dans des triangles,

$$N \longrightarrow X \xrightarrow{s} X' \longrightarrow SN$$

pour N dans \mathcal{N} .

Lemme 1.3.7. *La classe Σ est un système multiplicatif avec $S\Sigma \subset \Sigma$. De plus, dans le diagramme suivant (Cf. axiome (SP3) de la définition 1.2.2) :*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & SX \\ x \downarrow & & y \downarrow & & z \downarrow & & \downarrow SX \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & SX' \end{array}$$

où x et y sont dans Σ alors z peut être trouvé dans Σ .

Si \mathcal{N} est une sous-catégorie pleine triangulée, alors $S^{-1}\Sigma \subset \Sigma$.

La catégorie $\mathcal{T}[\Sigma^{-1}]$ est une catégorie additive et le foncteur \mathcal{Q} de projection est additif. On munit $\mathcal{T}[\Sigma^{-1}]$ de la suspension induite par S et les triangles de \mathcal{T} sont l'image de ceux de \mathcal{T} par \mathcal{Q} . Par (SP2) et (SP3) (Cf. définition 1.2.2), les morphismes $N \rightarrow 0$ avec $N \in \mathcal{N}$ sont dans Σ .

On note ainsi,

$$\mathcal{T}/\mathcal{N} = \mathcal{T}[\Sigma^{-1}].$$

Proposition 1.3.8. *La catégorie \mathcal{T}/\mathcal{N} munie de la structure ci-dessus est une catégorie suspendue et \mathcal{Q} est un foncteur triangulé. La catégorie \mathcal{T}/\mathcal{N} est universelle quant aux catégories suspendues qui annulent \mathcal{N} .*

Si \mathcal{N} est une sous-catégorie pleine triangulée alors la catégorie \mathcal{T}/\mathcal{N} est une catégorie triangulée.

Considérant une sous-catégorie pleine triangulée \mathcal{S} , une question naturelle concerne le comportement de la localisation vis à vis de celle-ci. La réponse est fournie par la proposition suivante,

Proposition 1.3.9. *Si chaque morphisme $N \rightarrow X'$ avec $N \in \mathcal{N}$ et $X' \in \mathcal{S}$ admet une factorisation*

$$N \rightarrow N' \rightarrow X'$$

pour $N' \in \mathcal{N} \cap \mathcal{S}$ alors \mathcal{S} est cofinale (à droite) par rapport à Σ .

En particulier, le foncteur canonique $\mathcal{S}/\mathcal{S} \cap \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$ est pleinement fidèle.

Démonstration. Il s'agit d'abord de vérifier que le système multiplicatif de \mathcal{S} défini par \mathcal{S}/\mathcal{N} coïncide bien avec $\Sigma \cap \mathcal{S}$.

En effet, pour tout triangle,

$$N \rightarrow X \rightarrow X' \rightarrow SN$$

avec $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ et $X, X' \in \mathcal{S}$, N est dans $\mathcal{S} \cap \mathcal{N}$ car c'est une extension de X par $S^{-1}X'$. \square

En particulier, ce résultat s'applique

1.3.2.2 Localisation et dualité de Verdier

On introduit ici la notion de catégorie admissible, fondamentale pour la construction des motifs. Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée, $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$ une sous-catégorie triangulée.

On rappelle les définitions d'orthogonaux à droite (resp. à gauche),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\perp &= \{M \in \mathcal{T}, \mathcal{T}(i, M) = 0 \forall i \in \mathcal{I}\} \\ (\text{resp. } {}^\perp\mathcal{I} &= \{M \in \mathcal{T}, \mathcal{T}(M, i) = 0 \forall i \in \mathcal{I}\}) \end{aligned}$$

Définition 1.3.10 (Catégorie admissible). La catégorie \mathcal{T} est dite admissible à droite si quelque soit $M \in \mathcal{T}$, il existe un triangle,

$$M_{\mathcal{I}} \rightarrow M \rightarrow M_{\mathcal{I}^\perp} \rightarrow SM_{\mathcal{I}}$$

Il existe bien entendu la notion d'admissibilité à gauche.

Proposition 1.3.11. *Notant \mathcal{D} la catégorie localisée par rapport à \mathcal{I} , les conditions suivantes sont équivalentes,*

1. *Le foncteur $i_* : \mathcal{I}^\perp \hookrightarrow \mathcal{D}$ admet un adjoint à droite*
2. *La catégorie \mathcal{I} est épaisse (contenant tous ses facteurs directs) et le quotient de Verdier \mathcal{T}/\mathcal{I} est bien défini.*
Le foncteur $j^ : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{I}$ admet un adjoint à droite.*
3. *Tout élément M de \mathcal{T} admet un triangle, unique à unique isomorphisme près.*

$$M_{\mathcal{I}} \rightarrow M \rightarrow M_{\mathcal{I}^\perp} \rightarrow SM_{\mathcal{I}}$$

4. *On a une équivalence de catégorie entre le quotient de Verdier et l'orthogonal*

$$\mathcal{I}^\perp \simeq \mathcal{D}/\mathcal{I}$$

La preuve de ce résultat peut-être abordée par la *dualité de Grothendieck*. Nous la traiterons à la fin de la partie suivante, comme application du *théorème de représentation de Brown*.

Remarque 1.3.12. En général, le $\text{Ker}(\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{I})$ est la plus petite sous-catégorie épaisse contenant \mathcal{I} .

1.3.3 Catégories dérivées ; cas des catégorie exactes.

Objectif - Cette section vient conclure notre objectif de contrôler la structure triangulée de $D(\mathcal{A})$ en tant que sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$. On procède comme précédemment en deux temps, établissant d'abord le résultat dans le cadre des catégories exactes, ensuite dans le cadre des DG-catégories.

Dans le cas de catégories abéliennes, on trouvera un exposé de la théorie des catégories dérivées dans le livre Kashiwara et Schapira (1990).

1.3.3.1 Le cas des catégories exactes

Soit \mathcal{A} une catégorie exacte.

Définition 1.3.13 (Complexe acyclique). Un complexe N d'objets de \mathcal{A} est dit acyclique si la différentielle d^{n-1} factorise en tout degré par,

$$\begin{array}{ccc} N^{n-1} & \xrightarrow{d^n} & N^n \\ & \searrow p^{n-1} & \nearrow i^{n-1} \\ & Z^{n-1} & \end{array}$$

où p^{n-1} est le conoyau de d^{n-2} et une déflation et i^{n-1} est une inflation et un noyau de d^n .

Un complexe N est acyclique s'il est acyclique en chaque degré.

Exemple 1.3.14. Si \mathcal{A} est abélienne alors les acycliques coïncident avec la notion usuelle, *i.e.* $H^n(N) = 0$.

Remarque 1.3.15. On peut être homotopiquement trivial sans être acyclique.

Prenons par exemple R un anneau, e un idempotent et pour \mathcal{A} la catégorie des R -modules libres. Le complexe suivant fournit alors l'exemple souhaité,

$$\dots \xrightarrow{1-e} R \xrightarrow{e} R \xrightarrow{1-e} R \xrightarrow{e} \dots$$

On a en fait le résultat suivant,

Lemme 1.3.16. *Soit \mathcal{A} une catégorie exacte. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Les complexes homotopiquement nuls sont acycliques.*
2. *Pour tout idempotent e , $\ker(e)$ et $\text{coker}(e)$ existent (voir section A.1).*
3. *La classe des complexes acycliques est fermée par isomorphisme dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$*

Le lemme suivant assure de la bonne définition de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dans la proposition 1.3.19,

Lemme 1.3.17. *Soit \mathcal{N} la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ des complexes isomorphes à un complexe acyclique. La catégorie \mathcal{N} est une sous-catégorie pleine triangulée de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.*

Définition 1.3.18. Un morphisme $s : X \rightarrow X'$ de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est appelé *quasi-isomorphisme* s'il apparait dans un triangle de la forme :

$$N \rightarrow X \rightarrow X' \rightarrow SN$$

pour $N \in \mathcal{N}$

Le résultat qui sera généralisé dans la suite est,

Proposition 1.3.19. *Le système multiplicatif Σ associé à \mathcal{N} est formé de l'ensemble des quasi-isomorphismes. La catégorie*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{A})/\mathcal{N} = \mathcal{H}(\mathcal{A})[\Sigma^{-1}]$$

est bien définie et les quasi-isomorphismes y sont inversibles.

Remarque 1.3.20. Dans le cas où \mathcal{A} est une catégorie abélienne, on retrouve la définition de la catégorie dérivée.

1.3.3.2 Le cas des DG-catégories

Soit \mathcal{A} une DG-catégorie. Reprenons les notions de la section qui précède.

Définition 1.3.21. Un élément M de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est dit *acyclique* si pour tout X dans \mathcal{A} , $M(X)$ est acyclique pour la structure exacte de $\mathcal{C}_{DG}(k) \sim \mathcal{C}(\text{Mod}(k))$ (c.f. exemple 1.2.10).

Cette définition « s'étend » naturellement à $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ et l'on note \mathcal{N} la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ des foncteurs $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_{DG}(k)$ isomorphes à des acycliques.

Définition 1.3.22. Un morphisme $s : X \rightarrow X'$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est un quasi-isomorphisme s'il apparaît dans un triangle

$$N \rightarrow X \rightarrow X' \rightarrow SN$$

avec $N \in \mathcal{N}$. On note Σ la classe des quasi-isomorphismes.

Le résultat essentiel est alors le suivant,

Proposition 1.3.23. \mathcal{N} est une sous-catégorie pleine triangulée de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ et donc

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{H}^0(\mathcal{A})/\mathcal{N} = \mathcal{H}^0(\mathcal{A})[\Sigma^{-1}]$$

est triangulée.

De plus, $s : M \rightarrow N$ est un quasi-isomorphisme si pour tout $X \in \mathcal{A}$, s induit un isomorphisme sur les H^* de $M(X)$ et $N(X)$.

Remarque 1.3.24. On parle ici du H^* classique sur les complexes de k -module et non pas du foncteur $H^*(M)$ défini pour tout foncteur de DG-catégorie cf exemple 11.1.10 et la remarque 1.1.13.

1.4 \mathcal{A} -modules semi-libres et catégorie prétriangulées

1.4.1 Catégorie dérivée vue comme H^0 d'une DG-catégorie

Objectif - Il s'agit ici d'explicitier la réalisation de $D(\mathcal{A})$ comme sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$. Par analogie avec le cas des catégories abéliennes et des catégories de complexes bornés, on introduit la notion de module semi-libre.

On construit alors deux DG-catégories "flèches soulignées" qui permettent de réaliser la catégorie dérivée comme catégorie homotopique.

On a par exemple déjà vu au théorème 1.1.45 et au corollaire 1.1.47 que la résolution par des cofibrants permettait d'obtenir un foncteur

$$D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{A})$$

D'autre part, on a aussi,

Proposition 1.4.1. Soit $\underline{\mathcal{A}}^{(1)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$ formée des \mathcal{A} modules cofibrants. Alors,

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{H}^0(\underline{\mathcal{A}}^{(1)}).$$

Remarque 1.4.2. On remarquera que $\underline{\mathcal{A}}^{(1)}$ est la complétion Karoubienne de $\underline{\mathcal{A}}$ (Cf. section A.1).

1.4.1.1 Première approche

Définition 1.4.3. Soit $M \in \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A})$. On dit que M est un \mathcal{A} -module *libre* s'il existe un ensemble I tel que :

$$M \simeq \bigoplus_{i \in I} h_{X_i}[n_i] \quad (\text{où } h_{X_i} = X_i^\wedge \quad X_i \in \mathcal{A} \text{ et } n_i \in \mathbb{Z}).$$

On dit que M est un \mathcal{A} -module *semi-libre* s'il existe une filtration $M_i \subset M_{i+1}$ telle que :

$$\bigsqcup_{i \in I} M_i = M \quad \text{et pour tout } i \text{ } \text{Gr}_i(M) \text{ est libre.}$$

Définition 1.4.4. On note $\underline{\mathcal{A}}$, la DG-catégorie des \mathcal{A} -modules semi-libres.

On a déjà vu à la proposition 1.1.42 que pour tout $X \in \mathcal{A}$, X^\wedge est cofibrant. Cela n'en fait cependant pas suffisamment.

La proposition suivante indique que la notion de module semi-libre est la notion adéquate,

Proposition 1.4.5. *Soit M un \mathcal{A} -module. Si M est semi-libre alors M est cofibrant.*

Démonstration. Modulo l'existence de sommes directes arbitraires, la preuve est identique à celle de la proposition 1.1.42. \square

Le résultat essentiel qui permet d'affiner notre connaissance de $D(\mathcal{A})$ est le suivant,

Proposition 1.4.6. *Soit \mathcal{A} une DG-catégorie, on a alors :*

$$D(\mathcal{A}) \simeq H^0(\underline{\mathcal{A}})$$

Proposons maintenant une seconde description de $\underline{\mathcal{A}}$.

1.4.1.2 Seconde approche

Définition 1.4.7. On note $\underline{\mathcal{A}'}$ la catégorie ayant :

– Pour objets les couples (M, φ) avec $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ et $\varphi \in \text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ tels que :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_n = \bigoplus_{i \in I_n} M_i[n_i]$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(M_n) \subset M_{n-1}$, et $\varphi(M_0) = 0$,
3. les applications φ vérifiant l'équation de Mawer-Cato,

$$d\varphi + \varphi \circ \varphi = 0.$$

– Pour morphismes entre $M = \bigoplus M_i$ et $N = \bigoplus N_i$,

$$\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}'}}((M, \varphi_M), (N, \varphi_N)) = \text{Hom}(M, N) = \prod_i \bigoplus_j \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, N_j)[n_j - m_i]$$

– La différentielle sur $\underline{\mathcal{A}'}$ (M, N) est définie par,

$$d_\varphi : f \mapsto d_{\mathcal{A}}(f) + [\varphi, f]$$

avec $[\varphi, f] = \varphi_N \circ f - (-1)^{\deg(f)} f \circ \varphi_M$.

Comparant ces deux approches, on obtient alors,

Théorème 1.4.8. *Le foncteur $\mathcal{F} : \underline{\mathcal{A}}' \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ défini par :*

$$(M, \varphi) \mapsto \begin{cases} lh_M = \bigoplus_i h_{M_i}[n_i] \\ d_{\text{libre}} + \varphi \end{cases} \quad (1.4.1.1)$$

établit une équivalence de catégorie.

On peut maintenant démontrer et affiner le lemme 1.1.43,

Lemme 1.4.9. *Pour tout $M \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ il existe PM cofibrant et semi-libre tel que $PM \stackrel{q.i.}{\simeq} M$.*

Démonstration. Considérant PM_i avec $PM_i \subset PM_{i+1}$ et PM_{i+1}/PM_i libre. On construit alors PM comme colimite de PM_i par récurrence en construisant des morphismes $PM_i \xrightarrow{f_i} M$.

Supposons les $f_k : PM_k \hookrightarrow M$ construits pour $k \leq i-1$.

Il existe un \mathcal{A} -module libre P tel que, $\pi : P \rightarrow \text{Cone}(f_{i-1})[-1]$ où $\pi_* : H(P) \rightarrow H(\text{Cone}(f_{i-1})[-1])$ est surjectif.

Posant $PM_i = \text{Cone}(P \rightarrow PM_{i-1})$, on obtient $f_i : PM_i \rightarrow M$ fourni par la composition suivante,

$$PM_i \rightarrow P[1] \rightarrow \text{Cone } f_{i-1} \rightarrow M.$$

On a alors $f_i|_{PM_{i-1}} = f_{i-1}$. Le quotient $PM_i/PM_{i-1} \sim P$ est libre et l'on pose $PM = \text{colim}((PM_i, f_i))$.

Ainsi, f est l'application induite et l'application $\text{Cone } f_{i-1} \rightarrow \text{Cone } f_i$ induit 0 en cohomologie. On en déduit que $\text{Cone } f$ est acyclique et que f est un quasi-isomorphisme. \square

De même que dans la première approche, on obtient,

Proposition 1.4.10. *On a alors $D(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{H}^0(\underline{\mathcal{A}})$*

Remarque 1.4.11. On a notamment que la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est réalisée comme sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$.

1.4.2 DG-catégories triangulées et prétriangulées

Ayant d'une part muni $H^0(\mathcal{A})$ de façon théorique d'une structure de catégorie triangulée, puis réalisé la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ comme catégorie homotopique de deux DG-catégories équivalentes, il se pose la question d'une structure triangulée canonique.

Résumant les résultats établi par le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \hookrightarrow & \underline{\mathcal{A}} & \hookrightarrow & \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}) \\ & & = \underline{\mathcal{A}}' & & \\ H^0(\mathcal{A}) & \hookrightarrow & H^0(\underline{\mathcal{A}}) = D(\mathcal{A}) & \hookrightarrow & \mathcal{H}^0(\mathcal{A}). \end{array}$$

on étudie de quelle façon la structure triangulée de $H^0(\mathcal{A})$ est issue de celle de $H^0(\underline{\mathcal{A}})$.

1.4.2.1 DG-catégories prétriangulées

On introduit pour cela une catégorie intermédiaire entre \mathcal{A} et $\underline{\mathcal{A}}$,

Définition 1.4.12 (Catégorie prétriangulée). Soit \mathcal{A} une DG-catégorie. On note $\mathcal{A}^{\text{pré tr}}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{A}}$ constitué des objets de type finis $M = \bigoplus_1^n M_i[n_i]$.

On remarque que la catégorie $\mathcal{A}^{\text{pré tr}}$ contient tous les objets de la forme $X[n]$ avec $X \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{Z}$ ainsi que tous les cônes de morphismes de \mathcal{A} qui sont fermés et de degré 0.

Ceci motive l'introduction de la notion suivante,

Définition 1.4.13 (Catégorie fortement prétriangulée). On dit que \mathcal{A} est fortement prétriangulée si \mathcal{A} contient tous les objets de la forme $X[n]$ avec $X \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{Z}$ ainsi que tous les cônes de morphismes qui sont fermés et de degré 0.

De façon équivalente, \mathcal{A} est fortement prétriangulée si les deux foncteurs

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathcal{A}^{op} &\longrightarrow \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}) \\ Y &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}(h_Y, h_Y[n])} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall f : X \rightarrow Z \\ \text{fermé de degré 0} \quad \mathcal{A}^{op} &\longrightarrow \mathcal{C}_{DG}(\mathcal{A}) \\ Y &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}_{DG}(h_Y, \text{Cone}(h_X \xrightarrow{h_f} h_Z))} \end{aligned}$$

sont représentables.

Lemme 1.4.14. *Si \mathcal{A} est fortement prétriangulée, alors tout triangle dans $\text{H}^0(\underline{\mathcal{A}})$:*

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \text{Cone } f \longrightarrow X[1]$$

avec X et Y dans \mathcal{A} est en fait dans $\text{H}^0(\mathcal{A})$.

Dans ce cas, la catégorie $\text{H}^0(\mathcal{A})$ est naturellement triangulée.

Théorème 1.4.15. *Soit \mathcal{A} une DG-catégorie. Alors,*

- $\mathcal{A}^{\text{pré tr}}$ est fortement prétriangulée
- $\mathcal{A}^{\text{pré tr}}$ est unique à isomorphisme unique près et répond au problème universel :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{A}^{\text{pré tr}} \\ & \searrow & \vdots \\ & & B \end{array} \quad \text{pré tri.}$$

En particulier, dire que \mathcal{A} est fortement prétriangulée équivaut à dire que \mathcal{A} et $\mathcal{A}^{\text{pré tr}}$ sont DG-équivalentes.

On digresse ensuite un peu autour de $(\mathcal{A}^{\text{pré tr}})^{\text{pré tr}}$ qui est DG équivalent à $\mathcal{A}^{\text{pré tr}}$.

Définition 1.4.16. On dit que \mathcal{A} est prétriangulée si $\text{H}^0(\mathcal{A}) \simeq \text{H}^0(\mathcal{A}^{\text{pré tr}})$.

Corollaire 1.4.17. *Si \mathcal{A} est prétriangulée, alors $\text{H}^0(\mathcal{A}^{\text{pré tr}})$ est canoniquement triangulée.*

On définit enfin,

Définition 1.4.18. Soit \mathcal{A} une DG-catégorie. On définit la catégorie triangulée \mathcal{A}^{tr} par,

$$\mathcal{A}^{\text{tr}} = \text{H}^0(\mathcal{A}).$$

1.4.3 Notion de DG-modèle

Définition 1.4.19 (DG-modèle). Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée. Un *DG-modèle* pour \mathcal{T} est une DG-catégorie \mathcal{A} prétriangulée telle que,

$$\mathcal{A}^{\text{tr}} \simeq \mathcal{T}.$$

Exemple 1.4.20. Si $\mathcal{T} = \text{D}(\mathcal{A})$, alors $\underline{\mathcal{A}}$ est un DG modèle pour \mathcal{T} .

1.5 Théorème de représentation [en cours de rédaction]

Références de la section Krause (2005, 2002)

1.5.1 Préliminaires

1.5.2 Génération compacte et génération parfaite

1.5.3 Théorème de Représentabilité de Brown

1.5.4 Application : dualité de Grothendieck

Référence de la section Neeman (1996)

Chapitre 2

Cycles algébriques et groupes de Chow

Soit \mathbf{k} un corps. On considère dans cette partie des schéma définis sur \mathbf{k} , séparés et de type fini.

2.1 Cycles algébriques

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1 (cycles algébriques). On note $\mathcal{Z}_k(X)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de X de dimension k

Définition 2.1.2. Un schéma X est dit ,

1. *équidimensionnel* de dimension d en $x \in |X|$ s'il existe un voisinage U tel que $\dim_k(U) = d$,
2. *localement équidimensionnel* s'il est équidimensionnel en tout point.

Définition 2.1.3. Soit X un schéma localement équidimensionnel. On note $\mathcal{Z}^k(X)$ le groupe abélien libre engendré par les cycles $W \hookrightarrow X$ intègre, irréductible et de codimension k .

Exemple 2.1.4. Soit X un schéma localement équidimensionnel. Dans ce cas, $\mathcal{Z}^1(X)$ est le groupe des diviseur de Weyl, $\mathcal{Z}^0(X)$ est alors engendré par les composantes irréductible de X .

2.1.1.1 Cycle associé à un sous-schéma

Considérons $Y \hookrightarrow X$ sous-schéma de dimension inférieure à r . On lui associe un cycle Z_Y de $\mathcal{Z}_n(X)$ de la façon suivante.

Pour chaque composante irréductible $W \subset Y$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,W}$ de Y au point générique de W est artinien. Définissant la multiplicité par $n_W = l(\mathcal{O}_{Y,W})$, on obtient le cycle associé à Y ,

$$Z_Y = \sum_{\substack{W \text{ irr.} \\ \text{reduit}}} n_W W.$$

Remarque 2.1.5. Chaque fois que nous chercherons à définir des notions dans $\mathcal{Z}(X)$, nous les définirons à partir des composantes irréductibles. Le problème essentiel sera alors de trouver une bonne définition de la multiplicité associée.

2.1.1.2 Equivalence rationnelle

Définition Il s'agit de définir des cycles modulo déformations rationnelles.

Définition 2.1.6. Un cycle $\alpha \in \mathcal{Z}_n(X)$ est dit *rationnellement équivalent à 0* s'il existe $\beta \in \mathcal{Z}_n(X \times \mathbb{P}^1)$ tel que $\alpha = \beta(0) - \beta(\infty)$.

On note $\mathcal{Z}_n(X)_{rat}$ le sous groupe de $\mathcal{Z}_n(X)$ engendré par les cycles rationnellement équivalents à 0.

De même, on notera $\mathcal{Z}^n(X)_{rat}$ le sous groupe de $\mathcal{Z}^n(X)$ engendré par les cycles rationnellement équivalents à 0.

Définition 2.1.7 (Groupes de Chow). On nomme groupes de Chow les groupes quotients sous l'équivalence rationnelle,

$$\mathrm{CH}_n(X) = \mathcal{Z}_n(X) / \mathcal{Z}_n(X)_{rat}.$$

Les groupes $\mathrm{CH}^n(X)$ sont définis de la même manière avec les groupes $\mathcal{Z}^n(X)$ et $\mathcal{Z}^n(X)_{rat}$.

Cas des diviseurs Dans le cas où W est normal, ses localisés sont des anneaux de valuations discrètes.

À un diviseur $\phi \in k(W)^*$ on peut associer,

$$[\mathrm{div}(\phi)] = \sum_{\substack{Y \subset W \\ \mathrm{codim} 1 \\ \text{intègre}}} v_Y(\phi) Y$$

En toute généralité, on considère le normalisé \widetilde{W} de W ainsi que le morphisme de normalisation,

$$n : \widetilde{W} \rightarrow W$$

Exemple 2.1.8. Lorsque X est lisse de dimension n (ou localement factoriel), alors $\mathcal{Z}(X)_{n-1} = \mathrm{Pic}(X)$.

Etudiant le passage aux morphismes de la notion de cycle algébrique et d'équivalence rationnelle, on donnera dans la suite une définition alternative d'équivalence rationnelle en utilisant le morphisme de normalisation.

2.1.2 Images directes et réciproques

Considérant un morphisme $f : Y \rightarrow X$. Le reste de cette partie est consacrée à l'obtention de morphismes *image directe* et *image réciproque* au niveau des cycles.

Nous introduirons les notions dans des cadres naturels, *i.e.* où les problèmes de dimensions sont facilement résolus.

2.1.2.1 Image directe et morphismes propres

Considérons $f : Y \rightarrow X$ morphisme propre, qui à un sous-schéma intègre W associe le sous-schéma réduit W' associé au support de $f(|W|)$ dans X .

Le *morphisme image directe* est défini de façon à conserver la dimension au niveau de l'extension de type fini induite au niveau des corps de fonctions rationnelles $k(f(W)) \hookrightarrow k(W)$.

Plus exactement,

Définition 2.1.9. Pour $W \subset Y$ sous-schéma intègre de dimension n , on définit l'*image directe* $f_*(W)$ dans $\mathcal{Z}_n(X)$ par,

$$f_*(W) = \begin{cases} [k(W) : k(f(W))]W' & \text{si } \dim_k(W) = \dim_k(f(W)) \\ 0 & \text{si } \dim_k(W) > \dim_k(f(W)) \end{cases} \quad (2.1.2.1)$$

La définition s'étend ensuite par linéarité au niveau des cycles en un morphisme,

$$f_* : \mathcal{Z}(Y) \rightarrow \mathcal{Z}(X)$$

On peut maintenant donner une définition alternative de l'équivalence rationnelle 2.1.6

Définition 2.1.10. Le groupe $\mathcal{Z}_n(X)_{rat}$ des cycles rationnels est engendré par les cycles $n_*(div\phi)$, image des diviseurs principaux sous le morphisme de normalisation,

$$n : \widetilde{W} \rightarrow W \hookrightarrow X$$

où \widetilde{W} normalisé de W , de dimension n .

C'est cette dernière que nous utiliserons, et par exemple,

Proposition 2.1.11. *Pour X irréductible de dimension k , il existe un morphisme naturel,*

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) & \rightarrow & \text{CH}_{k-1}(X) \\ \mathcal{L} & \mapsto & \widetilde{n}_*(div\phi) \end{array}$$

Le théorème suivant assure que l'image directe est bien définie au niveau des groupes de Chow.

Théorème 2.1.12. *Soit $f : Y \rightarrow X$ morphisme propre.*

Alors, le morphisme $f_ : \mathcal{Z}(Y) \rightarrow \mathcal{Z}(X)$ envoie $\mathcal{Z}(Y)_{rat}$ dans $\mathcal{Z}(X)_{rat}$, et induit,*

$$f_* : \text{CH}_n(Y) \rightarrow \text{CH}_n(X).$$

Remarque 2.1.13. Les immersions fermées sont en particulier des morphismes propres, le théorème précédent nous donne pour $Y \hookrightarrow X$ un morphisme :

$$f_* : \text{CH}_n(Y) \rightarrow \text{CH}_n(X).$$

Ce résultat est essentiel pour obtenir les propriétés fondamentales de la partie 2.2

2.1.2.2 Image réciproque et morphismes plats

Pour un morphisme $f : Y \rightarrow X$ quelconque, on définit sur les sous-schéma intègres $W \subset X$ la notion de *cycle défini*,

Définition 2.1.14. L'image réciproque $f^*(W)$ d'un sous-schéma intègre W de X est dite *définie* si chacune de ses composantes irréductibles Z vérifie $\text{codim}_Y(Z) = \text{codim}_X(W)$.

On note $\mathcal{Z}^n(X)_{eff} \subset \mathcal{Z}^n(X)$ le sous-groupe engendré par les sous-schéma de codimension n dont l'image réciproque est définie.

De la même manière que pour l'image directe, on souhaite définir des multiplicités dans la décompositions en composantes irréductibles de $f^*(W)$.

Le cadre légitime est celui des morphismes plats.

Effectivement, si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme plat de dimension relative égale à d , alors $\mathcal{Z}^n(X)_{eff} = \mathcal{Z}^n(X)$, et pour un sous-schéma W de X , $Z_{f^{-1}(W)} \in \mathcal{Z}_{n+d}(Y)$.

Dans ce cas, prenant comme définition $f^*(W) = Z_{f^{-1}(W)}$, on obtient par linéarité un morphisme,

$$f^* : \mathcal{Z}_n(X) \rightarrow \mathcal{Z}_{n+d}(Y).$$

Le résultat essentiel est alors le suivant,

Théorème 2.1.15. *Soit $f : X \rightarrow Y$ morphisme plat.*

Alors, f^ envoie $\mathcal{Z}_n(X)_{rat}$ dans $\mathcal{Z}_{n+d}(Y)_{rat}$, et induit,*

$$f^* : \text{CH}_n(X) \rightarrow \text{CH}_{n+d}(Y)$$

Remarque 2.1.16. Rappelons que les morphismes lisses sont des morphismes plats. Les projection $X \times Y \rightarrow X$ sont aussi des morphismes plat de même que les immersions ouvertes

2.1.3 Vers une théorie de l'intersection

On cherche à généraliser à une classe de morphismes plus générale ce qui a été obtenu jusque là, d'un coté pour l'image directe, et d'un autre pour l'image réciproque. La première étape est d'obtenir un pull back pour les immersions.

2.1.3.1 Morphismes localement intersection complète

Suivant le schéma énoncé précédemment, il s'agit de définir une bonne notion de multiplicité au niveau des composantes irréductibles.

Dans le cas d'*intersections propres*, i.e. tel que toute composante irréductible Z de $V \cap W$ soit de dimension $\text{codim}(V) + \text{codim}(W)$, la réponse est fournie par *Serre* dans Serre (1965).

Formule des Tor Plus exactement, soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée, W une composante de X et Z une composante irréductible de $f^*(W)$ dans Y , Z intersectant proprement W . On définit la multiplicité $m(Z, f^*(W); Y)$ par la formule des Tor,

$$m(Z, f^*(W)) = \sum_{i=0}^{\infty} l_{\mathcal{O}_{Y,Z}}(\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,W'}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, \mathcal{O}_{W,W'})) \quad (2.1.3.1)$$

où $W' = \overline{f(Z)} \subset W$.

Où l'on rappelle que $\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,W'}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, M)$ est le i -ème foncteur dérivé gauche de

$$\mathcal{O}_{Y,Z} \otimes_{\mathcal{O}_{X,W'}} (-) : \text{Mod}_{\mathcal{O}_{X,W'}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{O}_{Y,Z}}.$$

Remarque 2.1.17. Notons que,

1. Si Z est une composante irréductible de $f^{-1}(W)$, alors les longueurs des Tor_i considérés sont finies,
2. Si X est lisse, alors $\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,W'}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, \mathcal{O}_{W,W'}) = 0$ pour $i > \dim_k(Y)$ et la somme est finie.
3. Si f est plat, alors $\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,W'}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, \mathcal{O}_{W,W'}) = 0$ pour $i > 0$ et,

$$\text{Tor}_0^{\mathcal{O}_{X,W'}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, \mathcal{O}_W) = \mathcal{O}_{Y,Z} \otimes_{\mathcal{O}_{X,W'}} \mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{f^{-1}(W),Z}.$$

Régularité Rappelons quelques définitions classiques,

Définition 2.1.18 (régularité). 1. Soit R un anneau local noethérien d'idéal maximal \mathfrak{m} .

Une suite d'éléments t_1, \dots, t_n de \mathfrak{m} est dite régulière, si à chaque rang l'image de t_i dans $R / \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle$ n'est pas diviseur de zéro.

2. Une immersion fermée $i : Y \hookrightarrow X$ est dite régulière si quelque soit $y \in Y$, l'idéal maximal $I_{Y,y} \mathcal{O}_{Y,y}$ est engendré par une suite régulière.

Remarque 2.1.19. On peut vérifier que la notion de suite régulière est indépendante de l'ordre des éléments.

Morphisme localement intersection complète Les morphismes qui nous intéressent sont les suivants,

Définition 2.1.20. 1. Un morphisme $f : Y \rightarrow X$ est *localement à intersection complète* s'il se factorise en $f = p \circ i$, par une immersion fermée régulière i et un morphisme lisse quasi-projectif p ,

2. Un morphisme $f : Y \rightarrow X$ est *faiblement localement à intersection complète* s'il se factorise en $f = p \circ i$, par une immersion fermée régulière i et un morphisme plat p .

Le lemme suivant permet de garder le *formule des Tor* 2.1.3.1 comme définition de la multiplicité dans le cas de morphisme localement intersection complète,

Lemme 2.1.21. Soit $f : Y \rightarrow X$ morphisme localement intersection complète.

Alors,

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,W'}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, M) = 0 \text{ dès que } i > \dim_k(Y).$$

Exemple 2.1.22 (Exemple fondamental). Considérons le cas de $i : Y \hookrightarrow X$ diviseur de Cartier, et expliquons comment définir une intersection à partir de la formule des Tor.

Soit $W \subset X$ intègre et notons $Z = f^{-1}(W)$.

Alors pour toute composante irréductible Z de $Y \cap W$,

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,Z}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, \mathcal{O}_{W,Z}) = 0 \text{ pour } i \geq 1.$$

Or,

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,Z}}(\mathcal{O}_{Y,Z}, \mathcal{O}_{W,Z}) = \mathcal{O}_{Y,Z} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Z}} \mathcal{O}_{W,Z} = \mathcal{O}_{Y \cap W, Z}.$$

On définit ainsi l'intersection,

$$Y.W = i^*W = \sum_{\substack{\text{comp. irr. de} \\ Y \cap W}} l_{\mathcal{O}_{X,Z}}(\mathcal{O}_{Y \cap W, Z}).Z.$$

On a ainsi obtenu une image réciproque dans le cas d'un diviseur Cartier $Y \hookrightarrow X$.

2.1.3.2 Panorama

Reprenons le dernier exemple d'un diviseur de Cartier qui a permis de définir une intersection $Y.W$.

On peut chercher à généraliser ce qui précède afin de définir une théorie de l'intersection entre deux cycles V et W quelconques de X , tout en s'affranchissant de la condition d'intersection propre. L'objectif final étant de munir les groupes de Chow d'une structure d'anneau gradué.

Approche classique Une approche possible consiste tout d'abord à considérer le cas de sous-variétés à *intersection propre*.

Utilisant la *formule des Tor* 2.1.3.1, on a précédemment défini une multiplicité $m(V, W; Z)$ telle que,

$$Z_V \cdot Z_W = \sum_{\substack{Z \text{ comp. irr.} \\ V \cap W}} m(V, W; Z) Z_Z$$

Il s'agit de s'affranchir de la condition d'intersection propre, ce qui est obtenu grâce à un *moving lemma* énoncé par XXX dans [? ?]¹.

Théorème 2.1.23 (Chow moving Lemma). *Soit X une variété quasi-projective lisse, V et W deux sous-variétés de X . Alors, il existe un cycle sur X rationnellement équivalent à W qui intersecte proprement V .*

Approche de Fulton Une autre approche consiste à travailler, non pas à partir des cycles, mais directement modulo équivalence rationnelle, *i.e.* au niveau des groupes de Chow. On s'affranchit notamment de la condition de quasi-projectivité.

On établit les résultats pour les diviseurs de Cartier, puis pour des fibrés vectoriels ou projectifs. Utilisant une déformation au cône normal, on obtient l'intersection souhaitée au niveau des cycles.

C'est l'approche reprise dans la partie suivante.

2.2 Groupes de Chow

Suivant le plan énoncé, il s'agit de définir des *morphismes de Gysin* (image réciproque pour les immersions fermées) et des images directes (en général) entre groupes de Chow, ainsi qu'une intersection sur les cycles. L'objectif est d'obtenir ces morphismes dans le cadre des morphismes localement intersection complète. On commencera par le cas des diviseurs de Cartier.

Dans cette partie, notre principale référence sera Fulton (1998) (complétée par Fulton (1984) au besoin).

2.2.1 Définitions et propriétés

2.2.1.1 Diviseurs de Cartier

Considérant $i : Y \hookrightarrow X$ un diviseur de Cartier, on cherche à obtenir un *morphisme de Gysin*,

$$i^* : \text{CH}_k(X) \rightarrow \text{CH}_{k-1}(Y)$$

Soit Z un cycle de $\mathcal{Z}_k(X)$. On considère le faisceau inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(Y) \in \text{Pic}(X)$ associé à Y , ainsi que $\mathcal{L}|_Z$ sa restriction à Z .

En notant $|Y|$ le support de Y on distingue deux cas selon que $Z \subset |Y|$ ou $Z \subset |Y|$.

Dans le cas où $Z \subset |Y|$, $\mathcal{L}|_Z$ est un fibré en droite représenté par un diviseur de Cartier bien défini sur Z et en utilisant la propriété 2.1.11, on a naturellement,

$$\text{Pic}(Z) \longrightarrow \text{CH}_{k-1}(|Z| \cap |Y|) \xrightarrow{j^*} \text{CH}_{k-1}(Y)$$

où j est l'inclusion de $|Z| \cap |Y| = |Z|$ dans Y .

¹Référence recherchée.

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} i^* : \mathcal{Z}_k(X) &\rightarrow \mathrm{CH}_{k-1}(Y) \\ Z &\mapsto j_*(\mathcal{L}|_Z). \end{aligned}$$

Dans le cas où $Z \subset |Y|$, la restriction de Y à Z est un diviseur de Cartier sur Z , c'est à dire un élément de $\mathrm{CH}(|Z| \cap |Y|)$. On utilise à nouveau l'inclusion $j : |Z| \cap |Y| \hookrightarrow Y$.

Le résultat fondamental est alors le suivant,

Théorème 2.2.1. *Le morphisme $i^* : \mathcal{Z}_k(X) \rightarrow \mathrm{CH}_{k-1}(Y)$ se factorise en,*

$$\mathrm{CH}_k(X) \rightarrow \mathrm{CH}_{k-1}(Y).$$

En corollaire, on associe une transformation à un diviseur de Picard,

Corollaire 2.2.2. *Soit $D \in \mathrm{Pic}(X)$. On a alors une transformation,*

$$\begin{aligned} c_1(D).- : \mathrm{CH}_k(X) &\rightarrow \mathrm{CH}_{k-1}(X) \\ Z &\mapsto i_*i^*(Z). \end{aligned}$$

Cette transformation définit $c_1(D)$, première classe de Chern aussi noté $\mathrm{cl}(D)$.

Remarque 2.2.3. Dans le cadre de l'approche classique, on doit discuter selon que $Z \subset Y$ ou non, et utiliser un *moving lemma* pour ramener le cycle en intersection propre avec Y .

2.2.1.2 Invariance par \mathbb{A}^1 -homotopie

Considérant le couple de morphismes,

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{A}^1 &\rightarrow X \\ i_0 : X &\rightarrow X \times \mathbb{A}^1. \end{aligned}$$

On obtient l'invariance par homotopie des groupes de Chow $\mathrm{CH}_*(X)$,

Théorème 2.2.4 (\mathbb{A}^1 -homotopie). *Les images réciproques des morphismes précédents induisent des morphismes réciproques au niveau des groupes de Chow,*

$$\mathrm{pr}_1^* : \mathrm{CH}_k(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_{k+1}(X \rtimes \mathbb{A}^1) : i_0^*.$$

Démonstration. Remarquons que pr_1 est un morphisme plat et que i_0 est l'inclusion d'un diviseur de Cartier dans $X \times \mathbb{A}^1$. Comme $i_0^* \circ \mathrm{pr}_1 = \mathrm{id}$, pr_1^* est injectif. Il reste à montrer que pr_1 est surjectif. Soit $[Z] \in \mathrm{CH}_{k+1}(X \times \mathbb{A}^1)$ et $Z' = \mathrm{pr}_1(Z)$.

Si $\dim(Z') = k$ alors $Z = \mathrm{pr}_1^{-1}(Z')$ et $[Z] \in \mathrm{Im}(\mathrm{pr}_1^*)$.

Si $\dim(Z') = k + 1$.

Soit $U \subset Z'$ un ouvert de lissité. Alors $Z|_{\mathrm{pr}_1^{-1}(U)}$ est un diviseur de Cartier car dans ce cas un diviseur de Weil est un diviseur de Cartier. Or $\mathrm{pr}_1^{-1}(U) = U \times \mathbb{A}^1$ et $\mathrm{Pic}(U \times \mathbb{A}^1) = \mathrm{Pic}(U)$. On a donc $\varphi \in k(\mathbb{A}^1 \times U)$ et $Z'' \in \mathrm{Pic}(U)$ tel que :

$$Z|_{\mathbb{A}^1 \times U} - [\mathrm{div}(\varphi)] = \mathrm{pr}_1^*(Z'').$$

On peut alors trouver $\psi \in k(\mathbb{A}^1 \times \widetilde{Z}')$ avec $p : \widetilde{Z}' \rightarrow Z'$ le normalisé de Z' tel que :

$$Z - p_*[\mathrm{div}(\psi)] - \mathrm{pr}_1^*(Z'') \subset \mathbb{A}^1 \times (Z' \setminus U).$$

Finalement, comme $\mathbb{A}^1 \times (Z' \setminus U)$ a ses composantes irréductibles dans $\mathbb{A}^1 \times D$, D un diviseur de $Z' \setminus U$ et que $Z'' \in \mathrm{Pic}(U)$, on a $Z''' \in \mathrm{CH}_k(X)$ tel que :

$$Z - p_*[\mathrm{div}(\psi)] = \mathrm{pr}_1^*(Z''')$$

□

2.2.1.3 Localisation

Considérant la configuration d'une immersion fermée et de son ouvert complémentaire,

$$F \xrightarrow[\text{fermée}]{i} X \xleftarrow[j]{\text{ouvert}} U$$

Le résultat est alors le suivant,

Théorème 2.2.5. *La suite,*

$$\text{CH}_k(F) \xrightarrow{i_*} \text{CH}_k(X) \xrightarrow{j^*} \text{CH}_k(U) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. On remarque tout d'abord que $j^* \circ i_* = 0$. En effet un cycle supporter par F ne rencontre pas U . Pour $Z \subset U$, l'adhérence de Zariski \bar{Z} de Z dans X vérifie alors $j^*([\bar{Z}]) = [Z]$. On en déduit la surjectivité de j^* .

Il reste à vérifier l'exactitude à gauche. Soit $Z \in \mathcal{Z}_k(X)$ tel que $j^*(Z) \in \mathcal{Z}_k(X)_{\text{rat}}$, $Z \cap U$ s'écrit alors :

$$Z \cap U = \sum_i n_i \mathbb{P}_{i,*}[\text{div}(\varphi_i)] \quad \text{avec } \varphi_i \in k(\widetilde{W}_i)$$

W_i étant un sous schéma fermé de U , \widetilde{W}_i son normalisé et $p_i : \widetilde{W}_i \rightarrow W_i$. On note \overline{W}_i l'adhérence de W_i dans X . Comme $k(\widetilde{W}_i) = k(\overline{W}_i)$, on écrira encore $p_i : \widetilde{W}_i \rightarrow \overline{W}_i$, ce qui donne :

$$Z - \sum_i n_i p_{i,*}[\text{div}(\varphi_i)] \in \mathcal{Z}(F).$$

et Z est donc bien rationnellement équivalent à un cycle de F . □

Remarque 2.2.6. L'exactitude à gauche de la suite peut-être complétée par les groupes de Chow supérieurs (Cf. section 2.3.1).

2.2.2 Fibrés vectoriels et projectifs

S'appuyant sur le corollaire 2.2.2, on obtient en dimension supérieure les résultats suivants : principe de scindage pour les fibrés vectoriels et isomorphismes entre les groupes de Chow de fibrés et leur base.

2.2.2.1 Principe de scindage

Le *principe de scindage* est un résultat essentiel duquel découlent de nombreuses propriétés des groupes de Chow et des classes de Chern.

Proposition 2.2.7. *Principe de scindage Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel de rang r . Il existe alors un morphisme plat $p : Y \rightarrow X$ tel que l'on ait ,*

$$\begin{array}{ccc} p^*E & \xrightarrow{p_E} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[p]{\cong} & X \end{array}$$

$$\text{CH}_\bullet(X) \xleftarrow{p^*} \text{CH}_\bullet(Y)$$

*p^*E admettant de plus une filtration dont les quotients successifs sont inversibles.*

Démonstration. On construit pas à pas le schéma Y et le morphisme p en raisonnant par récurrence sur la dimension du fibré.

Si E est de rang 1, c'est immédiat. Sinon considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Grâce au lemme 2.2.10 ci-dessous, on a bien l'injection $f^* : \mathrm{CH}_\bullet(X) \hookrightarrow \mathrm{CH}_\bullet(\mathbb{P}(E))$. De plus f^*E contient le fibré en droite tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $E_1 = f^*E/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \rightarrow \mathbb{P}(E)$, on obtient $Y \xrightarrow{q} \mathbb{P}(E)$ tel que q^* soit une injection et q^*E_1 soit filtré par des fibrés dont les quotients successifs sont inversibles. Le morphisme $p = q \circ f : Y \rightarrow X$ répond alors au problème. \square

Le principe de scindage permet de vérifier une relation sur les classes de Chern dès lors qu'elle passe à l'image réciproque et qu'elle reste vraie par filtration de quotients successifs de rang un .

2.2.2.2 Fibrés projectifs

Le résultat essentiel de cette partie permet un contrôle des groupes de Chow d'un fibré projectif à l'aide de la base. Ce théorème est attendu dans toute théorie général d'invariants géométriques (homologie, cohomologie, etc.). Il permet de plus de maîtriser les groupes de Chow d'un blow up qui est une construction géométrique standard et incontournable. On retrouvera le même théorème dans la théorie motifs.

Théorème 2.2.8 (Fibrés projectifs). *Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ un fibré projectif de rang n (i.e. E est de rang n).*

On a alors quelque soit k un isomorphisme,

$$\begin{aligned} \bigoplus_{0 \leq l \leq n-1} h^l \pi^* : \bigoplus_{0 \leq l \leq n-1} \mathrm{CH}_{k-(n-1)+l}(X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_k(\mathbb{P}(E)) \\ (z_0, \dots, z_{n-1}) &\longmapsto \sum \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^l (\pi^* z_l) \end{aligned}$$

où $h^l = \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^l$ désigne la première classe de Chern itérée l fois (définie en 2.2.2).

Remarque 2.2.9. Il existe deux fibrés en droite naturels sur $\mathbb{P}(E)$. Le premier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ est le fibré tautologique, c'est à dire que la fibre en un point est la droite vectorielle représentée par ce point. Le second est son dual, le fibré canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$.

Nous ne démontrerons dans un premier temps que ce qui est nécessaire pour obtenir le principe de scindage.

Démonstration. L'injectivité découle simplement du lemme suivant. Pour plus d'explication, on consultera Fulton (1998)[théorème 3.3 et proposition 3.1] \square

Lemme 2.2.10. *Un fibré projectif $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ de rang n induit un morphisme injectif,*

$$\pi^* : \mathrm{CH}_k(X) \hookrightarrow \mathrm{CH}_{k+n-1}(\mathbb{P}(E))$$

Démonstration. Il, s'agit de trouver un inverse à gauche pour π^* . Comme la projection π est propre en plus d'être plate, on a une image directe π_* . Posant $\alpha_X = \pi_* \circ \text{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{n-1}$, il faut montrer que la composition suivante :

$$\text{CH}_k(X) \xrightarrow{\pi^*} \text{CH}_{k+n-1}(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{\text{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{n-1}} \text{CH}_k(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{\pi_*} \text{CH}_k(X)$$

est l'identité.

On se ramène au cas où $k = \dim(X)$ car $\text{CH}_k(X)$ est engendré par les $\text{CH}_k(Z)$ avec $Z \xrightarrow{i} X$. En effet un changement de base propre donne la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} i^*(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{\tilde{i}} & \mathbb{P}(E) \\ \pi_Z \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Z & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

La proposition 3.1 de Fulton (1998) assure alors que $\alpha_X \circ i_* = i_* \circ \alpha_Z$ et $\pi_X^* \circ i_* = \tilde{i}_* \circ \pi_Z^*$.

Dans le cas où $k = \dim(X)$, on a,

$$\alpha_X \circ \pi^*([X]) = \pi_*(\text{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^l([\mathbb{P}(E)])) = m[X]$$

il s'agit alors de vérifier que $m = 1$. Un changement de base plat (Cf. Fulton (1998)) et la localisation permettent de se ramener à un ouvert de trivialisations de E . Dans ce cas, $\mathbb{P}(E) = X \times \mathbb{P}^{n-1}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ admet une section dont les zéros sont $X \times \mathbb{P}^{n-2}$. La définition de la classe de Chern donne alors

$$\text{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))([X \times \mathbb{P}^{n-1}]) = [X \times \mathbb{P}^{n-2}].$$

En itérant $n - 1$ fois, on remarque que $m = 1$. □

Remarque 2.2.11. Ce résultat permet de définir les groupes de Chow d'un blow-up le long d'une variété (Cf. la section suivante pour des rappels et les résultats essentiels sur les blow up et les cônes normaux). On consultera Fulton (1998) pour plus d'informations.

Remarque 2.2.12. Il permet d'autre part de fournir une formule explicite du morphisme 2.2.15. Utilisant des résultats supplémentaires sur les classes de Chern supérieures et leur relation avec le cône normal, il en découle une approche plus constructive du théorème 2.2.27 sur l'intersection.

2.2.2.3 Fibrés vectoriels

L'isomorphisme au niveau des groupes de Chow entre une fibration et sa base nous permettra de définir les *morphismes de Gysin* en toute généralité une fois obtenus les résultats sur la déformation du cône normale de la section suivante. C'est d'autre part une généralisation naturel de la \mathbb{A}^1 -homotopie.

Théorème 2.2.13 (Fibrés vectoriels). *Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré de rang n . Quelque soit k on a un isomorphisme :*

$$\pi^* : \text{CH}_k(X) \xrightarrow{\sim} \text{CH}_{k+n}(E)$$

Démonstration. La démonstration du théorème 2.2.13 se fait en deux temps, l'injectivité découlant de la propriété d'invariance par homotopie 2.2.4 et du principe de scindage 2.2.7, la surjectivité provenant de la propriété de localisation 2.2.5. La surjectivité sera démontré au lemme 2.2.14.

L'injectivité est clair si E est de rang 1 (c'est après localisation, la \mathbb{A}^1 -homotopie). Sinon on utilise le principe de scindage 2.2.7 pour obtenir les diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccc} p^*E & \longrightarrow & E \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{CH}_k(X) & \xrightarrow{p^*} & \mathrm{CH}_k(Y) \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \tilde{p}^* \\ \mathrm{CH}_{k+n}(E) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_{k+n}(p^*E). \end{array}$$

avec p^*E qui admet une filtration tel que les gradués soit des fibrés vectoriel de rang 1 successif. Par dévissage, on en déduit que \tilde{p}^* est injectif. L'injectivité de \tilde{p}^* assure alors l'injectivité de π^* . \square

Lemme 2.2.14 (surjectivité). *Une fibration vectorielle $\pi : E \rightarrow X$ de rang r induit un morphisme surjectif au niveau des groupes de Chow,*

$$\pi^* : \mathrm{CH}_k(X) \twoheadrightarrow \mathrm{CH}_{k+n}(E)$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $\dim(X)$. Si X est un point, une itération de la \mathbb{A}^1 -homotopie nous donne le résultat.

Soit X de dimension $d > 0$ et $U \hookrightarrow X$ un ouvert de trivialisaton de E et $Z \hookrightarrow X$ le fermé complémentaire. La localisation 2.2.5 fournit alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{CH}_k(Z) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_k(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_k(U) & \longrightarrow & 0 \\ \text{h.r.} \downarrow \pi|_Z^* & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi|_U^* & & \\ \mathrm{CH}_{k+n}(E|_Z) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_{k+n}(E) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_{k+n}(E|_U) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Il s'agit de montrer que $\pi|_U^*$ est un isomorphisme, une chasse au diagramme simple donne alors le résultat voulu.

Le fait que $\pi|_U^*$ soit un isomorphisme découle d'une itération de la \mathbb{A}^1 -homotopie, en effet

$$E|_U \simeq U \times \mathbb{A}^n = (U \times \mathbb{A}^{n-1}) \times \mathbb{A}^1.$$

\square

Remarquons que ce lemme permet aussi d'obtenir la surjectivité de l'isomorphisme θ_E dans le théorème 2.2.8.

Démonstration de la surjectivité dans le théorème 2.2.8. En effet, soit $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ le fibré projectif associé à E , une récurrence sur la dimension de X permet comme précédemment de se ramener au cas où E est trivial. On raisonne alors par récurrence sur la dimension de E . On note $F = E \oplus 1$, et supposons que θ_E est surjectif. Montrons que θ_F l'est aussi. En identifiant $\mathbb{P}(E)$ avec l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}(E \oplus 1)$ la suite de localisation donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CH}_k(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{CH}_k(\mathbb{P}(E \oplus 1)) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{CH}_k(E) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow q^* & \nearrow \pi^* & \\ & & \mathrm{CH}_{k-n}(X) & & \end{array}$$

Considérons maintenant $\beta \in \mathrm{CH}_k(\mathbb{P}(E \oplus 1))$. Si $\alpha \in \mathrm{CH}_{k-n}(X)$ tel que $j^*\beta = \pi^*\alpha$, la différence $\beta - q^*\alpha$ s'écrit alors $i_*(\delta)$ pour un certain $\delta \in \mathrm{CH}_k(\mathbb{P}(E))$. Il ne reste plus qu'à utiliser l'hypothèse de récurrence et le résultat suivant (Cf. Fulton (1998)[lemme 3.3]) :

Pour $\alpha \in \text{CH}_\bullet(X)$, on a :

$$\text{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E \oplus 1)}(1))(q^* \alpha) = i_* p^* \alpha$$

p étant la projection $\mathbb{P}(E) \rightarrow X$. □

On obtient en corollaire du théorème 2.2.13,

Corollaire 2.2.15. *Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel. Si $s : X \rightarrow E$ dénote la section nulle alors il existe un morphisme de Gysin s^* qui est l'inverse de π^* :*

$$\begin{aligned} s^* : \text{CH}_k(E) &\rightarrow \text{CH}_{k-r}(X) \\ \alpha &\mapsto (\pi^*)^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

2.2.3 Intersection en général

Il s'agit ici de munir CH_* d'une structure d'anneau gradué en construisant une intersection au niveau des groupes de Chow,

$$\begin{aligned} \text{CH}_k(X) \times \text{CH}_l(X) &\rightarrow \text{CH}_{k+l-\dim(X)}(X) \\ (Z, Z') &\mapsto Z.Z' \end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut supposer Z lisse par la suite.

Effectivement, notant $\Delta \subset X \times X$ la diagonale, alors

$$Z \cap Z' = (Z \times Z') \cap \Delta \subset \Delta$$

avec $\Delta \simeq X$ lisse.

On définit ainsi,

$$Z.Z' = (Z \times Z').\Delta \in \text{CH}_{k+l-\dim(X)}(Z \cap Z')$$

Remarque 2.2.16. On a défini l'intersection $Z.Z'$ au niveau de $\text{CH}_{k+l-\dim(X)}(|Z| \cap |Z'|)$.

2.2.3.1 Éclatement et cône normal

Commençons par quelques rappels sur ces objets algébriques.

Définition 2.2.17 (Éclatement). Soit un schéma Y et $X \hookrightarrow Y$ un sous-schéma fermé de faisceau d'idéaux \mathcal{I} . On définit alors l'éclatement de Y le long de X par,

$$\text{Bl}_X Y = \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n\right).$$

L'éclatement le long d'un sous-schéma répond au problème universel suivant,

Proposition 2.2.18. *Soit $X \hookrightarrow Y$ un sous schéma fermé de Y . Alors il existe un schéma \tilde{Y} et un morphisme propre $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ tel que*

1. le diviseur exceptionnel $E = \pi^{-1}(X)$ est un diviseur de Cartier de \tilde{Y} ,
2. il existe un isomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel, la situation étant résumée dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E \hookrightarrow & \tilde{Y} & \longleftarrow & \tilde{Y} \setminus E & \\ \downarrow & \downarrow \pi & & \downarrow \wr \pi|_{\tilde{Y} \setminus E} & \\ X \hookrightarrow & Y & \longleftarrow & Y \setminus X & \end{array}$$

Remarquons que si Y est une variété, alors \tilde{Y} est encore variété.

On pourra consulter le *chapitre II.7* de Hartshorne (1977) pour plus de détails ainsi qu'une explication géométrique, l'éclatement étant alors donné par des équations.

Exemple 2.2.19. L'éclatement d'une variété affine X au dessus d'un point donné en coordonnée par $x_1 = \dots = x_n = 0$ est la sous variété de $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ définie par les equations $x_i X_j = x_j X_i$, les coordonnées sur \mathbb{P}^{n-1} étant $[X_1, \dots, X_n]$.

Définition 2.2.20 (Cône normal). Soit X un sous-schéma fermé de Y , de faisceau d'idéaux \mathcal{I} . On définit alors le cône normal à Y en X ,

$$C_X Y = \text{Spec}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}\right).$$

La propriété suivante nous sera utile afin de définir l'intersection en toute généralité,

Proposition 2.2.21. Soit $X \rightarrow Y$ sous-schéma fermé et $f : Y' \rightarrow Y$ morphisme.

Notant $X' = f^{-1}(X)$ et $g : X' \rightarrow X$ le morphisme induit, la situation au niveau des cônes est la suivante,

$$C_{X'} Y' \subset g^* C_X Y = C_X Y \times X'$$

Remarque 2.2.22. Lorsque le plongement $X \hookrightarrow Y$ est lisse de dimension d , alors $C_X Y$ est un fibré vectoriel de rang d , nommé *fibré normal* et noté $N_X Y$.

Remarque 2.2.23. Lorsque $X \rightarrow Y$ est lisse, le diviseur exceptionnel de $\text{Bl}_X Y$ n'est rien d'autre que le fibré projectif associé au fibré normal.

2.2.3.2 Déformation au cône normal

Considérant X un sous-schéma fermé de Y , on construit ici une famille paramétrée en t d'immersion $X \hookrightarrow Y_t$, telle que pour $t = 0$ (resp. $t = \infty$) le plongement soit l'immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ (resp. l'immersion de X dans le cône normal $C_X Y$).

On cherche à obtenir,

Proposition 2.2.24. Soit $X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée.

Alors, il existe une variété M^0 tel que le diagramme suivant commute, et qui vérifie les propriétés de droite,

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{i} & M^0 \\ & \searrow \pi & \downarrow \rho \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(\{0\}) &= Y \times \mathbb{A}^1 \\ \rho^{-1}(\{\infty\}) &= C_X Y \end{aligned}$$

Idée de la preuve. La première étape consiste à construire un schéma M tel que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow \pi & \downarrow \rho \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

où ρ est un morphisme plat et tel que les propriétés suivantes soient vérifiées,

1. Au dessus de $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{A}^1$, on a $\rho^{-1}(\mathbb{A}^1) = Y \times \mathbb{A}^1$ et l'immersion i devient,

$$X \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^1$$

2. La fibre au dessus de l'infini $M_\infty = \rho^{-1}(\{\infty\})$ est la somme de deux diviseurs de Cartier,

$$M_\infty = \text{Proj}(C_X Y \oplus 1) + \tilde{Y}$$

On vérifie dans un premier temps que l'éclatement de $Y \times \mathbb{P}^1$ le long de $X \times \{\infty\}$ convient pour M , puis que $M^0 = M \setminus \tilde{Y}$ fournit la déformation souhaitée. □

2.2.3.3 Intersection et morphismes de Gysin

Considérant la situation de référence ci-contre où l'on part d'un morphisme régulier et d'un morphisme f .

Commençons par expliquer comment la construction des morphismes de Gysin permet d'obtenir une intersection $X.V$ dans $\text{CH}_{k-d}(W)$

$$\begin{array}{ccc}
 W = f^{-1}(X) & \dashrightarrow & V \\
 \downarrow g| & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{\text{régulier codim. } d} & Y
 \end{array}$$

Supposons dans un premier temps que toutes les composantes irréductibles de V ont même dimension.

Utilisant les propriétés du cône normal, on travaille en fait dans ce dernier au lieu de W .

Effectivement, $\pi : g^* N_X Y \rightarrow W$ est un fibré vectoriel de rang d selon la remarque 2.2.22 et selon la propriété 2.2.21 le cône normal $C_W V$ est un sous-cône de $N_X Y$ au dessus de W .

Utilisant le morphisme de Gysin défini dans le corollaire 2.2.15,

$$\begin{array}{ccc}
 C_W V & \hookrightarrow & N_X Y \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & W
 \end{array}$$

$$s^* : \text{CH}(N_X Y) \rightarrow \text{CH}_{k-d}(W)$$

on définit alors l'intersection dans $\text{CH}_{k-d}(W)$ par,

$$X.V = s^*[C_W V]$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les morphismes de Gysin dans le cas de morphismes réguliers.

Spécialisations D'après ce qui précède, on peut définir,

Définition 2.2.25 (Spécialisation au cône normal). Soit X sous-schéma de Y et $C_X Y$ le cône normal associé.

On définit le morphisme de spécialisation

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma : \mathcal{Z}_k(Y) & \rightarrow & \mathcal{Z}_k(C_X Y) \\
 [V] & \mapsto & [C_{V \cap X} V]
 \end{array}$$

Il s'agit de montrer que σ passe à l'équivalence rationnelle,

Proposition 2.2.26. Soit $\alpha \in \mathcal{Z}_k(X)$ un cycle rationnellement équivalent à 0. Alors son spécialisé $\sigma(\alpha)$ est rationnellement équivalent à 0.

Esquisse de preuve. Considérant le cône normal $C = C_X Y$ et l'espace M^0 construits précédemment, on applique la propriété de localisation 2.2.5 à la situation $C \hookrightarrow M^0 \leftarrow Y \times \mathbb{A}^1$.

$C_X Y$ étant un diviseur de cartier dans M^0 , en utilisant le résultats 2.2.2 obtenu pour les diviseurs de Cartier, la preuve se résume alors au diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CH}_{k+1}(C) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{CH}_{k+1}(M^0) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{CH}_{k+1}(Y \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow i^* & & \uparrow \pi^* & & \\ & & \mathrm{CH}_k(C) & \longleftarrow & \mathrm{CH}_k(Y) & & \end{array}$$

où l'on peut vérifier que le morphisme obtenu correspond bien au morphisme de spécialisation défini précédemment. \square

On en déduit ainsi,

Théorème 2.2.27. *Soit $i : X \hookrightarrow Y$ morphisme régulier de codimension d .*

Il induit alors au niveau des groupes de Chow,

$$i^* : \mathrm{CH}_k(Y) \rightarrow \mathrm{CH}_{k-d}(X)$$

Effectivement, on définit $i^* = s^* \circ \sigma$,

$$\mathrm{CH}_k(Y) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{CH}_k(N_X Y) \xrightarrow{s^*} \mathrm{CH}_{k-d}(X)$$

où s^* est le morphisme obtenu dans le corollaire 2.2.15.

Remarque 2.2.28. Utilisant le théorème 2.2.8 ainsi que des résultats complémentaires sur les classes de Chern et le cône normal, on peut donner une définition explicite du morphisme précédent.

2.2.3.4 En guise de conclusion

Considérons maintenant la configuration de référence et supposant le morphisme f quelconque, sans hypothèse sur la dimension des composantes irréductibles de V .

En utilisant ce qui précède et en procédant de manière similaire par composition, on peut définir un morphisme,

$$i^! : \mathcal{Z}_k(V) \rightarrow \mathrm{CH}_{k-d}(W)$$

Le résultat suivant est alors immédiat,

Proposition 2.2.29. *Le morphisme précédent passe à l'équivalence rationnelle et définit un morphisme de Gysin raffiné,*

$$i^! : \mathrm{CH}_k(V) \rightarrow \mathrm{CH}_{k-d}(W)$$

Remarque 2.2.30. De la même façon on définit des morphismes de Gysin, et donc une intersection, dans le cas de morphismes f localement intersection complète.

2.2.4 Un aperçu de K-théorie

Après les définitions usuelles, on rappelle ici le lien entre le *groupe de Grothendieck* de la K-théorie et le *groupe de Chow*.

2.2.4.1 Classes et caractère de Chern

Commençons par quelques rappels de K théorie.

Classes de Chern Dans le cas des diviseurs de Cartier, *i.e.* des fibrés en droite, on a défini la première classe de Chern c_1 ,

$$c_1(D).(-) : \text{CH}_k(X) \rightarrow \text{CH}_{k-1}(X).$$

On peut vérifier que l'opérateur c_1 vérifie les propriétés 2.2.33, ce qui nous permet de considérer des opérateurs polynomiaux en c_1 .

Ces propriétés nous permettront de construire des opérateurs classes de Chern sur des fibrés vectoriels de rang r quelconque.

Nous commençons par construire des opérateurs de classes de Segre, polynomiaux en la première classe de Chern, duquel nous déduisons les classes de Chern par inversion symbolique.

Définition 2.2.31 (Classes de Segre). Soit E un fibré vectoriel sur X de rang r .

Considérant le fibré projectif $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$, on définit les classes de Segre,

$$\begin{aligned} s_i(E) \cap - : \text{CH}_k(X) &\rightarrow \text{CH}_{k-i}(X) \\ \alpha &\mapsto \pi_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap \pi^*\alpha) \end{aligned}$$

Comme $c_1(-)^l$ est nul pour l assez grand ², la définition suivante est légitime.

Définition 2.2.32 (Classes de Chern). On note $c_i(E)$ la i -ème classe de Chern, obtenue comme i ème coefficient dans l'inversion formelle du polynôme de Segre,

$$(1 + s_1(E)t + s_2(E)t^2 + \dots)^{-1}$$

Proposition 2.2.33. *Les classes de Chern vérifient les propriétés suivantes,*

1. Annulation. *Pour tout fibré E au dessus de X et $i > \text{rg}(E)$ on a :*

$$c_i(E) = 0$$

2. Commutativité. *Pour tout fibrés E, F sur X et pour tout couple d'indice (i, j) , on a :*

$$\forall \alpha \in \text{CH}_\bullet(X) \quad c_i(E) \cap (c_j(F) \cap \alpha) = c_j(F) \cap (c_i(E) \cap \alpha)$$

3. Formule de projection. *Soit E un fibré et $f : X' \rightarrow X$ un morphisme propre. Alors, pour tout cycle α de X' et pour tout i :*

$$f_*(c_i(f^*E) \cap \alpha) = c_i(E) \cap f_*(\alpha)$$

4. Image réciproque. *Soit E un fibré sur X et $f : X' \rightarrow X$ un morphisme plat. Alors pour tout indice i et pour tout cycle α sur X :*

$$c_i(f^*E) \cap f^*\alpha = f^*(c_i(E) \cap \alpha)$$

²et que l'on peut montrer directement que $c_1(-)$ vérifie les propriétés de la proposition 2.2.33– je ne suis pas sûr que l'on est besoin de tout

5. Somme de Whitney *Toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

de fibré sur X induit la décomposition suivante pour tout indice k :

$$c_k(E) = \sum_{i+j=k} c_i(E')c_j(E'')$$

6. Normalisation : Si E est un fibré en droite et D est un diviseur de Cartier sur X tel que $\mathcal{O}_X(D) \simeq E$ alors :

$$c_1(E) \cap [X] = [D]$$

Il y a cependant une construction des classes de chern moins formelle dans le cas où X est lisse que nous décrivons ici. Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel de rang $n + 1$ sur X , notons

$$\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cap [\mathbb{P}(E)] \in \text{CH}_{n-1}$$

et ξ^l l'intersection de ξ l fois avec lui même ce qui s'écrit encore :

$$\xi^l = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cap \cdots \cap c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cap [\mathbb{P}(E)].$$

Remarquant que $\text{CH}_\bullet(\mathbb{P}(E))$ est un $\text{CH}_\bullet(X)$ -module libre de base $(1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^n)$, il existe des coefficient $c_1(E), c_2(E), \dots, c_n(E)$ tel que :

$$\xi^{n+1} + \sum_{i=0}^n (-1)^i \xi^{n-i} \pi^*(c_i(E))$$

Cette définition est bien cohérente avec celle donnée précédemment.

Caractère de Chern Considérant la propriété de scindage 2.2.7, on peut décomposer une fibration vectorielle en une filtration F_i telle que les quotients successifs $L_i = F_i/F_{i-1}$ soient inversibles.

Considérant le polynôme de Chern $c_t(E) = \sum c_i(E)t^i$, on obtient la relation,

$$c_t(E) = \prod_k (1 + c_1(L_k)t)$$

Les classe de Chern apparaissent ainsi comme les fonctions symétriques élémentaires des $\alpha_i = c_1(L_i)$, et l'on pose,

Définition 2.2.34 (Caractère de Chern). Soit E fibré vectoriel de rang r .

On définit formellement,

$$ch(E) = \sum_{i=0}^r e^{\alpha_i}$$

Comme tout polynôme symétrique en les α_i s'exprime comme polynôme à coefficient dans les classes de Chern, on obtient

Proposition 2.2.35. Soit $K_0(X)$ le groupe de Grothendieck qui classifie les fibrations modulo extension.

Notant $\text{CH}^*(X) = \bigoplus \text{CH}^k(X)$, on définit,

$$\begin{aligned} ch : K_0(X) &\rightarrow \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} \\ [E] &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sigma_i(c_1(E); \dots; c_i(E)) \end{aligned}$$

Où les σ_i sont obtenus par les relations de Newton.

Remarque 2.2.36. Parler de l'approche par le scindage qui permet d'obtenir les classes de Chern pour X non-lisse.

2.2.4.2 Théorème fondamental

Le théorème, dont on trouvera un analogue dans les groupes de Chow supérieurs, est le suivant,

Théorème 2.2.37 (Grothendieck). ³ *Soit X variété lisse quasi-projective.*

Alors le caractère de Chern réalise un isomorphisme à coefficients rationnels,

$$ch : K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} CH^*(X) \otimes \mathbb{Q}$$

2.3 Groupes de Chow supérieurs

2.3.1 Définitions

Dans cette partie, on utilisera la formulation 2.1.6 de l'équivalence rationnelle.

Dans ce cadre, considérons le sous-groupe $z_n(X \times \mathbb{A}^1) \subset \mathcal{Z}_n(X \times \mathbb{A}^1)$ constitué des cycles de dimension n intersectant proprement $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$.

Notant i_0 et i_1 les injections naturelles $i_j : X \times \{j\} \hookrightarrow X \times \mathbb{A}^1$, on a alors un opérateur bord $\delta_0 = i_1 - i_0$ qui induit,

$$z_{n+1}(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{\delta_0} Z_n(X) \longrightarrow CH_n(X) \longrightarrow 0$$

Suivant l'approche originelle de *Spencer Bloch* Bloch (1986), il s'agit de généraliser cette configuration en dimension supérieure.

2.3.1.1 Complexe de Bloch

Rappelons quelques définitions sur les schémas cosimpliciaux.

Définition 2.3.1 (catégorie simpliciale). Une catégorie simpliciale Δ est constituée,

- d'objets $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$,
- de morphismes $[n] \rightarrow [m]$ applications préservant l'ordre.

Considérant des n -simplexes algébriques Δ^n ,

$$\Delta^n = \text{Spec}([k[t_1, \dots, t_n]/(\sum t_j - 1))$$

À un simplexe $[n]$ on associe naturellement $\text{Spec}(k[t_1, \dots, t_n]/(\sum t_{i_j} - 1 = 0))$, tandis qu'à une application g entre simplexes $g : [n] \rightarrow [m]$, on peut faire correspondre l'application entre simplexes algébriques définie par $g^* : t_i \rightarrow \sum_{j \in g^{-1}(i)} t_j$.

On obtient ainsi,

Définition 2.3.2 (schéma cosimplicial). Un schéma cosimplicial est un foncteur $\Delta_k^* : \Delta \rightarrow \text{Sch}_k$ de la catégorie simpliciale à valeur dans la catégorie des schémas.

C'est à partir de ces objets que se construisent les groupes de Chow supérieurs.

³Référence ?

2.3.1.2 Groupes de Chow supérieurs

Définition 2.3.3. Soit $X \in \text{Sch}_k$.

On définit $\mathcal{Z}_p(X; q) = z_{p+q}(X \times \Delta_k^p)$ sous-groupe des cycles algébriques de dimension $p + q$ coupant proprement les faces de $X \times \Delta_k^p$.

De manière équivalente, il s'agit du groupe libre engendré par les sous-variétés F vérifiant,

$$\begin{cases} \dim_k(W \cap (X \times F)) = q + \dim_k(F) \text{ ou} \\ W \cap (X \times F) = \emptyset \end{cases}$$

Le résultat essentiel est alors le suivant,

Lemme 2.3.4. Pour p fixé, $\mathcal{Z}_p(X, *)$ est un groupe simplicial.

De manière général, on peut associer un complexe à un groupe simplicial, dit *complexe de Bloch*, de dérivée $\sum (-1)^i \delta_i$.

Posons alors,

Définition 2.3.5. Pour q fixé, le p ième groupe de Chow est,

$$\text{CH}_p(X; q) = H_q(\mathcal{Z}_p(X, *))$$

2.3.2 Structure et propriétés

On vérifie ici que les propriétés obtenues dans la partie précédente se généralisent en dimensions supérieures.

2.3.2.1 Functorialité

Image directe Soit $f : Y \rightarrow X$ morphisme propre. On lui associe

$$f_* : \text{CH}_p(Y, n) \rightarrow \text{CH}_p(X, n)$$

Image réciproque Soit $f : Y \rightarrow X$ morphisme localement intersection complète de dimension d . On lui associe

$$f^* : \text{CH}_p(X, -) \rightarrow \text{CH}_{p+d}(Y, -)$$

2.3.2.2 Propriétés fondamentales

Invariance homotopique On pourra consulter Bloch (1986) pour une preuve du résultat suivant,

Proposition 2.3.6. La seconde projection $\pi : X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X$ induit un quasi-isomorphisme sur le complexe de Bloch,

$$\text{CH}_p(X, -) \xrightarrow{\sim} \text{CH}_p(X \times \mathbb{A}^1, -)$$

Localisation De même, l'article Bloch (1994) démontre la propriété de localisation,

Proposition 2.3.7. Soit une immersion fermée et son ouvert complémentaire, $W \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$.

Alors la suite,

$$z_p(X, *) \xrightarrow{i^*} z_p(X, *) \xrightarrow{j^*} z_{p+1}(W, *)$$

induit un quasi-isomorphisme,

$$z_p(W, *) \xrightarrow{\sim} \text{Cone}(z_p(X, *) \xrightarrow{j^*} z_p(U, *))$$

Mayer-Vietoris

Proposition 2.3.8. *Considérant $X = U \cup V$ ainsi que les applications restrictions naturelles. Alors la suite,*

$$z_p(X, *) \longrightarrow z_p(U, *) \oplus z_p(V, *) \longrightarrow z_p(U \cap V, *)$$

induit un quasi-isomorphisme,

$$z_p(X, *) \xrightarrow{\sim} \text{Cone}(z_p(U, *) \oplus z_p(V, *) \longrightarrow z_p(U \cap V, *))[-1]$$

ainsi que la suite exacte longue de Mayer-Vietoris usuelle.

2.3.3 Un peu de K-Théorie

Dans ce qui suit, on supposera $X \in \text{Sm}_k$ lisse.

Reprenant les notions de *fibré projectif* et de *classes de Chern* introduites respectivement dans les parties 2.2.2 et 2.2.4, on cherche à généraliser le *théorème de Grothendieck* 2.2.37.

2.3.3.1 Opérations d'Adams

On définit tout d'abord des *applications de Chern*,

$$c_{p,q} : K_{2q-p}(X) \rightarrow \text{CH}^q(X; 2p - q)$$

ainsi que des *caractères de Chern*,

$$ch_* : K_*(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bigoplus_{p,q} \text{CH}^p(X, q)_{\mathbb{Q}}$$

Considérant la k ème *opération d'Adams* ψ_k , on définit le sous-espace $K_n(X)^{(p)}$ de poids p ,

$$K_n(X)^{(p)} = \{x \in K_n(X)_{\mathbb{Q}} \mid \psi_k(x) = k^p \cdot x \text{ pour } p \geq 2\}$$

Le résultat suivant est l'analogue du théorème 2.2.37 pour les groupes de Chow supérieurs,

Théorème 2.3.9. *Soit $X \in \text{Sm}_k$ un schéma lisse.*

Alors, les caractères de Chern fournissent un isomorphisme,

$$K_n(X)^{(p)} \xrightarrow{\sim} \text{CH}^p(X, n)_{\mathbb{Q}}$$

On pourra consulter l'article Levine (1994) pour une démonstration.

2.3.3.2 K-théorie de Milnor

Applicant le théorème précédent à un corps \mathbb{F} , on obtient en particulier,

$$K_n(\mathbb{F})^{(n)} \simeq \text{Ch}^n(\mathbb{F}, n)$$

et reliant la K-théorie de Quillen avec la K-théorie de Milnor,

Théorème 2.3.10 (Nostorenko-Suslin Totaro (1992)). *Soit \mathbb{F} un corps. Notant K^M la K-théorie de Milnor, il existe un isomorphisme naturel,*

$$\text{CH}^n(\text{Spec}(\mathbb{F}), n) \xrightarrow{\sim} K_n^M(\mathbb{F})$$

On pourra consulter la *lecture 5* de Mazza *et al.* (2006) pour une démonstration.

Annexe A

Rappels divers

A.1 Complétion Karoubienne

Définition A.1.1. Soit \mathcal{A} une catégorie additive. On dit que \mathcal{A} est Karoubi complète si pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\forall e \in \mathcal{A}(A, A) \text{ tel que } e^2 = e \quad A = \ker(e) \oplus \text{im}(e).$$

Proposition A.1.2. Soit \mathcal{A} une catégorie additive. Soit \mathcal{A}^K la catégorie ayant pour objets les couples (A, e) avec $A \in \mathcal{A}$ et $e \in \mathcal{A}(A, A)$ un idempotent et pour morphismes $(A, e) \rightarrow (B, f)$ les morphismes $\phi \in \mathcal{A}(A, B)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ e \downarrow & \searrow \phi & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{\phi} & B. \end{array}$$

La catégorie \mathcal{A}^K contient \mathcal{A} comme sous-catégorie pleine ($A \mapsto (A, \text{id})$), est additive, Karoubi complète et universelle en ce sens que tout foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}$ s'étend en un foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{A}^K \rightarrow \mathcal{K}$.

Théorème A.1.3. Si \mathcal{A} est triangulée alors \mathcal{A}^K admet une unique structure triangulée prolongeant celle de \mathcal{A} .

Si \mathcal{A} est une DG-catégorie, \mathcal{A}^K admet une unique structure de DG-catégorie prologant celle de \mathcal{A} ¹.

¹à vérifier Cf. notes p. 14

Bibliographie

- Luchezar AVRAMOV et Stephen HALPERIN : Through the looking glass : a dictionary between rational homotopy theory and local algebra, algebra. *In algebraic topology and their interactions (Stockholm, 1983)*, volume 1183 de *Lecture Notes in Math.*, pages 1–27. Springer, 1986.
- A. BEILINSON et V. VOLOGODSKY : A guide to voevodsky's motives, 2006. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0604004>.
- Spencer BLOCH : Algebraic cycles and higher K -theory. *Adv. in Math.*, 61(3):267–304, 1986. ISSN 0001-8708.
- Spencer BLOCH : The moving lemma for higher Chow groups. *J. Algebraic Geom.*, 3(3):537–568, 1994. ISSN 1056-3911.
- William FULTON : *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, volume 54 de *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1984. ISBN 0-8218-0704-8.
- William FULTON : *Intersection theory*, volume 2 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 1998. ISBN 3-540-62046-X; 0-387-98549-2.
- P. GABRIEL et M. ZISMAN : *Calculus of fractions and homotopy theory. (Kategorii chastnykh i teoriya gomotopij.) Übersetzung aus dem Englischen von M. M. Postnikov.* Moskau : Verlag "Mir". 295 S. R. 1.50 , 1971.
- Alexandre GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967. ISSN 0073-8301.
- Robin HARTSHORNE : *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. *Lecture Notes in Mathematics*, No. 20. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- Robin HARTSHORNE : *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. ISBN 0-387-90244-9. *Graduate Texts in Mathematics*, No. 52.
- Luc ILLUSIE : Catégories dérivées et dualité : travaux de J.-L. Verdier. *Enseign. Math. (2)*, 36 (3-4):369–391, 1990. ISSN 0013-8584.
- Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA : *Sheaves on manifolds*, volume 292 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. ISBN 3-540-51861-4. With a chapter in French by Christian Houzel.

- B. KELLER : Derived categories and their uses. *In Handbook of Algebra*, volume 1, pages 671–701. Springer, 1996.
- Bernhard KELLER : On differential graded categories, 2006. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0601185>.
- Henning KRAUSE : A Brown representability theorem via coherent functors. *Topology*, 41(4):853–861, 2002. ISSN 0040-9383.
- Henning KRAUSE : Derived categories, resolutions, and brown representability, 2005. URL <http://arxiv.org/abs/math/0511047>.
- Marc LEVINE : Bloch’s higher Chow groups revisited. *Astérisque*, (226):10, 235–320, 1994. ISSN 0303-1179. *K*-theory (Strasbourg, 1992).
- Carlo MAZZA, Vladimir VOEVODSKY et Charles WEIBEL : *Lecture notes on motivic cohomology*, volume 2 de *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. ISBN 978-0-8218-3847-1 ; 0-8218-3847-4.
- Amnon NEEMAN : The Grothendieck duality theorem via Bousfield’s techniques and Brown representability. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):205–236, 1996. ISSN 0894-0347.
- Daniel QUILLEN : Higher algebraic *K*-theory. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 1, pages 171–176. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.
- Jean-Pierre SERRE : *Algèbre locale. Multiplicités*, volume 11 de *Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- Burt TOTARO : Milnor *K*-theory is the simplest part of algebraic *K*-theory. *K-Theory*, 6(2):177–189, 1992. ISSN 0920-3036.
- Vladimir VOEVODSKY : Triangulated categories of motives over a field. *In Cycles, transfers, and motivic homology theories*, volume 143 de *Ann. of Math. Stud.*, pages 188–238. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.