

Université Paris 7 Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Master 2^{ème} année : MI Mathématiques fondamentales :
Rapport de stage

Formes différentielles sur l'espace de modules de courbes en genre 0

Ismaël SOUDÈRES
<ismaels.sou@free.fr>

Ce mémoire sera soutenu le lundi 22 novembre 2004.
Le jury est constitué de :

Leïla SCHNEPS (directrice)
Pierre LOCHAK (directeur)
Pierre CARTIER

Paris, 2 novembre 2004

Table des matières

1	Géométrie des espaces de modules en genre 0	4
1.1	Intérieur et bord	4
1.1.1	Définition des espaces de modules	4
1.1.2	Description combinatoire des strates du bord	5
1.1.3	Fonctions et différentielles	7
1.2	Points réels de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$	8
1.3	$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$	10
1.3.1	Rappel sur les éclatements	10
1.3.2	La projection $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$	11
2	Espace des différentielles de $\mathcal{M}_{0,n}$	13
2.1	Différentielles et cohomologie	13
2.2	La démarche de E. Getzler à partir d'un résultat de V. T. Arnol'd	14
2.2.1	L'anneau de cohomologie de l'espace de configuration du plan	14
2.2.2	Le travail de E. Getzler	16
2.3	Cas de l'espace de configuration de \mathbb{P}^1 moins trois points : un autre calcul de la cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n}$	16
2.3.1	Quelques explications	16
2.3.2	Le cas de \mathbb{P}^1 moins trois points	17
2.4	Étude des diviseurs des pôles des formes différentielles logarithmiques sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$	20
2.4.1	L'exemple le plus simple : $\zeta(2)$	20
2.4.2	Bord et diviseur : un critère de convergence	22
3	Multi-zeta, algèbre MZV et battages	30
3.1	Définitions	30
3.2	Intégrales itérées et multi-zeta	31
3.3	Battages	33
3.4	Régularisations	35
4	Multi-zeta sur $\mathcal{M}_{0,n}$: études	37
4.1	Conjecture sur les périodes de $\mathcal{M}_{0,n}$	37
4.1.1	Énoncé	37
4.1.2	Le cas connu : $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$	37

4.2	Nouveaux exemples où la conjecture est vraie	39
4.2.1	Le premier exemple non-trivial	39
4.2.2	Cas $n + 3 = 4, 5, 6$	42
4.2.3	Quelques remarques sur les cas $n = 7$	47

Chapitre 1

Géométrie des espaces de modules en genre 0

1.1 Intérieur et bord

1.1.1 Définition des espaces de modules

On présente ici l'aspect analytique de la construction des espaces de modules. C'est délibérément que nous ne parlerons pas de l'aspect métrique (à partir du demi-plan de Poincaré) ou de l'aspect algébrique (à partir des groupes Fuchsien). Ce dernier versant ne sera pas utile par la suite.

On commence par se donner une surface topologique S (avec une structure analytique) de genre g et un ensemble P de n points marqués sur $S : \{p_1, \dots, p_n\}$. Le couple (S, P) définit une surface de type (g, n) . Les points marqués peuvent être considérés comme enlevés. Changer ce couple de référence par un autre couple (S', P') induit un isomorphisme non canonique dans la construction. On se limite ici au cas où la caractéristique d'Euler-Poincaré donnée par $\chi(S \setminus P) = 2 - 2g - n$ est strictement négative (la surface est supposée hyperbolique).

On suppose de plus que S est en fait une surface de Riemann. Une façon de spécifier une surface de Riemann $(\widehat{X}, P_{\widehat{X}})$ de type (g, n) est de donner un difféomorphisme (analytique) $\Phi : S \rightarrow \widehat{X}$ tel que $\phi(P) = p_{\widehat{X}}$. On parle alors de *surface marquée*. Si l'on se donne deux surfaces de Riemann de type (g, n) $(\widehat{X}, P_{\widehat{X}}), (\widehat{X}', P_{\widehat{X}'})$, ainsi que leurs "marquages" Φ et Φ' , on dira qu'un isomorphisme analytique α respecte le marquage si on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (S, P) & \xrightarrow{\Phi} & (\widehat{X}, P_{\widehat{X}}) \\ h \downarrow & & \downarrow \alpha \\ (S, P) & \xrightarrow{\Phi'} & (\widehat{X}', P_{\widehat{X}'}) \end{array}$$

où h est un difféomorphisme isotope à l'identité dans $S \setminus P$.

Définition 1.1.1. L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S, P)$, ou $\mathcal{T}_{g,n}$, est l'ensemble des classes d'équivalence des surfaces de Riemann marquées de type (g, n) modulo les isomorphismes respectant

le marquage.

L'espace de modules peut être obtenu à partir de l'espace de Teichmüller en oubliant la notion de marquage ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.1.2. L'espace de modules de courbes de genre g avec n points marqués $\mathcal{M}_{g,n}$ est l'ensemble des surfaces de Riemann de type (g, n) modulo les isomorphismes.

L'espace de modules est en fait le quotient de l'espace de Teichmüller par l'action du groupe discret $\Gamma_{g,n}$ qui est l'ensemble des composantes connexes des difféomorphismes préservant l'orientation.

1.1.2 Description combinatoire des strates du bord

Nous allons décrire, dans cette partie, de trois façons différentes (mais, bien sûr, équivalentes) le bord de $\mathcal{M}_{0,n}$. On énoncera simplement les propriétés connues, le lecteur pourra pour plus de précisions consulter [BFLS99][I.2. pages 25 à 44].

On a tout d'abord le résultat dû à P. Deligne et D. Mumford ([DM69])

Proposition 1.1.1. $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est irréductible. Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est un diviseur à croisements normaux.

D'autre part, $(\mathcal{M}_{0,n})_n$ admet une structure stratifiée ; c'est à dire que les composantes irréductibles du bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ sont isomorphes à $\mathcal{M}_{0,k}$ pour $k \leq n$. Plus précisément les composantes irréductibles de codimension 1 de $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ sont isomorphes à $\mathcal{M}_{0,n-1}$; l'intersection de deux telles strates (si elle n'est pas vide) est une composante irréductible du bord de codimension 2 et est isomorphe à $\mathcal{M}_{0,n-2}$; etc. ... Réciproquement une composante irréductible du bord de codimension k est l'intersection de k composantes irréductibles de codimension 1 et est isomorphe à $\mathcal{M}_{0,n-k}$.

Lacets. Un point dans une composante irréductible de dimension maximale de $\partial\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est représenté par une surface de Riemann à un noeud de genre 0 et avec n points marqués. Un noeud n'étant rien d'autre qu'un point double, on a en fait deux sphères collées par ce point double, les points marqués se répartissant sur ces deux sphères. C'est la description de l'espace des modules à l'aide d'une découpe en pantalon (un point de $\mathcal{M}_{0,n}$ est défini par la longueur des courbes) qui permet de décrire ainsi les points du bord. Dans cette description les points marqués sont considérés comme enlevés. On a donc une surface hyperbolique, une découpe en pantalon est donnée par $n - 3$ courbes simples (définies à isotopie près). En faisant tendre la longueur d'une de ces courbes vers 0, on obtient un point double reliant deux sphères.

Lorsque l'on se déplace dans la strate, seuls les points marqués changent, la courbe "pincée" de la découpe reste la même. Une strate de codimension 1 est donc déterminée par un lacet (à homotopie près) entourant au moins deux points (un pantalon possède au moins trois trous : le lacet et deux points enlevés). On obtient ainsi une 2-partition de l'ensemble des points marqués. On note $\{z_1, \dots, z_n\}$ l'ensemble des points marqués. On représentera une composante irréductible du bord par une 2-partition stable (i.e. chaque partie contient au moins deux éléments) $\sigma_1|\sigma_2$

avec $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{z_1, \dots, z_n\}$ et $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Par exemple, dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ la 2-partition $z_1 z_3 | z_2 z_4$ correspond au lacet entourant z_1 et z_3 qui détermine une des strates du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$.

Dans une découpe en pantalon, les courbes simples sont d'intersection vide. Ainsi une composante de codimension k , définie par l'annulation de k longueurs de k courbes distinctes, est déterminée par k lacets (à homotopie près) d'intersection vide entourant chacun au moins deux points marqués.

Arbre de droites projectives. Revenons à une vision de géométrie différentielle. Les points d'une strate de codimension k représentent tous k copies de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ "collées" par des points doubles. Les points marqués se répartissent sur les k \mathbb{P}^1 de telle sorte qu'il y ait au moins deux points marqués sur chaque \mathbb{P}^1 (stabilité de la courbe). Cette répartition ne change pas lorsque l'on se déplace dans une strate. Une strate est donc entièrement déterminée par la donnée d'un arbre de droite projective (les intersections représentent les points doubles) et d'une répartition des n points marqués sur les branches.

Quelques exemples :

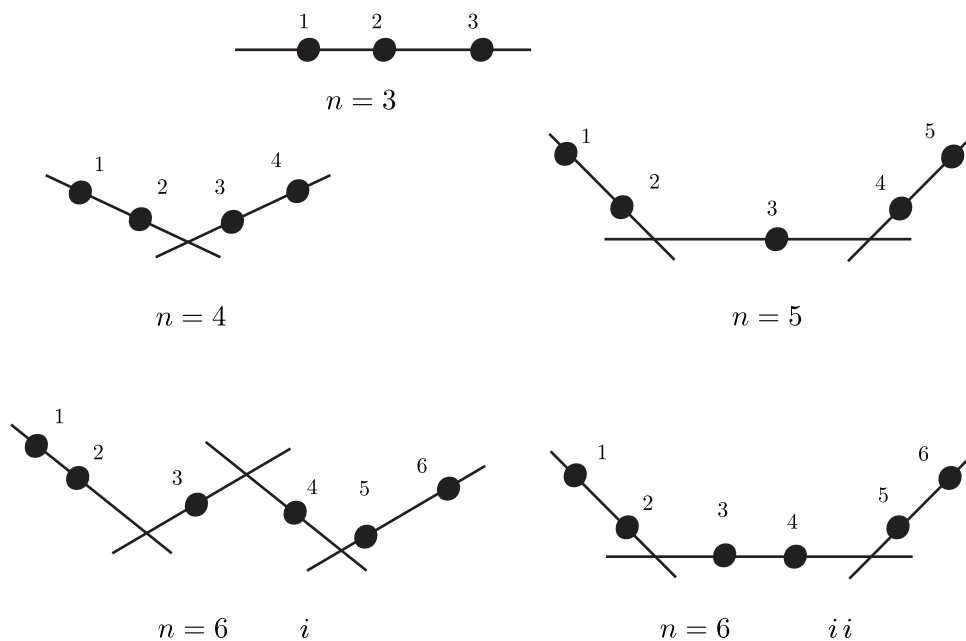


FIG. 1.1 – À part le cas $n = 6$ ii , nous n'avons ici représenté que des strates maximale- ment dégénérées (codimension $n - 3$). La strate du cas $n = 6$ ii est de codimension 2.

Arbres. C'est la représentation duale de la précédente : les points spéciaux (points marqués ou points doubles) sont représentés par des arêtes. Deux arêtes se rencontrent si et seulement si les deux points spéciaux qu'elles représentent appartiennent à une même sphère (à un même \mathbb{P}^1). Les points marqués sont donc représentés par des arêtes terminales. A nouveau le plus simple

est certainement de regarder en petite dimension ce qui se passe. On trouvera sur la figure 1.2 les mêmes strates que précédemment (figure 1.1) dans leurs représentations duales.

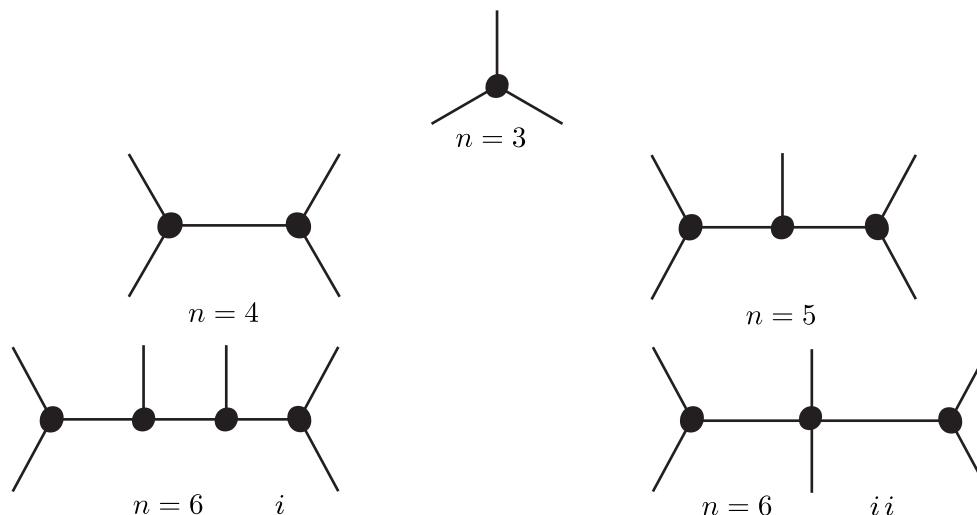


FIG. 1.2 –

1.1.3 Fonctions et différentielles

Nous allons ici préciser un détail concernant les fonctions sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et justifier un abus de notation que nous ferons à maintes reprises par la suite. Comme un point dans l'intérieur de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ est un \mathbb{P}^1 avec $n+3$ points marqués modulo isomorphisme, l'on peut identifier cet intérieur avec les n -uplets de la forme (z_1, \dots, z_n) ($z_i \neq z_j, 0, 1, \infty$) car les isomorphismes nous permettent de fixer trois points comme étant $0, 1$ et ∞ . Cependant cette identification n'est absolument pas canonique : on peut choisir d'envoyer d'autres points sur $0, 1$ et ∞ . En numérotant les points marqués et en choisissant trois points, on fixe un système de représentants ayant trois points marqués fixés une fois pour toutes comme étant $0, 1, \infty$. On note un représentant par un $n+3$ -uplet en faisant figurer quels sont les points marqués fixes : par exemple $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$ (avec $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$ et $z_i \neq 0, 1, \infty$).

On construit maintenant des fonctions coordonnées t_i tel que si un point X de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ est représenté par $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$ alors $t_i(X) = z_i \in \mathbb{P}^1$. Cependant là aussi ces coordonnées ne sont pas canoniques, elles dépendent du système de représentants choisi. En toute généralité, on fixe trois points marqués comme étant $0, 1$ et ∞ et on note S l'ensemble des autres points marqués. Pour $s \in S$ on construit alors une fonction t_s . On considère l'application d'oubli : $\mathcal{M}_{0,n+3} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ qui oublie tous les points sauf $0, 1, \infty$ et s . L'espace d'arrivée est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ (isomorphisme donné par le système de représentants associé à celui sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$). Sur \mathbb{P}^1 on dispose déjà d'une coordonnée affine, on la tire dans un premier temps sur $\mathcal{M}_{0,4}$ (elle prend les valeurs $0, 1, \infty$ aux strates de bord respectives $s0|1\infty, s1|0\infty$ et $s\infty|01$). On la remonte ensuite sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$, ce dernier pull-back définit t_s . En général, dans ce mémoire, on choisira implicitement (sauf mention du contraire) le système de représentants donné par les

$n+3$ -uplets de la forme $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$. On fera la plupart du temps l'abus de notation suivant $z_i = t_i$ car c'est en effet la valeur que prend la fonction. De même on notera des différentielles $\frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} \dots$

1.2 Points réels de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$

Soit une courbe complexe stable avec n points marqués de genre 0. Si l'on fait agir dessus la conjugaison complexe (qui existe car cette courbe n'est rien d'autre que quelques $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ collés) on obtient une autre courbe marquée. Cette action est une involution et les points de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{C})$ fixés par cette involution forment l'espace des points réels $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$. Une courbe stable au-dessus d'un point de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ est réelle en ce sens que la conjugaison complexe fixe tous ses points marqués et tous ses points singuliers. Ainsi chaque composante irréductible d'une courbe stable réelle marquée est un $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ muni d'un équateur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ contenant tous les points marqués et les points d'intersections éventuelles avec d'autres composantes. On appellera point spécial un point qui est ou bien un point marqué ou bien un point singulier. La structure réelle ajoute à la représentation (en arbre) des strates la donnée supplémentaire d'un ordre cyclique non orienté, cela vient du fait que les points spéciaux se trouvent sur un $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et ne peuvent donc "sauter" les uns au-dessus des autres. On parlera de structure localement plane sur l'arbre τ .

On trouve la proposition suivante décrivant la structure réelle de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ dans l'article [GM02][prop.2.1] :

- Proposition 1.2.1.** *1. L'ensemble $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ est une variété réelle fermée et connexe (elle est aussi compacte). Les composantes connexes des intersections de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ avec les strates du bord complexe donnent une décomposition cellulaire. Les cellules sont en correspondance bijective avec les arbres marqués stables localement plans. La relation "une cellule est une composante de codimension 1 du bord d'une autre cellule" correspond à la relation "un arbre localement plan produit un autre arbre localement plan en contractant une arête intérieure".*
- 2. Fixer un ordre (cyclique, non orienté) particulier sur les $n+3$ points marqués détermine un cellule ouverte (de dimension maximale) particulière, celle où les points sont dans l'ordre. Réciproquement à une telle cellule correspond un seul ordre. Fixons un ordre ρ , alors tout choix de trois points consécutifs permet d'introduire des coordonnées réelles puis d'identifier la cellule correspondante à l'ordre ρ avec le simplexe $\Delta_n^0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } 0 < x_1 < \dots < x_n < 1\}$. L'opération inverse est aussi possible : fixer trois points (les ordonner et les "envoyer" sur 0, 1 et ∞), introduire comme précédemment des coordonnées affines, puis identifier l'une des cellules correspondant à un ordre tel que $1 < \infty < 0$ avec le simplexe Δ_n^0 .*
- 3. La clôture de chaque cellule ouverte à une structure de "Stasheff polytope". En particulier les strates de bord de codimension 1 sont indexées par les 2-partitions des points marqués qui respectent l'ordre de la cellule en question. Cela revient à couper l'équateur en deux arcs connexes.*

Grandes lignes d'une démonstration. On suppose que $n \geq 1$. Commençons par étudier $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$. Les points de $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont $n+3$ les points marqués, que l'on numérote

z_1, \dots, z_{n+3} , sont situés sur un même équateur ($\simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$) modulo difféomorphismes. On peut par clarté choisir trois points et représenter une telle courbe par le $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec l'équateur réel. Localement pour se déplacer dans $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$, on déplace localement les points marqués dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sans les faire se rencontrer (sinon on sort de l'espace). À l'intérieur d'une cellule les $n+3$ points marqués sont donc dans le même ordre (pour l'ordre cyclique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$). Par exemple, une cellule correspond à une disposition sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ selon l'ordre suivant des points marqués d'une courbe : $z_2 < z_1 < z_3 < z_4 < \dots < z_{n+3}$, cet ordre n'étant en fait pas orienté.

On fixe un ordre (par exemple celui de l'exemple précédent), l'on choisit trois points consécutifs (pour cet ordre) que l'on fixe comme étant $1, \infty$ et 0 . La coordonnée t_i est ensuite définie comme précédemment. L'ordre correspondant à une cellule donnée permet alors de dire sur quelle coordonnée de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^n$ est envoyée la fonction t_i pour pouvoir identifier la cellule correspondante à Δ_n^0 . Pour reprendre l'exemple précédent, pour identifier la cellule correspondante à l'ordre $z_2 < z_1 < z_3 < z_4 < \dots < z_{n+3}$ au simplexe Δ_n^0 , on fixe $n+1 = 1, n+2 = \infty$ et $n+3 = 0$ pour travailler avec un seul type de représentant. L'identification se fait alors avec le morphisme $X \mapsto (t_2(X), t_1(X), t_3(X), \dots, t_n(X))$ (on rappelle qu'un point X de la cellule est représenté maintenant par un $n+3$ -uplet, dans notre exemple $(z'_1, \dots, z'_n, 1, \infty, 0)$ et que $t_i(X) = z'_i$). Cependant, il est plus simple en général (si l'on ne souhaite pas travailler avec une cellule particulière), de commencer par choisir trois points pour fixer le système de représentants, de construire les fonctions t_i , choisir un ordre "simple" pour envoyer t_i sur la j -ième coordonnée, puis de trouver la cellule qui correspond à Δ_n^0 . Par exemple, ici, on fixe $z_1 = 0, z_{n+2} = 1, z_{n+3} = \infty$, on renumérote les points $z_i < -z_{i+1}$, puis on envoie t_i sur la i -ième coordonnée.

Nous avons déjà décrit comment construire combinatoirement le bord de $\mathcal{M}_{0,n+3}$. Faisons le analytiquement. Lorsque l'on tend vers le bord cela revient à faire tendre la longueur d'une géodésique vers 0 (on tend vers une composante de codimension 1). Si l'on tend vers le bord en restant dans $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$, cette géodésique intersecte l'équateur en deux points; ces deux points se "rapprochent" donc. À la limite l'équateur a dégénéré en deux équateurs réels. La partition correspondante s'obtient donc en séparant l'équateur réel en deux arcs, et la partition conserve l'ordre de la cellule depuis laquelle on est parti (cependant plusieurs ordres sont alors possibles). En itérant ce processus on obtient les strates de codimension supérieure. \square

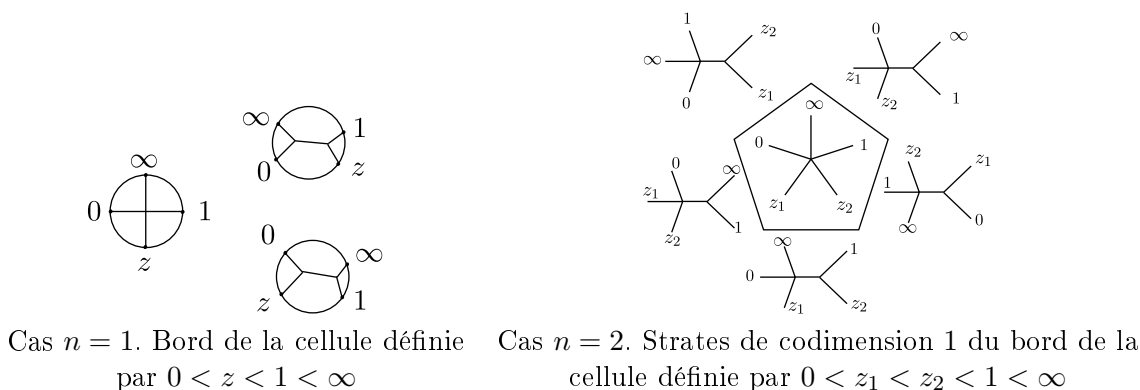


FIG. 1.3 –

1.3 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

1.3.1 Rappel sur les éclatements

Nous allons faire un rappel sur la notion d'éclatement. Nous nous limiterons au cas qui nous intéresse c'est à dire à celui de l'éclatement d'un point ou plus généralement d'une sous-variété donnée localement par des équations affines dans $(\mathbb{P}^1)^n$. Nous traiterons le problème d'une façon géométrique qui sera amplement suffisante pour les utilisations que nous en ferons.

Proposition 1.3.1. *On se donne X une variété projective. On se donne Z une sous-variété isomorphe à \mathbb{P}^m pour un certain $m \geq n - 2$. Alors il existe un unique couple $(\widehat{X}; \varepsilon)$ (à difféomorphisme près) tel que :*

1. $\varepsilon : \widehat{X} \rightarrow X$
2. $\widehat{X} \setminus \varepsilon^{-1}(Z) \simeq X \setminus Z$
3. $\varepsilon^{-1}(Z) \simeq Z \times \mathbb{P}^{k-1}$

Démonstration. On commence par se donner un recouvrement U_1, \dots, U_N de X avec sur chaque U_i des coordonnées locales (x_1^i, \dots, x_n^i) , tel que, sur chaque U_i , Z soit donné par les équations avec des coordonnées locales $x_1^i = \dots = x_k^i = 0$ (où $k = n - m$ est la codimension de Z dans X). On traite les différents U_i séparément mais de la même manière. On va construire des éclatements pour chaque U_i et on les recolle après.

$Z_1 = Z \cap U_1$ est défini par les équations $x_1 = \dots = x_k = 0$. On note $\widehat{U}_1 \subset U_1 \times \mathbb{P}^{k-1}$ la sous-variété définie par les équations :

$$x_i Y_j - x_j Y_i = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \neq j \leq k.$$

Les Y_i sont les coordonnées sur \mathbb{P}^{k-1} . On note π_1 la première projection $p_1 : U_1 \times \mathbb{P}^{k-1} \rightarrow U_1$ restreinte à \widehat{U}_1 .

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U}_1 & \hookrightarrow & U_1 \times \mathbb{P}^{k-1} \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow p \\ & & U_1 \end{array}$$

Il faut maintenant vérifier que \widehat{U}_1 vérifie bien les propriétés souhaitées.

$\widehat{U}_1 \setminus \pi_1^{-1}(Z) \simeq U_1 \setminus Z$. Il suffit pour cela de vérifier que pour un point $P \in U_1$ il existe un et un seul point y de \mathbb{P}^k tel que (P, y) soit dans \widehat{U}_1 . Comme P n'est pas dans Z une des coordonnées locales est non nulle, mettons x_1 . Dans l'ouvert affine de \mathbb{P}^k défini par $Y_1 \neq 0$ c'est à dire par simplicité $Y_1 = 1$ on a dans \widehat{U}_1 :

$$\begin{aligned} x_1 Y_2 - x_2 &= 0 & \Leftrightarrow & Y_2 = \frac{x_2}{x_1} \\ x_1 Y_3 - x_3 &= 0 & \Leftrightarrow & Y_3 = \frac{x_3}{x_1} \\ & \dots & & \\ x_1 Y_k - x_k &= 0 & \Leftrightarrow & Y_k = \frac{x_k}{x_1} \end{aligned}$$

On a donc un et un seul point au-dessus de P dans $\widehat{U}_1 \cap U_1 \times \{Y_1 = 1\}$. Si $Y_1 = 0$ les équations deviennent : $x_1 Y_j - Y_1 x_j = x_1 Y_j = 0$ qui est donc équivalent à $Y_j = 0$ pour tout

$j \neq 1$ car $x_1 \neq 0$. Comme $Y_1 = 0$ on en conclue qu'il n'y a pas de point au-dessus de P dans $\widehat{U}_1 \cap U_1 \times \{Y_1 = 0\}$. On a donc bien $\widehat{U}_1 \setminus \pi_1^{-1}(Z) \simeq U_1 \setminus Z$.
 $\pi_1^{-1}(Z_1) \simeq Z_1 \times \mathbb{P}^{k-1}$ c'est clair.

Ensuite on recolle avec les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 & U_i \setminus Z \xrightarrow{\sim} \widehat{U}_i \setminus \pi_i^{-1}(Z) & \\
 & \nearrow & \searrow \\
 U_i \cap U_j & & \widehat{X} \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & U_j \setminus Z \xrightarrow{\sim} \widehat{U}_j \setminus \pi_j^{-1}(Z) &
 \end{array}$$

Enfin ε est défini par restriction à partir des morphismes π_i .

□

1.3.2 La projection $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$

Penchons nous quelques instants sur la projection $p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$ que l'on peut voir de deux façons. Cette application est dans les deux cas le prolongement au bord de la projection qui envoie $(0, z_1, \dots, z_n, 1\infty)$ sur (z_1, \dots, z_n) . La première et la plus simple consiste à dire tout simplement que l'on projette : on efface graphiquement ou calligraphiquement 0, 1 et ∞ :

$$(0, z_1, \dots, z_n, 1\infty) \mapsto (z_1, \dots, z_n).$$

Cette présentation à le mérite d'être simple mais n'est pas pratique pour décrire le prolongement au bord. En effet par exemple pour $n = 3$ quelle est l'image de la composante de bord donnée par la partition $0z_1z_3|z_21\infty$? Cette composante de codimension 1 correspond à une courbe stable à deux composantes ; d'un point de vue métrique on est parti d'une courbe lisse de référence $S = S_{0,6}$ avec les points marqués 0, z_1 , z_2 , z_3 et ∞ , une géodésique homotopiquement équivalente à un lacet entourant 0, z_1 , et z_3 puis on s'est déplacé dans $\mathcal{M}_{0,6}$ de manière à faire tendre la longueur de cette géodésique vers 0 ; à la limite on tombe dans la composante voulue : symboliquement on a $0 = z_1 = z_3$ qui est l'équation d'une droite dans \mathbb{P}^3 . La composante $0z_1z_3|z_21\infty$ s'envoie justement sur cette droite. Le résultat est conforme à l'idée qu'on s'en fait mais cela est plus heuristique que mathématique. C'est cependant l'idée qu'il faut garder pour déterminer rapidement où s'envoie une composante de bord.

Pour obtenir les images des composantes de codimension 1 du bord par p , on dit que les points entourés par un lacet sont égaux. On obtient la description suivante dans $(\mathbb{P}^1)^n$:

- les bords de la forme $s_i s_j | \dots, s_i \varepsilon | \dots$ avec $\varepsilon \in \{0, 1, \infty\}$, donnent les hyperplans $x_i = x_j$ et $x_i = 0, 1, \infty$ respectivement ;
- les lacets autour de trois points (dont l'un au plus est égal à 0, 1, ∞) donnent des espaces affines de codimension 2 ;
- les lacets autour de quatre points (l'un au plus peut être égal à 0, 1, ∞) donnent des espaces affines codimension 3 ;

– ...

- les lacets autour de $n + 1$ points (un seul étant égal à $0, 1, \infty$) donnent les points $(0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1)$ et (∞, \dots, ∞) .

La seconde présentation est itérative et s'appuie sur les applications d'oubli de points qui relient les différents espaces de modules de même genre. On fixe $n \geq 3$. On note S un ensemble fini, on va noter $\mathcal{M}_{0,S}$ pour $\mathcal{M}_{0,|S|}$. On se donne un sous-ensemble S' de S avec $|S'| \geq 3$ on a un morphisme canonique d'oubli $\Phi_T : \overline{\mathcal{M}}_{0,S} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,S'}$ (avec $T = S \setminus S'$) qui supprime les points marqués indexés par les éléments de T et contracte les composantes "instables". Les morphismes oubliant des sous-ensembles disjoints commutent et leurs composées correspondent aux morphismes oubliant l'union de ces sous-ensembles. Quelques dessins pour comprendre comment les morphismes d'oubli traitent les composantes du bord. On est dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$, $S = \{0, z_1, z_2, z_3, 1, \infty\}$, $T = \{z_2\}$ et on regarde la composante de codimension 1 définie par la partition $z_2\infty|0z_1z_31$:

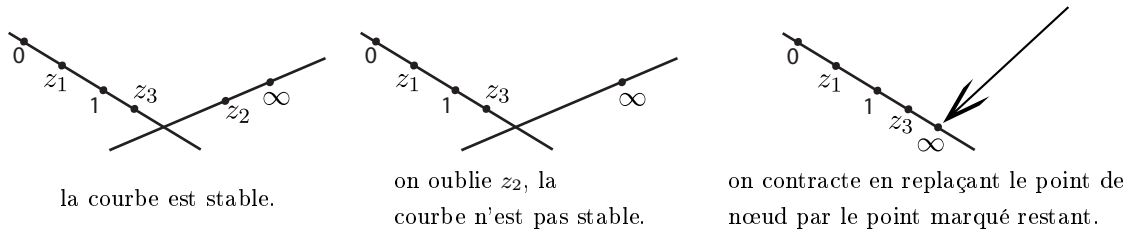


FIG. 1.4 –

La projection $p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$ est aussi une itération d'un morphisme birationnel :

$$\beta : \overline{\mathcal{M}}_{0,\{0,z_1,\dots,z_n,1,\infty\}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,\{0,z_1,\dots,z_{n-1},1,\infty\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,\{0,z_n,1,\infty\}}.$$

Comme les morphismes d'oubli d'ensembles disjoints commutent on peut aussi les faire tous en même temps mais cette séparation des étapes peut être utile pour des démonstrations par récurrence comme celle que font Goncharov et Manin [GM02][prop 3.1]. Nous déduisons dans ce rapport cette même proposition (voir prop. 2.4.6) comme corollaire de la proposition 2.4.3.

Remarque 1. Le cas des partitions de la forme

$$z_{n+1}\sigma_1|\sigma_2\dots 01\infty \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_1\sigma_2 \text{ formant une} \\ \text{partition de } \{z_1, \dots, z_n\} \\ \text{et } |\sigma_1| \geq 2 \end{cases}$$

est lui assez spécial. Les images par β de ces strates ne sont en fait pas des produits. L'image d'une telle strate est incluse dans le produit $\sigma_1|\sigma_2 01\infty \times \mathcal{M}_{0,\{0,z_{n+1},1,\infty\}}$ mais est strictement incluse dedans. On a de plus $\dim(\beta(z_{n+1}\sigma_1\sigma_2|01\infty)) = \dim(\sigma_1|\sigma_2 01\infty \times \{point\}) = n - 1$ alors que $\dim(z_{n+1}\sigma_1\sigma_2|01\infty) = n$. Bien que ces strates aient une image par β plus difficile à voir, leurs images dans $(\mathbb{P}^1)^n$ sont des diagonales :

$$p(z_{n+1}\sigma_1\sigma_2|01\infty) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in (\mathbb{P}^1)^{n+1} \text{ tels que } x_i = x_{n+1} \forall i | z_i \in \sigma_1\}$$

Chapitre 2

Espace des différentielles de $\mathcal{M}_{0,n}$

2.1 Différentielles et cohomologie

Soit X une variété complexe et D une hypersurface dans X qui est un diviseur à croisements normaux. On définit alors le complexe de de Rham holomorphe à singularité logarithmique le long de D :

Définition 2.1.1. Soit $\Omega_X^k(\log D)$ le sous-faisceau du faisceau $\Omega_X^k(*D)$ des formes différentielles méromorphes sur X , holomorphes sur $X \setminus D$, défini par la condition :

Si α est une forme méromorphe sur U holomorphe sur $U \setminus D$, $\alpha \in \Omega_X^k(\log D)|_U$ si α admet un pôle au plus d'ordre 1 le long de $U \cap D$.

On parlera de différentielles logarithmiques le long de D , ou de différentielles logarithmiques ou simplement de différentiel si le contexte est clair.

On notera parfois simplement $\Omega_{\log}^k(D)$ pour $\Omega_X^k(\log D)$ si le contexte le permet.

Un lemme utile permet de décrire effectivement dans $\Omega_X^k(\log D)$:

Lemme 2.1.1. Soit z_1, \dots, z_n des coordonnées locales sur un ouvert U de X dans lesquelles $U \cap D$ est défini par $z_1 \dots z_r = 0$. Alors $\Omega_X^k(\log D)|_U$ est un faisceau de \mathcal{O}_U -modules libres admettant pour base les $\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \frac{dz_{i_2}}{z_{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i_l}}{z_{i_l}} \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_m}$ avec $i_s \leq r$, $j_s > r$ et $l + m = k$.

Les faisceaux $\Omega_X^k(\log D)$ sont des faisceaux de \mathcal{O}_X -modules libres.

On pose $U = X \setminus D$ et on note j l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$. On a une inclusion $\Omega_X^k(\log D) \subset j_* \Omega_U^k$ où Ω_U^k désigne le faisceau des formes différentielles holomorphes sur U . D'autre part on a une inclusion de complexes $\Omega_U^\bullet \subset \mathcal{A}_U^\bullet$ (\mathcal{A}_U^\bullet désigne le complexe de de Rham algébrique). On a donc un morphisme :

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \rightarrow j_* \mathcal{A}_U^\bullet$$

Le résultat suivant est dû à Deligne ([Del68]) :

Proposition 2.1.2. Le morphisme

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \rightarrow j_* \mathcal{A}_U^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme

Corollaire 2.1.3. *On a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbb{H}^k(U, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D)) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quelques précisions :

1. $\mathbb{H}^k(U; \mathbb{C})$ désigne le k -ième groupe de cohomologie du faisceau des fonctions localement constantes à valeur dans \mathbb{C} . C'est à dire le k -ième foncteur dérivé du foncteur des sections globales appliqué au faisceau des fonctions localement constantes. En d'autre terme la cohomologie habituelle de U .
2. On note Γ le foncteur des sections globales, $R^k \Gamma$ son k -ième foncteur dérivé. $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D))$ est alors défini par

$$\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D)) = R^k \Gamma(\Omega_X^\bullet(\log D)).$$

$\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D))$ est déterminé par le choix d'un quasi-isomorphisme $\Omega_X^\bullet(\log D) \simeq \mathcal{K}^\bullet$ où \mathcal{K} est un complexe de faisceaux Γ -acycliques.

3. Le quasi-isomorphisme

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \xrightarrow{\sim} j_* \mathcal{A}_U^\bullet$$

nous donne en plus que $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D))$ est bien donné par la cohomologie du complexe des sections globales de $\Omega_X^\bullet(\log D)$; les classes de cohomologie des k -formes différentielles sur X logarithmiques le long de D .

On trouvera des démonstrations du lemme et du corollaire, par exemple, dans le livre de C. Voisin [Voi02][pages186-187]

2.2 La démarche de E. Getzler à partir d'un résultat de V. T. Arnol'd

2.2.1 L'anneau de cohomologie de l'espace de configuration du plan

Notation. Soit M une variété holomorphe. On notera $M_0^n \subset M^n$ l'ensemble des n -uplets (z_1, \dots, z_n) tel que $z_i \in M \forall i$ et que $z_i \neq z_j \forall i \neq j$. On notera en conséquence \mathbb{C}_0^n l'espace de configuration du plan. Par la suite on sera amené à considérer \mathbb{P}_0^n l'espace de configuration de la sphère, puis $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$.

On note A_n l'anneau gradué anticommutatif engendré par les éléments de degré 1 $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$, avec $1 \leq k \neq l \leq n$ et la relation :

$$\omega_{k,l}\omega_{l,m} + \omega_{l,m}\omega_{m,k} + \omega_{m,k}\omega_{k,l} = 0 \tag{2.2.1.1}$$

On a alors le théorème suivant

Théorème 2.2.1. *On a un isomorphisme $\mathbb{H}^\bullet(\mathbb{C}_0^n) \simeq A_n$ donné par :*

$$\omega_{k,l} = \frac{1}{2i\pi} \frac{dz_k - dz_l}{z_k - z_l} \tag{2.2.1.2}$$

Nous allons redonner ici la preuve d'Arnol'd [Arn69] :

Démonstration. Etape 1 : on calcule récursivement la cohomologie de \mathbb{C}_0^n . On raisonne par récurrence car on a une fibration :

$$p : \begin{array}{c} \mathbb{C}_0^n \\ \downarrow p^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\} \\ \mathbb{C}_0^{n-1} \end{array}$$

Le groupe fondamental de la fibre est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ ($n - 1$ fois). Le groupe fondamental de la base est le groupe des tresses colorées à $n - 1$ brins, I_{n-1} . La fibration admet d'autre part une section donnée par la formule :

$$z_n = \frac{z_1 + \dots + z_{n-1}}{n-1} + 2 \max_{1 \leq i, j \leq n-1} |z_i - z_j| + 1$$

On étudie ensuite la suite spectrale de Leray associée à la fibration. L'existence de la fibration nous assure que la suite dégénère en $E_2^{*,*}$. De plus, le groupe I_n agit trivialement sur le H^1 du plan moins $n - 1$ points. Comme d'autre part ces deux groupes sont sans torsion : $E_2^{\bullet, \bullet} = H^\bullet(\mathbb{C}_0^{n-1}) \otimes H^\bullet(\mathbb{C} \setminus \{y_1, \dots, y_{n-1}\})$ où les y_i sont $n - 1$ points arbitraires dans le plan. On construit à partir de là par récurrence une base additive de $H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$. Comme $H^q(\mathbb{C} \setminus \{y_1, \dots, y_k\}) = 0$ si $q \neq 0, 1$ le calcul est assez simple et l'on trouve :

$$H^m(\mathbb{C}_0^n) \simeq H^m(\mathbb{C}_0^{n-1}) \oplus H^{m-1}(\mathbb{C}_0^{n-1}) \otimes H^1(\mathbb{C} \setminus \{y_1, \dots, y_{n-1}\})$$

Comme $\mathbb{C}_0^1 = \mathbb{C}$, une base additive de $H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$ est alors donnée par les produits :

$$\omega_{k_1, l_1} \omega_{k_2, l_2} \dots \omega_{k_p, l_p} \quad \text{avec } k_s < l_s, l_1 < \dots < l_p, 1 \leq k_s, l_s \leq n \quad (2.2.1.3)$$

Les symboles $\omega_{k,l}$ représentent les classes des différentielles $\frac{1}{2i\pi} \frac{dz_k - dz_l}{z_k - z_l}$ quand on calcule la cohomologie par les différentielles logarithmiques ($H^\bullet(U, \mathbb{C}) = \mathbb{H}(X, \Omega_X^\bullet(\log D))$, voir 2.1.3)

Etape 2 : On construit un isomorphisme $\varphi : A_n \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$. Un calcul direct montre que les formes différentielles vérifient la relation 2.2.1.1. Donc les classes de cohomologie vérifient aussi cette relation (voir cor. 2.1.3) et l'on a un homomorphisme d'anneau $\varphi : A_n \rightarrow H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$ en associant à un générateur $\omega_{k,l}$ la forme différentielle définie par la formule 2.2.1.2.

On vérifie ensuite que ce morphisme est bijectif. Il est surjectif car tout élément de la base donnée plus haut admet un antécédent. Arnol'd utilise ensuite le fait suivant :

Lemme 2.2.2. *L'anneau A_n est additivement engendré par les produits de la forme 2.2.1.3*

En effet l'anticommutativité de A_n et le fait que $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$ permet d'écrire tout élément de A_n comme combinaison linéaire de produits de la forme $\omega_{k_1, l_1} \omega_{k_2, l_2} \dots \omega_{k_p, l_p}$ avec $k_s < l_s, l_s \leq l_{s+1}$. La relation 2.2.1.1 permet d'obtenir une égalité stricte. On se donne $k_1, k_2 < l$ et par exemple $k_1 < k_2$, alors :

$$\omega_{k_1, l} \omega_{k_2, l} = \omega_{k_1, k_2} \omega_{k_2, l} - \omega_{k_1, k_2} \omega_{k_1, l}$$

Revenons au morphisme φ . Si un élément x est dans le noyau, on l'écrit comme combinaison linéaire des produits 2.2.1.3. Son image, nulle, est une combinaison linéaire d'éléments indépendants (cf. plus haut) et tous les coefficients sont nuls. x est donc nul dans A_n . On a donc $\ker \varphi = 0$ et φ est un isomorphisme. □

Remarque 2. On a au passage démontré que les différentielles logarithmiques (et non leurs classes de cohomologie) donnent directement la cohomologie de l'espace.

2.2.2 Le travail de E. Getzler

Dans son article [Get94], E. Getzler rappelle le travail d'Arnol'd dont il donne le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.3. *L'anneau de cohomologie $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1}, \mathbb{C})$ peut-être identifié avec le noyau de la différentielle ι sur $H(\mathbb{C}_0^n, \mathbb{C})$ qui envoie les générateurs $\omega_{k,l}$ sur 1. C'est à dire que $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1}, \mathbb{C})$ est engendré par les différences $\omega_{i,j} - \omega_{k,l}$.*

Pour cela il remarque que le sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui fixe $\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est le groupe affine noté $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. Donc $\mathcal{M}_{0,n+1} \simeq \mathbb{C}_0^n / \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. Il remarque ensuite que le groupe affine est homotopiquement équivalent au cercle S^1 . Il conclut ensuite en utilisant la cohomologie S^1 -equivariante.

2.3 Cas de l'espace de configuration de \mathbb{P}^1 moins trois points : un autre calcul de la cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n}$

2.3.1 Quelques explications

Le travail précédent ne nous donne pas une présentation de $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n})$ qui nous convienne. En effet par la suite (les sections suivantes, les chapitres suivants), nous serons amenés à étudier des formes différentielles logarithmiques de la forme $\frac{dz_i}{z_i}$ ou $\frac{dz_i}{1-z_i}$ qui n'apparaissent pas de façon naturelle dans le travail de E. Getzler. Comme $\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq \mathbb{C}_0^{n+3} / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, E. Getzler commence par briser la symétrie en identifiant $\mathcal{M}_{0,n+3}$ à $\mathbb{C}_0^{n+2} / \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ en fixant un des points marqués comme étant l'infini. Ensuite il étudie l'action de $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ sur la cohomologie de \mathbb{C}_0^{n+2} . Si le résultat de E. Getzler ne nous est pas directement utile, nous allons pourtant reprendre sa démarche.

Pour obtenir une présentation de $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n})$ qui nous soit plus facile à manipuler, une première idée est de garder la symétrie de l'espace de modules le plus longtemps possible. C'est à dire que l'on commencerait par déterminer la cohomologie de $(\mathbb{P}^1\mathbb{C})_0^n$ puis on en déduirait celle de $\mathcal{M}_{0,n}$ en étudiant l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur la cohomologie de $(\mathbb{P}^1\mathbb{C})_0^n$. En fait cette démarche n'aboutit pas car je ne sais pas décrire l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n})$.

Une seconde solution consiste à supprimer toute la symétrie dès le départ. On identifiera donc ici $\mathcal{M}_{0,n+3}$ à l'ensemble des $(n+3)$ -uplets de la forme $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$. C'est à dire $\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq (\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$. On calculera donc la cohomologie de $(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$ qui nous donnera directement celle de $\mathcal{M}_{0,n+3}$. Cette solution fait bien apparaître les formes différentielles

logarithmiques $\frac{dz_i}{z_i}$ et $\frac{dz_i}{1-z_i}$. C'est cette approche que nous mettons en pratique au paragraphe suivant.

2.3.2 Le cas de \mathbb{P}^1 moins trois points

On reprend la méthode précédente. La filtration étudiée est à nouveau l'oubli de la dernière variable :

$$\begin{array}{ccc}
 p : \mathcal{M}_{0,n+3} & \text{ou bien} & p : (\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 p^{-1}(0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1, \infty) = & & p^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \\
 \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1, \infty\} & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1, \infty\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{M}_{0,n+2} & & (\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^{n-1}
 \end{array}$$

Ici, comme dans le cas de \mathbb{C}_0^n l'existence d'une section assure la dégénérescence de la suite spectrale de Leray. Une section étant donnée par exemple par :

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{|z_{n-1}|} \left(|z_{n-1}| - \frac{\min_{1 \leq i \neq j \leq n-1} \{|z_i - z_j|, |z_i|, |1 - z_i|\}}{3} \right)$$

Le groupe fondamental de la fibre est facile à caractériser. Le π_1 de $(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$ est lui plus compliqué mais c'est un sous-groupe du groupe des tresses colorées de la sphère à $n+3$ brins qui agit trivialement sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{n+2 \text{ points}\}$. Son action sur le H^1 de la fibre est donc elle aussi triviale. On trouve alors que $E_2^{p,q} = H^p((\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^{n-1}) \otimes H^q(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, z_1, \dots, z_{n-1}, \infty\})$. On a donc :

$$H^k(\mathcal{M}_{0,n+3}) = H^k(\mathcal{M}_{0,n+2}) \oplus H^{k-1}(\mathcal{M}_{0,n+2}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1, \infty\})$$

On montre par récurrence qu'une base additive de $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+3})$ ($n \geq 1$) est formée des produits de la forme :

$$\omega_{k_1, l_1} \dots \omega_{k_p, l_p} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} -1 \leq k_s < l_s \\ 1 \leq l_s \leq n \\ l_1 < \dots < l_p \end{array} .$$

On peut rajouter à chaque fois un générateur $\omega_{-2,j}$, il faut alors ajouter une relation :

$$\sum_{i=-2}^{j-1} \omega_{i,j} = 0$$

qui vient du fait que l'on travaille avec des sphères.

Le calcul des premiers termes peut aider à la compréhension :

$$n = 1 - H^0(\mathcal{M}_{0,4}) = \mathbb{C}$$

$$- H^1(\mathcal{M}_{0,4})$$

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{M}_{0,4}) &= H^1(\mathcal{M}_{0,3}) \oplus H^0(\mathcal{M}_{0,3}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}) \\ &= H^0(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}) \\ &\quad \left. \begin{array}{l} dz_1/(z_1 - 1) \\ dz_1/z_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \omega_{-1,1} \\ \omega_{0,1} \\ \omega_{-2,1} \\ \omega_{0,1}\omega_{-1,1}\omega_{-2,1} = 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$- H^2(\mathcal{M}_{0,4}) = 0$$

$$n = 2 - H^0(\mathcal{M}_{0,5}) = \mathbb{C}$$

$$- H^1(\mathcal{M}_{0,5})$$

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{M}_{0,5}) &= H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \oplus H^0(\mathcal{M}_{0,4}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\}) \\ &= H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \oplus H^0(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\}) \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \frac{dz_2}{(z_2-1)} \\ \frac{dz_2}{z_2} \\ \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} \end{array} \right| \begin{array}{l} \omega_{-1,2} \\ \omega_{0,2} \\ \omega_{1,2} \\ \omega_{-2,1} \\ \omega_{1,2}\omega_{0,1}\omega_{-1,1}\omega_{-2,1} = 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$- H^2$$

$$\begin{aligned} H^2(\mathcal{M}_{0,5}) &= H^2(\mathcal{M}_{0,4}) \oplus H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\}) \\ &= H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\}) \\ &\quad \left. \begin{array}{l} dz_1/(z_1 - 1) \\ dz_1/z_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{dz_2}{(z_2-1)} \\ \frac{dz_2}{z_2} \\ \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} \end{array} \end{aligned}$$

$$- H^3(\mathcal{M}_{0,5}) = 0$$

$$n = 3 - H^0(\mathcal{M}_{0,6}) = \mathbb{C}$$

$$- H^1(\mathcal{M}_{0,6})$$

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{M}_{0,6}) &= H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^0(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\ &= H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^0(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \frac{dz_3}{(z_3-1)} \\ \frac{dz_3}{z_3} \\ \frac{dz_3-dz_1}{z_3-z_1} \\ \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2} \end{array} \right| \begin{array}{l} \omega_{-1,3} \\ \omega_{0,3} \\ \omega_{1,3} \\ \omega_{2,3} \\ \omega_{-2,3} \\ \omega_{2,3}\omega_{1,3}\dots\omega_{-2,3} = 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- H^2 \quad H^2(\mathcal{M}_{0,6}) &= H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\
&= H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\
&\quad \frac{dz_1}{(z_1-1)} \quad \frac{dz_3}{(z_3-1)} \\
&\quad \frac{dz_2}{(z_2-1)} \quad \frac{dz_3}{z_3} \\
&\quad \frac{dz_2}{z_2} \quad \frac{dz_3-dz_1}{z_3-z_1} \\
&\quad \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} \quad \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- H^3(\mathcal{M}_{0,6}) \\
H^3(\mathcal{M}_{0,6}) &= H^3(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\
&= H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\})
\end{aligned}$$

$$- H^4(\mathcal{M}_{0,6}) = 0$$

On note A_n^2 l'anneau gradué anticommutatif engendré par les éléments de degré 1 $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$ pour $1 \leq k \neq l \leq n$ et $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$ pour $k = -1, 0$ et $1 \leq l \leq n$ avec les relations :

$$\begin{aligned}
\omega_{k,l}\omega_{l,m} + \omega_{l,m}\omega_{m,k} + \omega_{m,k}\omega_{k,l} &= 0 \quad \text{pour } -1 \leq k \leq n; 1 \leq l \leq n \\
\omega_{k_1,l}\omega_{k_2,l} &= 0 \quad \text{pour } k_1, k_2 = -1, 0 \text{ et } 1 \leq l \leq n
\end{aligned}$$

Comme précédemment on construit un morphisme de A_n^2 dans l'anneau de cohomologie en utilisant les différentielles :

$$\begin{aligned}
\omega_{k,l} &\mapsto \frac{dz_k-dz_l}{z_k-z_l} && \text{pour } 1 \leq k \neq l \leq n \\
p : \omega_{-1,l} = \omega_{l,-1} &\mapsto \frac{-dz_l}{1-z_l} = \frac{dz_l}{dz_l-1} && \text{pour } 1 \leq l \leq n \\
\omega_{0,l} = \omega_{l,0} &\mapsto \frac{-dz_l}{-z_l} = \frac{dz_l}{-z_l} && \text{pour } 1 \leq l \leq n
\end{aligned} \tag{2.3.2.1}$$

Ensuite on remarque qu'une base additive de A_n^2 est donnée par le produit de la forme :

$$\omega_{k_1,l_1}\omega_{k_2,l_2}\dots\omega_{k_p,l_p} \quad \text{avec } k_s < l_s, l_1 < \dots < l_p, -1 \leq k_s \leq n, 1 \leq l_s \leq n \tag{2.3.2.2}$$

On conclut à nouveau que $p : A_n^2 \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+3})$ est un isomorphisme et que les différentielles logarithmiques (et non leurs classes de cohomologie) donnent directement la cohomologie de l'espace.

Nous avons ici montré le résultat suivant :

Proposition 2.3.1. *Soit A_n^2 l'anneau gradué anticommutatif engendré par les éléments de degré 1 $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$ pour $1 \leq k \neq l \leq n$ et $\omega_{k,l}$ pour $k = -1, 0$ et $1 \leq l \leq n$ avec les relations :*

$$\omega_{k,l}\omega_{l,m} + \omega_{l,m}\omega_{m,k} + \omega_{m,k}\omega_{k,l} = 0 \quad \text{pour } -1 \leq k \leq n; 1 \leq l \leq n \tag{2.3.2.3}$$

$$\omega_{k_1,l}\omega_{k_2,l} = 0 \quad \text{pour } k_1, k_2 = -1, 0 \text{ et } 1 \leq l \leq n. \tag{2.3.2.4}$$

On a un isomorphisme $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+3}) \simeq A_n^2$ donné par les formules 2.3.2.1. A_n^2 étant d'autre part isomorphe à l'anneau des formes différentielles logarithmiques, on a prouvé que ces dernières (et non leurs classes de cohomologie) calculent la cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n+3}$

2.4 Étude des diviseurs des pôles des formes différentielles logarithmiques sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$

2.4.1 L'exemple le plus simple : $\zeta(2)$

La représentation intégrale de $\zeta(2)$ est donnée par la formule suivante (voir chapitre voir 3 pour des rappels sur les valeurs multi-zeta) :

$$\zeta(2) = \int_0^1 \frac{1}{t_2} \left(\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) dt_2 = \int \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{dt_2}{t_2} \wedge \frac{dt_1}{1-t_1}$$

Considérons (t_1, t_2) comme les coordonnées affines sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Alors les singularités de l'intégrale sont les droites : $t_1 = 1$, $t_1 = \infty$, $t_2 = 0$, $t_2 = \infty$ (représentées en pointillés sur la figure 2.1) et le bord du domaine d'intégration est un triangle (en plein sur la même figure).

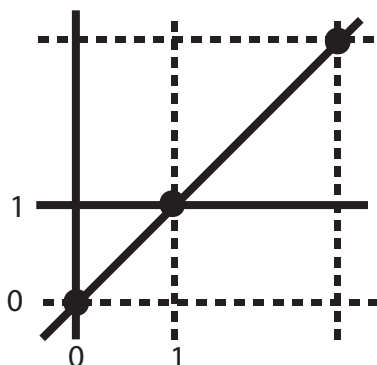


FIG. 2.1 –

L'espace de modules $\mathcal{M}_{0,5}$ est identifié aux quintuplets $(0, z_1, z_2, 1, \infty)$ tels que $z_1 \neq z_2$ et $z_1, z_2 \neq 0, 1, \infty$ (choix d'un système de représentants des classes modulo $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$). On a alors l'application $p : \mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ donnée par $(0, z_1, z_2, 1, \infty) \mapsto (z_1, z_2)$. Cela conduit à considérer l'intégrale précédente sur $\mathcal{M}_{0,5}$ en la "remontant". On a les propriétés suivantes :

Proposition 2.4.1. *Soit ω une forme différentielle analytique sur une variété compacte X . Alors l'intégrale*

$$\int_X \omega$$

est convergente.

Corollaire 2.4.2. *Soit ω une forme méromorphe sur une variété compacte X . Soit $\Delta \subset X$ une sous-variété ouverte. Alors l'intégrale*

$$\int_{\Delta} \omega$$

est convergente si et seulement si le bord de Δ est disjoint du diviseur des pôles de ω .

Se pose alors la question d'identifier le bord du domaine d'intégration dans $\mathcal{M}_{0,n}$ ainsi que le diviseur des pôles ω .

Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$: $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ n'est pas seulement constitué des sept droites manquantes sur la figure 2.1. L'union de ces sept droites n'est pas un diviseur à croisements normaux ; les points "à problèmes" sont $(0, 0)$, $(1, 1)$, (∞, ∞) . Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ contient trois droites supplémentaires : les droites exceptionnelles de l'éclatement aux trois points à problèmes. On donne ici la liste des 10 strates de codimension 1 qui composent le bord de $\mathcal{M}_{0,5}$:

strates	$1\infty 0z_1z_2$	$0\infty z_1z_21$	$01 z_1z_2\infty$	$0z_1 z_21\infty$	$0z_2 z_11\infty$	$1z_1 z_20\infty$
image dans $(\mathbb{P}^1)^2$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	(∞, ∞)	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_1 = 1$
strates	$1z_2 \infty 0z_1$	$\infty z_1 z_210$	$\infty z_2 z_110$	$z_1z_2 01\infty$		
image dans $(\mathbb{P}^1)^2$	$x_2 = 1$	$x_1 = \infty$	$x_2 = \infty$	$x_1 = x_2$		

Diviseur des pôles On appelle A le diviseur correspondant aux singularités dans $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ de la différentielle

$$\omega = \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_1}{1 - z_1}.$$

Les singularités de ω dans $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ ne sont pas toutes les préimages des singularités dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: les éclatements en $(0, 0)$ et en $(1, 1)$ donnent lieu à des composantes superflues. Cela se voit par un calcul dans des coordonnées locales du pull back de la différentielle suite à l'éclatement. Un calcul complet des diviseurs des pôles pour des formes différentielles sur $\mathcal{M}_{0,n}$ est donné à la proposition 2.4. Les strates du bord de $\mathcal{M}_{0,5}$ se divisent en deux catégories : 5 strates forment le diviseur A des pôles de ω , 5 autres forment le bord B du domaine d'intégration :

diviseur A des pôles de ω	$0z_2 z_11\infty$	$1z_1 z_20\infty$	$\infty z_1 z_210$	$\infty z_2 z_110$	$01 z_1z_2\infty$
le bord B	$0z_1 z_21\infty$	$z_1z_2 01\infty$	$1z_2 \infty 0z_1$	$1\infty 0z_1z_2$	$0\infty z_1z_21$

On a noté en gras les diviseurs exceptionnels.

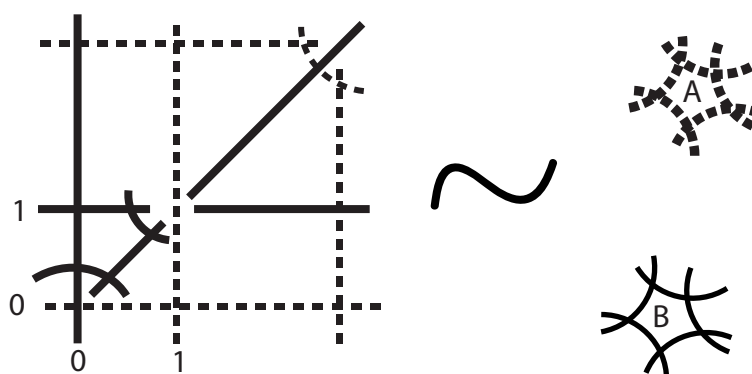


FIG. 2.2 –

Ici les deux diviseurs (A et B) sont deux pentagones disjoints dont l'union est le bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$. On voit dès maintenant apparaître les problèmes que pose la connaissance du diviseur des singularités du pull-back d'une différentielle par une suite d'éclatements.

2.4.2 Bord et diviseur : un critère de convergence

Le contexte On fixe $n \geq 3$. On choisit le système de représentants habituel, c'est à dire qu'on représente un point de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ par un $n+3$ -uplet $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$. On se donne l'ordre le plus simple sur les points marqués : $\rho : 0 < z_1 \dots < z_n < 1 < \infty$ pour pouvoir identifier la cellule correspondante $\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})$ de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ avec Δ_n^0 . On fixe d'autre part les morphismes :

$$p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \longrightarrow (\mathbb{P}^1)^n \quad .$$

$$(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty) \longmapsto (z_1, \dots, z_n)$$

et la restriction de p aux points réels : $p_{\mathbb{R}} : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n(\mathbb{R})$.

Dans un premier temps, on cherche à déterminer un critère de convergence pour les intégrales de la forme

$$\int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})} \omega$$

où $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$. En vertu du corollaire 2.4.2, on cherche à connaître le diviseur des singularités d'une forme différentielle dans $\Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$.

Comme les différentielles $\frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}$ engendrent l'espace des formes différentielles logarithmiques on s'intéressera tout particulièrement aux formes différentielles de la forme :

$$\frac{dz_n}{z_n - \varepsilon_n} \dots \frac{dz_1}{z_1 - \varepsilon_1} \quad \text{avec } \varepsilon_i \in \{0, 1, z_j | j \neq i\}.$$

qui engendrent $\Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$ (toutes les formes de ce type ne sont pas logarithmiques, on ne s'intéresse ici qu'à celles qui le sont).

Ensuite se posera le problème de connaître la valeur de l'intégrale $\int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})} \omega$ lorsque celle-ci converge. On donnera en 4.1 une conjecture qui généralise à toutes les formes logarithmiques le résultat bien connu (dû à Goncharov [GM02]) :

$$\int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})} \omega = \zeta(k_1, \dots, k_m) \quad \text{quand } \omega = \frac{dz_n}{z_n - \varepsilon_n} \wedge \dots \wedge \frac{dz_1}{z_1 - \varepsilon_1} \quad \text{avec } \begin{cases} \varepsilon_i \in \{0, 1\} \\ \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_n = 0 \end{cases} \quad .$$

En 4.2, on donnera de nouveaux exemples en petites dimensions où la conjecture est vraie.

Le cas général.

Théorème 2.4.3. *Soit $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$. Soit D une composante irréductible du bord dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$. D s'envoie dans $(\mathbb{P}^1)^n$ sur D' . Soit i la codimension de D' dans $(\mathbb{P}^1)^n$. D appartient au diviseur des pôles de ω dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ ssi $p_*(\omega)$ a un pôle d'ordre $\geq i$ le long de D' .*

Démonstration. Sans restreindre la généralité, par un changement de variable affine on peut supposer que D' est donné par $0 = y_1 = \dots = y_i$ dans les nouvelles coordonnées y_1, \dots, y_n :

En effet D' est donné (quitte à renuméroter les variables) par des équations de la forme $x_1 = \dots = x_{i+1}$ ou de la forme $x_1 = \dots x_i = \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{0, 1, \infty\}$ ($x_i = [X_i, Y_i]$ est la i -ième coordonnée canonique dans $(\mathbb{P}^1)^n$).

Dans le premier cas on pose :

$$\begin{aligned} y_s &= x_s - x_{s+1} \quad \text{pour } 1 \leq s \leq i \\ y_s &= x_s \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

x_i est ici "normalisé", c'est à dire égal à $[X'_i, 1]$ ou $[1; 0]$ suivant que $x_i \neq \infty$ ou $x_i = \infty$. Dans le deuxième cas, si $\varepsilon \neq \infty$, on pose :

$$\begin{aligned} y_s &= x_s - \varepsilon \quad \text{pour } 1 \leq s \leq i \\ y_s &= x_s \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si $\varepsilon = \infty$, comme $x_i = [X_i, Y_i]$, cela signifie que D' est donné par :

$$\begin{aligned} y_s &= [1; Y'_s] - [1; 0] \quad \text{pour } 1 \leq s \leq i \\ y_s &= [1, Y'_s] \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

sur l'ouvert $X_s \neq 0 \quad \forall s$.

Admettons provisoirement le lemme suivant (voir plus loin pour une démonstration).

Lemme 2.4.4. *Localement au voisinage de D' , $p_*(\omega)$ est donné par :*

$$p_*(\omega) = \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dy_2}{y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dy_k}{y_k} \wedge f(y_1, \dots, y_n) dy_{k+1} \wedge \dots \wedge dy_n$$

et f holomorphe localement au voisinage de D' .

– On suppose que l'ordre k de ω le long de D' est $< i = \text{codim}(D')$. Par hypothèse, localement $p_*(\omega)$ est donnée par :

$$\frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dy_2}{y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dy_k}{y_k} \wedge f(y_1, \dots, y_n) dy_{k+1} \wedge \dots \wedge dy_n \quad \text{avec } k < i$$

et f holomorphe (localement au tour de D').

Si D' est un hyperplan, $p_*(\omega)$ est holomorphe au voisinage de D' et donc ω est holomorphe au voisinage de D , D n'est donc pas dans le diviseur des pôles de ω . On suppose donc que $i \geq 2$. D est la préimage de D' par un certain nombre d'éclatements. On suppose que pour savoir ce qui se passe dans $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ il suffit de regarder quand on éclate le long de D' . Ceci est assuré par le lemme 2.4.5 (voir un peu plus loin). En éclatant le long de D' on utilise les variables $y_1, y_1 X_2, \dots, y_1 X_i, y_{i+1}, \dots, y_n$. Sur l'éclaté ω est donné par :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_k}{X_k} \wedge f(y_1, y_1 X_2, \dots, y_1 X_i, y_{i+1}, \dots, y_n) y_1^{i-k} dX_{k+1} \wedge \dots \wedge dX_i \\ &\quad \wedge dy_{i+1} \wedge dy_n. \end{aligned}$$

D est donné par $y_1 = 0$ donc w a un zéro d'ordre $i - k - 1 \geq 0$, D n'est donc pas dans le diviseur des pôles de ω .

– Le cas $k \geq i$ se traite exactement de la même façon sauf qu'on trouve un pôle d'ordre 1 :

$$\omega = \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_i}{X_i} \wedge \frac{dy_{i+1}}{y_{i+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dy_k}{y_k} \wedge f(y_1, y_1 X_2, \dots, y_1 X_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \wedge dy_{k+1} \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Il reste à montrer que faire un éclatement suffit. C'est l'objet du lemme suivant dont la démonstration donne les calculs de façon explicite.

Le contexte et les notations :

Soit $Z_1 \subset \dots \subset Z_k \subset Z_{k+1} \subset \dots \subset Z_n \subset X$, X est une variété de dimension N , les Z_i sont des sous-variétés données par des équations affines. On note

$\pi_1 : X_1 \rightarrow X$	l'éclatement de	X	le long de	Z_1
$\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$	”	X_1	”	$\pi_1^{-1}(Z_2)$
$\pi_3 : X_3 \rightarrow X_2$	”	X_2	”	$(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(Z_3)$
...				

On pose $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$, $\widetilde{Z}_i = \pi^{-1}(Z_i)$. On note encore $\widehat{\pi}_i$ l'éclatement $\widehat{X}_i \rightarrow X$ le long de Z_i et $\widehat{Z}_i = \widehat{\pi}_i^{-1}(Z_i)$. On pose encore $d_i = \text{codim}(Z_i)$ et on suppose que Z_i est donné localement par $0 = z_1 = z_2 = \dots = z_{d_i}$ (z_1, \dots, z_N sont des coordonnées locales) et on a $d_1 > d_2 > \dots > d_n \geq 2$

Enfin on se donne une différentielle :

$$\omega = \frac{dz_{a_1}}{z_{a_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{a_s}}{z_{a_s}} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz}_{a_1} \wedge \dots \wedge dz_i \wedge \dots \wedge \widehat{dz}_{a_s} \wedge \dots \wedge dz_N$$

avec f holomorphe au voisinage de Z_k .

Lemme 2.4.5. *L'ordre du pôle, si pôle il y a, de $\pi^*(\omega)$ le long de \widetilde{Z}_k est le même que celui de $\widehat{\pi}^*(\omega)$ le long de \widehat{Z}_k . Si l'une des deux différentielles n'a pas de pôle, l'autre non plus et les ordres des zéros sont égaux.*

Démonstration. 1. Calcul de l'ordre du pôle ou du zéro de $\widehat{\pi}^*(\omega)$ le long de \widehat{Z}_i .

Quitte à réordonner les variables, Z_k est donné par $0 = z_1 = \dots = z_{d_k}$ et $\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N$ (f holomorphe au voisinage de Z_k). On a

$$\widehat{X}_k \subset X \times \mathbb{P}^{i-1} \quad \text{donné par } X_i z_j = X_j z_i$$

On se place par exemple sur l'ouvert affine $X_1 = 1$ (les calculs sont similaires sur les ouverts affines $X_j = 1$). Les nouvelles coordonnées sont donc : $z_1, X_2, \dots, X_{d_k}, z_{d_k+1}, \dots, z_N$.

si $s = d_k$

$$\widehat{\pi}^*(\omega) = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_k}}{X_{d_k}} \wedge f(z_1, z_1 X_2, \dots, z_1 X_{d_k}, z_{d_k+1}, \dots, z_N) dz_{d_k+1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

On trouve un pôle d'ordre 1 le long de $\widehat{\pi}^{-1}(Z_k)$ qui est donné par $z_1 = 0$.

si $s > d_k$

$$\widehat{\pi}^*(\omega) = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_k}}{X_{d_k}} \wedge \frac{dz_{d_k+1}}{z_{d_k+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, z_1 X_2, \dots, z_1 X_{d_k}, z_{d_k+1}, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N.$$

On trouve un pôle d'ordre 1 le long de $\widehat{\pi}^{-1}(Z_k)$.

si $s < d_k$

$$\widehat{\pi}^*(\omega) = dz_1 \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_1^{d_k-s-1} f(z_1, z_1 X_2, \dots, z_1 X_{d_k}, z_{d_k+1}, \dots, z_N) dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_k} \wedge dz_{d_k+1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

On trouve un zéro d'ordre $i - s - 1$ le long de $\widehat{\pi}^{-1}(Z_k)$.

2. Calcul de l'ordre du pôle ou du zéro de $\pi^*(\omega)$ le long de \widetilde{Z}_k On commence par regarder les éclatements π_α pour $\alpha < k$.

Le cas $\alpha = 1$.

Z_1 est donné par $z_1 = \dots z_{d_1} = 0$. On se place, cette fois, dans l'ouvert affine de l'éclatement $X_{d_1} = 1$ et on a comme nouvelles variables $X_1, \dots, X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N$ (les calculs sont "plus lisibles").

$\pi_1^{-1}(Z_j)$ est donné par :

$$\pi_1^{-1}(Z_j) : X_1 = \dots = X_{d_j} = 0 \quad \text{pour } j > 1.$$

si $s < d_k$ alors on peut supposer que $\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N$ avec $s < d_k < d_1$. On a alors :

$$\widehat{\pi}^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} f(z_{d_1} X_1, \dots, z_{d_1} X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N) dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

Relativement à Z_k et $\pi_1^{-1}(Z_k)$ la situation n'a pas changé. On peut donc itérer l'opération pour π_2, \dots, π_{k-1} .

si $s = d_k$ Ce cas se traite exactement comme le précédent.

si $s > d_k$ Dans ce cas il faut raffiner un peu les calculs car ω s'écrit $\frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{d_k}}{z_{d_k}} \wedge \frac{dz_{d_k+1}}{z_{d_k+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N$. Si $d_1 > s$. Les calculs sont cependant les mêmes que précédemment. On peut itérer le processus tant que $d_i > s$ ($i < k$). Si $d_i \leq s$

($k > i \geq 1$), la "partie polaire" de $\pi_i^*(\omega)$ est donnée (quitte à renommer les variables) par :

$$\frac{dX_1}{X_1} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_i}}{X_{d_i}} \wedge \frac{dz_{d_i+1}}{z_{d_i+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s}.$$

Cependant, comme $\pi_i^{-1}(Z_k) = \widetilde{Z}_k$ est donné par $X_1 = \dots = X_{d_k} = 0$ ($d_k < d_i$), la situation relativement à Z_k et à \widetilde{Z}_k ne change pas. On peut donc continuer tant que $\alpha \leq k - 1$.

On est ramené à la situation suivante : $k = 1$.

si $s = d_1$ Dans l'ouvert affine $X_{d_1} = 1$ on a :

$$\pi_1^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{d_1}}{z_{d_1}} \wedge f(X_1 z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, z_{d_1+1}, \dots, z_N) dz_{d_1+1} \wedge \dots \wedge dz_N.$$

$\pi_1^{-1}(Z_2)$ est donné par $X_1 = \dots = X_{d_2} = 0$. On éclate le long de $\pi_1^{-1}(Z_2)$ et on se place dans l'ouvert $Y_{d_2} = 1$ avec les variables $X_{d_2}, Y_1, \dots, Y_{d_2-1}, X_{d_2+1}, \dots, X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N$. On a alors ($d_2 < d_1$) :

$$\begin{aligned} \pi_2^* \pi_1^*(\omega) &= \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dY_{d_2-1}}{Y_{d_2-1}} \wedge \frac{dX_{d_2}}{X_{d_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_1-1}}{X_{d_1-1}} \wedge \frac{dz_{d_1}}{z_{d_1}} \wedge \\ &\quad f(Y_1 X_{d_2} z_{d_1}, \dots, Y_{d_2-1} X_{d_2} z_{d_1}, X_{d_2} z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) \\ &\quad dz_{d_1+1} \wedge \dots \wedge dz_N \end{aligned}$$

Comme $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$ la situation n'a pas bougé. On recommence avec $\alpha = 3$ et $d_3 < d_2$. On trouve au final un pôle d'ordre 1 le long de \widetilde{Z}_1 .

si $s > d_1$ Ce cas se traite comme le précédent et l'on trouve aussi un pôle d'ordre 1 le long de \widetilde{Z}_1

si $s < d_1$ On a :

$$\begin{aligned} \pi_1^*(\omega) &= \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} f(X_1 z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) dX_{s+1} \\ &\quad \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N \end{aligned}$$

On doit ici distinguer deux cas :

$s \geq d_2$ On trouve alors en éclatant le long de $\pi_1^{-1}(Z_2)$: $X_1 = \dots = X_{d_2}$ et en regardant dans l'ouvert $Y_{d_2} = 1$:

$$\begin{aligned} \pi_2^* \pi_1^*(\omega) &= \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \frac{dY_2}{Y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dY_{d_2-1}}{Y_{d_2-1}} \wedge \frac{dX_{d_2}}{X_{d_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} \\ &\quad f(Y_1 X_{d_2} z_{d_1}, \dots, Y_{d_2-1} X_{d_2} z_{d_1}, X_{d_2} z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) \\ &\quad dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N \end{aligned}$$

Comme $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$ on voit que l'ordre du zéro est resté constant égal à $d_1 - s - 1$.

$s < d_2$ Le même calcul que précédemment donne cette fois :

$$\begin{aligned} \pi_2^* \pi_1^*(\omega) &= \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \frac{dY_2}{Y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dY_s}{Y_s} \wedge X_{d_2}^{d_2-s-1} z_{d_1}^{d_1-s-1} \\ &\quad f(Y_1 X_{d_2} z_{d_1}, \dots, Y_{d_2-1} X_{d_2} z_{d_1}, X_{d_2} z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) \\ &\quad dY_{s+1} \wedge \dots \wedge dY_{d_2-1} \wedge dX_{d_2} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N \end{aligned}$$

Comme $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$, on voit que l'ordre du zéro est resté constant égal à $d_1 - s - 1$.

Dans les deux cas la situation n'a pas changé relativement à $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$. Les éclatements successifs pour $i \geq 3$ ne changeront en rien l'ordre du zéro le long de l'image réciproque de Z_1 . D'où le lemme. \square

Démonstration du lemme 2.4.4. Soit $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial \mathcal{M}_{0,n+3})$. Soit D une composante irréductible du bord dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$. D s'envoie (par p) dans $(\mathbb{P}^1)^n$ sur D' . On va montrer qu'au voisinage de D' , $p_*(\omega)$ s'écrit :

$$p_*(\omega) = \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dy_2}{y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dy_k}{y_k} \wedge f(y_1, \dots, y_n) dy_{k+1} \wedge \dots \wedge dy_n$$

où les y_i sont des coordonnées locales définissant D' par $y_1 = \dots = y_{\text{codim}(D')} = 0$ et f est holomorphe au voisinage de D' . On pose $i = \text{codim}(D')$. On est dans la situation suivante :

$$Z_1 \subset \dots \subset Z_{n-i+1} = D' \subset \dots \subset Z_n$$

avec $\text{codim}(Z_j) = n - j + 1$, les Z_j étant donnés par des équations affines. Sans restreindre la généralité on peut supposer que :

$$Z_j : y_1 = \dots = y_{n-j+1} = 0.$$

Avec ces notations, $p_*(\omega)$ s'écrit :

$$\varpi = p_*(\omega) = \frac{dy_1}{y_1^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dy_n}{y_n^{\alpha_n}} f(y_1, \dots, y_n) \quad f \text{ holomorphe au voisinage de } D'$$

On veut montrer que $\alpha_j \leq 1 \quad \forall j$. Raisonnons par l'absurde. Soit k tel que $\alpha_k \geq 2$. On va montrer que ω n'est pas une forme différentielle logarithmique.

On reprend les notations précédentes pour la suite d'éclatements nécessaire pour remonter dans $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$. On va montrer que ω a un pôle d'ordre supérieur à 2. Après les éclatements π_1, \dots, π_{n-k} , on a, en gardant toujours la variable avec l'indice le plus grand, et en renommant les variables :

$$(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k})^*(\varpi) = \frac{dX_1}{X_1^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_k}{X_k^{\alpha_k}} \wedge \underbrace{g(z_{k+1}, \dots, z_n)}_{\text{méromorphe}} \underbrace{f'(X_1, \dots, X_k, z_{k+1}, \dots, z_n)}_{\text{holomorphe}} dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_n.$$

On fait maintenant l'éclatement le long de $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k})^{-1}(Z_{n-k+1})$ qui est donné par l'équation $X_1 = \dots = X_k = 0$. On se place dans l'ouvert U défini par $Y_1 = 1$ avec les coordonnées $X_1, Y_2, \dots, Y_k, z_{k+1}, \dots, z_n$. On obtient alors :

$$(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k+1})^*(\varpi) = \frac{dX_1}{X_1^{\beta_1}} \wedge \frac{dY_2}{Y_2^{\alpha_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dY_k}{Y_k^{\alpha_k}} \wedge \underbrace{g(z_{k+1}, \dots, z_n)}_{\text{mériomorphe}} \underbrace{f'(X_1, Y_2 X_1 \dots X_k X_1, z_{k+1}, \dots, z_n)}_{\text{holomorphe}} dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_n$$

avec $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 + \dots + \alpha_k - 1$.

On considère alors l'ouvert $V = U \setminus (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k})^{-1}(Z_n)$. Cet ouvert ne sera pas "touché" par les éclatements suivants. Soit W l'image de V dans $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$. L'hyperplan $Y_k = 0$ s'envoie dans $W \subset \overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ sur une sous-variété Z irréductible de codimension 1. ω admet alors un pôle d'ordre supérieur ou égal à deux le long de Z , ce qui est absurde. □

Ceci termine la démonstration du théorème 2.4.3. □

Application dans un cas particulier. Comme à l'accoutumé on fixe (envoie) trois points sur $0, 1, \infty$ et un point générique (au sens commun du mot) de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ est désigné par $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$. $p : \mathcal{M}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$ désigne la projection habituelle.

Le théorème précédent (2.4.3) permet d'obtenir une description combinatoire explicite des diviseurs des pôles d'une forme différentielle logarithmique ω quand elle peut s'écrire sous la forme :

$$\omega = \frac{dz_n}{z_n - \varepsilon_n} \wedge \dots \wedge \frac{dz_1}{z_1 - \varepsilon_1} \quad \text{avec } \varepsilon_i \in \{0, 1, z_j \text{ tel que } j \neq i\}$$

Le cas particulier que l'on regarde ici est celui où tous les ε_i sont dans $\{0, 1\}$ (voir 3.2 pour un lien avec les valeurs multi-zeta). Soit une fonction $\varepsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$, $i \mapsto \varepsilon_i$. On pose alors :

$$\Omega(\varepsilon) = \bigwedge_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i - \varepsilon_i}$$

Pour α dans $\{0, 1, \infty\}$ on définit $S(\alpha, \varepsilon)$ par :

$$S(0, \varepsilon) = \{z_i \mid \varepsilon_i = 0\} \quad S(1, \varepsilon) = \{z_i \mid \varepsilon_i = 1\} \quad S(\infty, \varepsilon) = S(0, \varepsilon) \cup S(1, \varepsilon) = \{z_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Définition 2.4.1. On dira qu'une 2-partition de $S = \{0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty\}$ est de *type α respectant ε* si l'une de ses parties est de la forme $\alpha \cup T$ avec $T \subset S(\alpha, \varepsilon)$

Le résultat suivant, démontré dans [GM02][prop 3.1], découle facilement du théorème 2.4.3. ci-dessus :

Proposition 2.4.6. *Le diviseur des singularités de $\Omega(\varepsilon)$ dans $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ est l'union $A(\varepsilon)$ des diviseurs de bord correspondant aux 2-partitions stables de $\{0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty\}$ (composantes du bord de codimension 1) qui sont d'un type respectant ε .*

Démonstration. On a tout d'abord :

$$\omega = p_*(\Omega) = \frac{dx_n}{x_n - \varepsilon_n} \wedge \dots \wedge \frac{dx_1}{x_1 - \varepsilon_1} \quad \text{les } x_i \text{ sont les coordonnées sur } (\mathbb{P}^1)^n$$

On remarque tout d'abord que ω a un pôle d'ordre k le long des sous-variétés de la forme :

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = \infty.$$

Ces sous-variétés sont de codimension k . Les composantes irréductibles de $\overline{\partial\mathcal{M}_{0,n+3}}$ qui leurs correspondent sont donc (d'après le théorème 2.4.3) dans le diviseur des singularités de $\Omega(\varepsilon)$. Ce sont justement toutes les 2-partitions de type ∞ respectant ε .

Soit $D = z_{i_1} \dots z_{i_k} 0 | \sigma 1 \infty$ une partition de type 0 respectant ε ($\sigma \cup \{z_{i_1}, \dots, z_{i_k}\} = \{z_1, \dots, z_n\}$). L'image D' de D par p est définie par $x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0$ et est de codimension k . Comme $\varepsilon_j = 0 \quad \forall j \in \{i_1, \dots, i_k\}$, ω s'écrit :

$$\omega = \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{i_k}}{x_{i_k}} \wedge f(x_1, \dots, \widehat{x_{i_l}}, \dots, x_n)$$

où f est une $(n - k)$ -forme différentielle méromorphe (à $n - k$ variables). Le pôle de ω le long de D' est donc d'ordre k et D est bien dans le diviseur des singularités de $\Omega(\varepsilon)$.

On raisonne de même si D est une 2-partition de type 1 respectant ε .

Soit D une 2-partition d'aucun des types définis précédemment.

a) D est de la forme

$$z_{i_1} \dots z_{i_k} | \sigma 0 1 \infty$$

avec $\sigma \cup \{z_{i_1}, \dots, z_{i_k}\} = \{z_1, \dots, z_n\}$. Alors D' est défini par $x_{i_1} = \dots = x_{i_k}$ et ω n'a pas de pôle le long de D' ; donc D n'est pas dans le diviseur des singularités de Ω .

b) D est de la forme

$$z_{i_1} \dots z_{i_k} \delta | \sigma (1 - \delta) \infty \quad \delta = 0, 1.$$

Supposons par exemple que $\delta = 0$. L'image D' de D par p est définie par $x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0$ et est de codimension k . Comme D n'est pas de type 0 respectant ε , on a $r \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\varepsilon_{i_r} = 1$ donc :

$$\omega = \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1} - \varepsilon_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{i_r}}{x_{i_r} - 1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{i_k}}{x_{i_k} - \varepsilon_{i_k}} \wedge f(x_1, \dots, \widehat{x_{i_l}}, \dots, x_n)$$

où f est une $(n - k)$ -forme différentielle méromorphe (à $n - k$ variables).

Donc l'ordre du pôle de ω le long D' est au plus $k - 1 < k$. Donc D n'est pas dans le diviseur des singularités de Ω .

□

Chapitre 3

Multi-zeta, algèbre MZV et battages

Cette partie rappelle les différentes définitions et constructions des valeurs multi-zeta ainsi que leurs propriétés élémentaires.

3.1 Définitions

Introduction

Définition 3.1.1. Pour tout uplet $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ d'entiers positifs tel que $k_1, \dots, k_{m-1} \geq 1$ et $k_m \geq 2$, on définit la **valeur multi-zeta** (**MZV**, diminutif de l'anglais *multi-zeta value*) correspondante par le nombre réel vers lequel converge la série :

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}}$$

On définit le **poinds** de \mathbf{k} par : $wt(\mathbf{k}) = k_1 + \dots + k_m$ et sa profondeur par : $dp(\mathbf{k}) = m$.

On parle aussi parfois de sommes de Zagier (*Zagier sum*), de séries multi-harmoniques (*multiple harmonic series*) ou de valeurs poly-zeta (*poly zeta value*).

Exemple 3.1.1.

$dp = 1,$	$wt = k \geq 2 (k \in \mathbb{N})$: $\zeta(k)$ (valeur de la fonction zeta de Riemann)
$wt = 1,$: pas de valeur définie
$wt = 2,$	$dp = 1$: $\zeta(2)$
$wt = 3,$	$dp = 1$: $\zeta(3)$
	$dp = 2$: $\zeta(1, 2)$
$wt = 4,$	$dp = 1$: $\zeta(4)$
	$dp = 2$: $\zeta(1, 3), \zeta(2, 2)$
	$dp = 3$: $\zeta(1, 1, 2)$

Algèbre MZV

Définition 3.1.2. Pour tout entier naturel a , on définit Z_p comme le \mathbb{Q} -espace vectoriel ($\subset \mathbb{R}$) engendré par toutes les MZV de poids p , $Z_p = \langle \zeta(\mathbf{k}) \text{ tel que } wt(\mathbf{k}) = p \rangle_{\mathbb{Q}}$. On pose d'autre part $Z_0 = \mathbb{Q}$. Pour tout couple d'entiers naturels m et p on définit $Z_p^{\leq m}$ comme le sous-espace de Z_p engendré par les MZV de profondeur m , $Z_p^{\leq m} = \langle \zeta(\mathbf{k}) \text{ tel que } wt(\mathbf{k}) = p, dp(\mathbf{k}) \leq m \rangle_{\mathbb{Q}}$.
 Z_p admet une filtration croissante par le poids : $Z_p^{\leq m}$.

$$\langle \zeta(p) \rangle_{\mathbb{Q}} = Z_p^{\leq 1} \subset Z_p^{\leq 2} \subset \dots \subset Z_p^{\leq p-1} \subset \mathbb{R}$$

Remarque 3. Il est à noter que Z_p n'est pas gradué par la profondeur : $\zeta(3) = \zeta(1, 2)$.

Définition 3.1.3. Soit Z la somme directe **formelle** des Z_p pour $p \geq 0$.

$$Z = \bigoplus_{p \geq 0} Z_p.$$

On définit aussi $Z_{>0} = \bigoplus_{p > 0} Z_p$. Ces deux espaces sont des \mathbb{Q} -espaces vectoriels gradués par le poids.

Il est à remarquer que la somme directe, dans ces définitions, "supprime" les relations linéaires potentielles mais conjecturalement inexistantes entre éléments de poids différents.

Lemme 3.1.1. *Le produit de deux multi-zeta $\zeta(\mathbf{k}_1)$ et $\zeta(\mathbf{k}_2)$ avec $wt(\mathbf{k}_1) = a$, $dp(\mathbf{k}_1) = l$ et $wt(\mathbf{k}_2) = b$, $dp(\mathbf{k}_2) = m$ appartient à l'espace vectoriel $Z_{a+b}^{\leq l+m}$*

Ce résultat est une conséquence directe de la définition et d'une manipulation de familles sommables. Nous reviendrons plus en détail sur ce résultat quand nous parlerons des battages (cf. 3.3 et plus particulièrement la proposition 3.3.1)

Conjecture (Conjecture de la dimension, Conjecture de Zagier). On conjecture le fait suivant $\dim_{\mathbb{Q}}(Z_p) = d_p$ où d_p est donné par la formule de récurrence

$$d_p = d_{p-2} + d_{p-3} \quad d_1 = 0 \quad d_2 = 1.$$

Remarque 4. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de relation entre multi-zeta de poids différents, l'on sait par contre qu'il existe de multiples relations entre multi-zeta de même poids. Par exemple pour $p = 11$ on a $\dim_{\mathbb{Q}}(Z_{11}) = 9$ alors qu'il y a 512 valeurs multi-zeta. (Voir le tableau dans l'article de Furusho [Fur03][page 4]).

3.2 Intégrales itérées et multi-zeta

Définition 3.2.1. Soit $\omega_1, \dots, \omega_n$ des 1-formes différentielles sur \mathbb{C} . L'intégrale itérée $\int_0^1 \omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1$ est définie de façon inductive comme $\int_0^1 \omega_n(t_n) \int_0^{t_n} \omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1$. On obtient donc la formule :

$$\int_0^1 \omega_n \circ \dots \circ \omega_1 = \int_0^1 \left(\omega_n(t_n) \left(\int_0^{t_n} \omega_{n-1}(t_{n-1}) \left(\int_0^{t_{n-1}} \omega_{n-2}(t_{n-2}) \dots \left(\int_0^{t_2} \omega_1(t_1) \right) \dots \right) \right) \right)$$

Proposition 3.2.1 (dû à Kontsevitch). *Pour chaque uplet (k_1, \dots, k_m) définissant une valeur multi-zeta, $\zeta(k_1, \dots, k_m)$ peut s'écrire avec une intégrale itérée par la formule suivante :*

$$\zeta(k_1, \dots, k_m) = \int_0^1 \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u} \circ \frac{du}{1-u}}_{k_m} \circ \frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{1-u} \circ \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u} \circ \frac{du}{1-u}}_{k_1}$$

Démonstration. On calcule l'intégrale. On va procéder par récurrence sur $n = k_1 + \dots + k_m$ et pour cela on étudie aussi le cas où $k_m = 1$ (la première forme est $\frac{du}{1-u}$). Le calcul montrera que ce cas est divergent. On se donne $0 < z < 1$ et on calcule l'intégrale entre 0 et z . On calcule entre 0 et z pour être sûr de pouvoir développer les fonctions en séries entières. Dans les différentes étapes toutes les fonctions sont positives sur $[0; z]$, les interversions "somme-intégrale" sont donc possibles (Thm. Beppo-Levy). On montre en fait :

$$\sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} = \int_0^z \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u} \circ \frac{du}{1-u}}_{k_m} \circ \frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{1-u} \circ \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u} \circ \frac{du}{1-u}}_{k_1} \quad (3.2.0.1)$$

Le cas $n = 1$ est évident.

Le cas $n = 2$: il y a deux intégrales à étudier : $\int_0^z \frac{du_2}{u_2} \int_0^{u_2} \frac{du_1}{1-u_1}$ et $\int_0^z \frac{du_2}{1-u_2} \int_0^{u_2} \frac{du_1}{1-u_1}$. On traite ce deuxième cas.

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{du_2}{1-u_1} \int_0^{u_2} \frac{du_1}{1-u_1} &= \int_0^z \frac{du_2}{1-u_2} \int_0^{u_2} \sum_{i \geq 0} u_1^i du_1 = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i+1} \int_0^z \frac{du_2}{1-u_2} u_2^{i+1} \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i+1} \int_0^z \sum_{j \geq 0} u_2^{j+i+1} du_2 = \sum_{i, j \geq 0} \frac{1}{i+1} \frac{z^{j+i+2}}{j+i+2} \\ &= \sum_{0 \leq n_1 \leq n_2} \frac{z^{n_2}}{n_1 n_2} \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre z vers 1 (Le thm de convergence monotone assure que l'on a bien l'égalité voulue). Il est clair que dans ce cas la somme obtenue diverge. Dans l'autre cas la somme converge vers $\zeta(2)$.

Pas de la récurrence. On se donne (k_1, \dots, k_m) . On suppose par exemple que $k_m > 1$, alors le membre de droite de l'égalité 3.2.0.1 vaut par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{du_n}{u_n} \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{u_n^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m-1}} &= \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m-1}} \int_0^z u_n^{n_m-1} du_n \\ &= \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} \end{aligned}$$

Le cas $k_m = 1$ se traite de même. □

On peut ainsi définir un "codage" des valeurs multi-zeta, avec des mots, directement lié à l'associateur de Drinfel'd. On pose : $\mathbb{A} = \mathbb{Q} \langle A, B \rangle$ l'algèbre non commutative de polynômes en deux variables. On notera M le sous-espace de \mathbb{A} défini par $M = A \cdot \mathbb{A} \cdot B$. On définit ensuite une application \mathbb{Q} -linéaire $Z : M \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\begin{aligned} Z(A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \dots A^{p_k} B^{q_k}) &= \int_0^1 \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u}}_{p_1} \circ \underbrace{\frac{du}{1-u} \circ \dots \circ \frac{du}{1-u}}_{q_1} \circ \frac{du}{u} \dots \frac{du}{1-u} \circ \\ &\quad \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u}}_{p_k} \circ \underbrace{\frac{du}{1-u} \circ \dots \circ \frac{du}{1-u}}_{q_k} \\ &= \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{q_k-1}, p_k + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_{k-1}-1}, p_{k-1} + 1, \dots, 1, p_1 + 1) \\ &= \zeta(W) \end{aligned}$$

avec $p_i, q_i \geq 1$, et $W = A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \dots A^{p_k} B^{q_k}$.

Définition 3.2.2. On appellera *mot* un élément de \mathbb{A} qui est un monome unitaire, cependant 1 ne sera pas un mot. On définit le poids d'un mot W par $wt(W) =$ "la somme des exposants de A et de B " et sa profondeur par $dp(W) =$ "la somme des exposants de B ".

On dira d'un mot W qu'il est *convergent* si $W \in M$.

3.3 Battages

Définitions. On définit ici deux opérations sur les mots qui se traduisent (à une précaution près : les régularisations) de façon admirable sur les valeurs multi-zeta correspondantes.

Définition 3.3.1 (Battage ou Mélange). Le produit mélangeant (*shuffle product*) " $\text{\textcircled{H}}$ " est une application \mathbb{Q} -bilinéaire $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, définie sur les mots par récurrence :

$$\begin{aligned} \text{S1} : W \text{\textcircled{H}} 1 &= 1 \text{\textcircled{H}} W = W \\ \text{S2} : UW \text{\textcircled{H}} VW' &= U(W \text{\textcircled{H}} VW') + V(UW \text{\textcircled{H}} W') \quad \text{avec } U, V \in \{A, B\} \end{aligned}$$

pour tous mots W, W' dans \mathbb{A} . Ce produit est associatif et commutatif.

Il correspond, pour deux suites finies d'éléments (ici les lettres A et B) (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_m) , à mélanger l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ en conservant l'ordre de chacune des séquences de toutes les façons possibles puis à faire la "somme" de ces mélanges.

Exemple 3.3.1. Faisons le produit de $W_1 = AB$ par lui-même :

$$AB \text{\textcircled{H}} AB = ABAB + AAB B + AAB B + AAB B + AAB B + ABAB = 2ABAB + 4AAB B$$

Définition 3.3.2 (Battage contractant ou Mélange contractant). Le produit de mélange contractant est un peu plus compliqué à décrire. On se donne un mot : $W = A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \dots A^{p_k} B^{q_k}$ on le réécrit sous la forme $W = y_{s_1} \dots y_{s_{dp(W)}}$ avec $y_{s_i} = A^{s_i-1} B$ (y_s est toujours défini par $A^{s-1} B$).

On ne s'intéresse dans un premier temps qu'aux mots de $\mathbb{A} \cdot B$, et on définit le mélange contractant (associatif et commutatif) par récurrence avec les règles :

$$\begin{aligned} \mathbf{S1} : 1 * W &= W \\ \mathbf{S2} : y_s W * y_t W' &= y_s(W * y_t W') + y_t(y_s W * W') + y_{s+t}(W * W') \end{aligned}$$

pour tous mots W, W' dans $\mathbb{A} \cdot B$.

Exemple 3.3.2. On reprend l'exemple précédent :

$$AB * AB = y_2 * y_2 = y_2 y_2 + y_2 y_2 + y_{2+2} = 2y_2 y_2 + y_4 = 2ABAB + AAAB$$

Par convention, on considérera que l'application qui à un mot de M associe la valeur multi-zeta correspondante est linéaire, c'est à dire que l'on notera $\zeta(W + W')$ pour $\zeta(W) + \zeta(W')$ On a la propriété remarquable suivante :

Proposition 3.3.1. Soit deux mots dans $M = A \cdot \mathbb{A} \cdot B : W_1, W_2$. Alors, avec les notations précédentes, on a :

$$\zeta(W_1)\zeta(W_2) = \zeta(W_1 \text{III} W_2) \quad (3.3.0.2)$$

$$= \zeta(W_1 * W_2) \quad (3.3.0.3)$$

Démonstration. On se donne deux mots W_1, W_2 de longueurs n et m respectivement : $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ et $\zeta(l_1, \dots, l_m)$. On commence par 3.3.0.2 :

$$\begin{aligned} \zeta(W_1)\zeta(W_2) &= \left(\int_0^1 \frac{dt_n}{t_n} \dots \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \left(\int_0^1 \frac{ds_m}{s_m} \dots \frac{ds_1}{1-s_1} \right) \\ &= \int_{\Delta} \frac{dt_n}{t_n} \dots \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{ds_m}{s_m} \dots \frac{ds_1}{1-s_1} \quad (\text{Fubini}) \end{aligned}$$

Δ est l'ensemble $\{0 < t_1 < \dots < t_n < 1\} \times \{0 < s_1 < \dots < s_m < 1\}$. Or Δ admet une décomposition en simplexes disjoints à un ensemble de mesure nulle près :

$$\begin{aligned} \coprod \{0 < t_1 < \dots < t_n < s_1 < \dots < s_n < 1\} \coprod \{0 < t_1 < \dots < s_1 < t_n < \dots < s_n < 1\} \\ \coprod \{0 < t_1 < \dots < s_1 < s_2 < t_n < \dots < s_n < 1\} \coprod \dots \end{aligned}$$

L'intégrale sur Δ est donc égale à la somme des intégrales sur chacun des simplexes. Or

$$\int_{0 < x_1 < \dots < x_{n+m}} \frac{dx_{m+n}}{x_{m+n}} \dots \frac{dx_1}{1-x_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_i \in \{t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n\} \\ \text{soit } x_k = t_i \text{ et } x_l = t_j, \text{ si } i < j \text{ alors } x_k < x_l \\ \text{soit } x_k = s_i \text{ et } x_l = s_j, \text{ si } i < j \text{ alors } x_k < x_l \end{cases}$$

est exactement un terme de la somme $\zeta(W_1 \text{III} W_2)$. On a bien l'identité cherchée :

$$\zeta(W_1)\zeta(W_2) = \zeta(W_1 \text{III} W_2)$$

Voyons maintenant 3.3.0.3 : On pose $W_1 = y_{k_r} \dots y_{k_1}$ et $W_2 = y_{l_s} \dots y_{l_1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\zeta(W_1)\zeta(W_2) &= \left(\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \right) \left(\sum_{0 < m_1 < \dots < m_s} \frac{1}{m_1^{l_1} \dots m_s^{l_s}} \right) \\
&= \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_r \\ 0 < m_1 < \dots < m_s}} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r} m_1^{l_1} \dots m_s^{l_s}} = \sum_{\substack{\forall i \neq j \\ n_i \neq m_j}} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r} m_1^{l_1} \dots m_s^{l_s}} \\
&+ \sum_{\substack{\exists!(i_1, j_1) \\ n_{i_1} = m_{j_1}}} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_i^{k_i+l_j} \dots n_r^{k_r} m_1^{l_1} \dots m_j^{l_j} \dots m_s^{l_s}} + \sum_{\substack{\exists(i_1, j_1), (i_2, j_2) \\ n_{i_k} = m_{j_k} \text{ et } n_i \neq m_j \\ \text{si } i \neq i_k, j \neq j_k}} \dots + \dots \\
&\dots + \sum_{\substack{\forall i, \exists j \\ n_i = m_j}} \frac{1}{\dots n_i^{k_i+l_j} \dots} = \zeta(W_1 * W_2)
\end{aligned}$$

Les termes qui sont "en plus" du simple battage dans le battage contractant correspondent aux termes de bord dans la somme : $n_i = n_j$. \square

Propriété du produit. D'après ce que nous venons de voir, le produit de deux valeurs multi-zeta donne une combinaison linéaire de valeur multi-zeta. On a donc la propriété suivante :

Proposition 3.3.2. Z est une algèbre graduée, filtrée (i.e. $Z_a^{\leq l} \cdot Z_b^{\leq m} \subset Z_{a+b}^{\leq l+m}$) et $Z_{>0}$ est l'idéal homogène de Z .

On appelle Z l'algèbre *MZV*. On a un homomorphisme $d : Z \rightarrow \mathbb{R}$ qui est l'identité sur chaque facteur Z_p .

Conjecture (Conjecture de la somme directe). L'homomorphisme d est injectif, c'est à dire qu'il n'y a en effet aucune relation de dépendance linéaire entre différents éléments de poids différents.

Remarque 5. Cette conjecture est extrêmement forte : elle implique par exemple la transcendance des valeurs multi-zeta. Une relation algébrique :

$$\zeta(\mathbf{k})^n + a_{n-1}\zeta(\mathbf{k})^{n-1} + \dots + a_1\zeta(\mathbf{k}) + a_0 = 0$$

donne une relation entre des *MZV* de poids différents.

3.4 Régularisations

On peut associer à une valeur $\zeta(W)$ des mots n'étant pas dans M . On parle alors de régularisation. Il y a deux types de régularisations, les régularisations "sha" (ζ^{III}) et "étoile" (ζ^*), chacune compatible avec un produit.

Proposition 3.4.1 (Définition). Soit $W = A^{p_1} B^{q_1} \dots A^{p_k} B^{q_k}$. Alors l'intégrale itérée :

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u}}_{p_1} \circ \underbrace{\frac{du}{1-u} \circ \dots \circ \frac{du}{1-u}}_{q_1} \circ \frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{1-u} \circ \underbrace{\frac{du}{u} \circ \dots \circ \frac{du}{u}}_{p_k} \circ \underbrace{\frac{du}{1-u} \circ \dots \circ \frac{du}{1-u}}_{q_k}$$

est une série en ε et $\log(\varepsilon)$, c'est à dire : $I(\varepsilon) \in \mathbb{R}[[\varepsilon, [\log(\varepsilon)]]]$. On note $\zeta^{\text{III}}(W)$ le terme constant de cette série.

Démonstration. On fait une preuve par récurrence sur le nombre d'intégrales. Comme tout est positif on est autorisé (Beppo-Levy) à intervertir intégrales et signes de sommes. Ensuite une intégration directe (par exemple avec Maple) donne :

$$\int_y^1 x^k \log(x)^l dx = \frac{-(-\Gamma(l+1)(-k-1)^{-l} + l\Gamma(l, -k \log(y) - \log(y))(-k-1)^{-l} + \log(y)^l y^{k+1})}{(k+1)}$$

avec $\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} * t^{a-1} dt$ qui est analytique pour $z > 0$. Ce qui assure le résultat. \square

La régularisation III vérifie la propriété suivante :

Proposition 3.4.2. *i) $\zeta^{\text{III}}(W) = \zeta(W)$ pour tout mot W convergent ($W \in a \cdot \mathbb{A} \cdot B$)
ii) $\zeta^{\text{III}}(W)\zeta^{\text{III}}(W') = \zeta(W \text{III} W')$ pour tout mot W, W'*

Remarque 6. Pour une expression explicite de $\zeta^{\text{III}}(W)$, on ira voir [Fur03][prop 3.2.3 pages 11-12].

La régularisation * n'est définie que pour les mots dans $\mathbb{A} \cdot B$.

Définition 3.4.1. On pose :

$$\tilde{\Phi} = \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \zeta^{\text{III}}(A^{n-1} B) B^n}_{\Phi_{cor}} + \underbrace{\sum_{W \in \mathbb{A} B} \zeta^{\text{III}}(W) W}_{\Pi_B(\Phi_Z)}$$

où $\Phi_Z = \sum_W \zeta^{\text{III}}(W) W$ est lié à l'associateur de Drinfel'd ($= \sum_W (-1)^{dp(W)} \zeta^{\text{III}}(W) W$), Π_B est la projection sur $\mathbb{A} \cdot B$ et Φ_{cor} un terme correcteur.

$\zeta^*(W)$ est défini comme le coefficient de W dans $\tilde{\Phi}$.

Remarque 7. Si W n'est pas une puissance de B alors $\zeta^*(W) = \zeta^{\text{III}}(W)$.

Proposition 3.4.3. *i) $\zeta^*(W) = \zeta(W)$ pour tout mot W convergent ($W \in a \cdot \mathbb{A} \cdot B$).
ii) $\zeta^*(W)\zeta^*(W') = \zeta(W * W')$ pour tout mot W, W' dans $\mathbb{A} \cdot B$.*

Chapitre 4

Multi-zeta sur $\mathcal{M}_{0,n}$: études

4.1 Conjecture sur les périodes de $\mathcal{M}_{0,n}$

4.1.1 Énoncé

Comme à l'accoutumée on fixe (envoie) trois points sur $0, 1, \infty$ et un point générique (au sens commun du mot) de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ est désigné par $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$. On note $\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})$ la cellule de $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ correspondant à l'ordre cyclique $\rho : 0 < z_1 < \dots < z_n < 1 < \infty < 0$ (cf 1.2). Soit $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$. On note $A(\omega)$ le diviseur des singularités de ω . On rappelle qu'on note Z_n l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} engendré par les valeurs multi-zeta de poids n .

Ceci posé, on peut énoncer la conjecture fondamentale suivante :

Conjecture. Si $A(\omega)$ est disjoint de $\partial\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})$ alors l'intégrale suivante converge et :

$$\int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})} \omega \in Z_n.$$

C'est à dire que l'intégrale est une combinaison linéaire de MZV de poids n

On cherche à répondre à cette question dans un premier temps pour ω de la forme :

$$\omega = \frac{dz_1}{z_1 - \varepsilon_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n - \varepsilon_n} \quad \varepsilon_i \in \{0, 1, z_j \text{ tel que } j \neq i\}.$$

4.1.2 Le cas connu : $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Un rappel de notations. On se donne, ici, une fonction $\varepsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$, $i \mapsto \varepsilon_i$. On pose alors :

$$\Omega(\varepsilon) = \bigwedge_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i - \varepsilon_i}.$$

En suivant les notations de Goncharov ([GM02]), voir prop. 2.4.6. Pour α dans $\{0, 1, \infty\}$ on définit $S(\alpha, \varepsilon)$ par :

$$S(0, \varepsilon) = \{z_i \mid \varepsilon_i = 0\} \quad S(1, \varepsilon) = \{z_i \mid \varepsilon_i = 1\} \quad S(\infty, \varepsilon) = S(0, \varepsilon) \cup S(1, \varepsilon) = \{z_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

On dira qu'une 2-partition de $S = \{0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty\}$ est de *type α respectant ε* si l'une de ses parties est de la forme $\alpha \cup T$ avec $T \subset S(\alpha, \varepsilon)$.

On a déjà vu la proposition suivante 2.4.6, redémontrant le résultat de Goncharov ([GM02][prop. 3.1]) :

Proposition 4.1.1. *Le diviseur des singularités de $\Omega(\varepsilon)$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{0, n+3}$ est l'union $A(\varepsilon)$ des diviseurs de bord correspondant aux 2-partitions stables de $\{0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty\}$ (composantes du bord de codimension 1) qui sont d'un type respectant ε .*

Goncharov note $\mathcal{M}_{0, n+3}^\rho(R)$ la cellule de $\mathcal{M}_{0, n+3}$ correspondant à l'ordre cyclique $\rho : 0 < z_1 < \dots < z_n < 1 < \infty < 0$ (cf 1.2), il obtient alors le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.2 ([GM02][page 10, coro. 3.2]). *On suppose que $n \geq 2$ et que ε vérifie $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_n = 0$. Alors $A(\varepsilon)$ n'intersecte pas de bord de $\mathcal{M}_{0, n+3}^\rho$.*

De plus, $\Omega(\varepsilon)$ est holomorphe sur $\overline{\mathcal{M}}_{0, n+3} \setminus A(\varepsilon)$, et l'on a :

$$\zeta(n_1, \dots, n_m) = (-1)^m \int_{\mathcal{M}_{0, n+3}^\rho} \Omega(\varepsilon). \quad (4.1.2.1)$$

La correspondance entre le m -uplet qui définit la valeur multi-zeta et la forme différentielle étant la même que pour les intégrales itérées. Donc en particulier, on a $wt((n_1, \dots, n_m)) = n$.

Déduction du corollaire ([GM02][page 10]). Supposons que l'intersection est non vide. Elle doit donc contenir au moins une strate de dégénérescence maximale. Cette strate correspond à un arbre plan trivalent dessiné à l'intérieur d'un cercle et dont les feuilles sont les points marqués mis dans l'ordre ρ . Chaque diviseur de bord (strate de codimension 1) contenant une telle strate peut être obtenu en choisissant une arête intérieure ; en supprimant l'arête on définit une partition de S associée aux deux composantes connexes de l'arbre moins l'arête (les points qui sont reliés entre eux forment une classe). Cela revient à couper l'arbre en deux arcs connexes. On peut aussi (c'est équivalent) remplacer toutes les arêtes différentes de celle-là par des sommets, on obtient alors l'arbre correspondant à la 2-partition précédente.

Il suffit donc de montrer qu'aucune partition définie de la sorte ne peut être d'un type respectant ε , c'est à dire qu'aucun des arcs ne contient que des points formant un ensemble du type $\{\alpha\} \cup T$ avec $T \subset S(\alpha, \varepsilon)$. Le point important est que comme les points sont placés dans l'ordre, un arc contenant un des points contient aussi forcément l'un des ces voisins dans l'écriture $0 < z_1 < \dots < z_n < 1 < \infty < 0$. Si un arc contient $\alpha = \infty$ alors il contient aussi ou 0 ou 1 et ne peut donc être de la forme $\{\infty\} \cup \{z_{i_1}, \dots, z_{i_p}\}$ avec $z_{i_k} \in S(\infty, \varepsilon)$. Si un des arcs contient $\alpha = 0$ alors il contient ou ∞ , ce qui l'empêche d'être de la forme $\{0\} \cup \{z_{i_1}, \dots, z_{i_p}\}$ avec $z_{i_k} \in S(0, \varepsilon)$, ou alors cet arc contient z_1 , mais $z_1 \in S(1)$ (par hypothèse), et donc il ne peut contenir que des points formant un ensemble $\{0\} \cup \{z_{i_1}, \dots, z_{i_p}\}$ avec $z_{i_k} \in S(0, \varepsilon)$. On raisonne de même avec $\alpha = 1$ en considérant $z_n \in S(0)$.

□

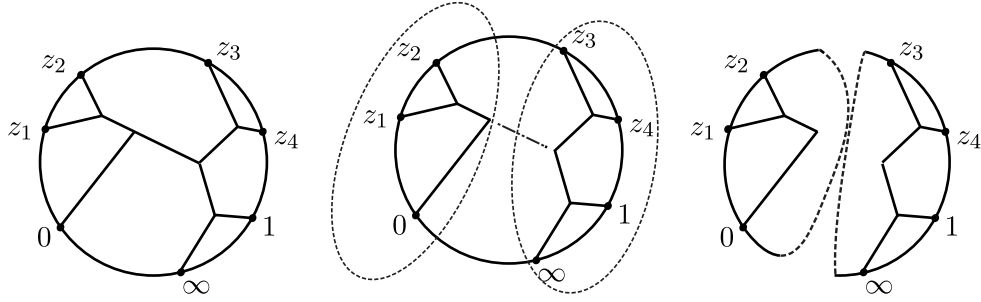


FIG. 4.1 –

4.2 Nouveaux exemples où la conjecture est vraie

4.2.1 Le premier exemple non-trivial

Le premier exemple "nouveau" apparaît pour $n = 6$. Il s'agit d'une forme différentielle $\omega \in \Omega_{\log}^3(\partial\mathcal{M}_{0,6})$ qui n'est pas de la forme $\bigwedge \frac{dt_i}{t_i - \varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ mais telle que $\int_{\mathcal{M}_{0,6}^\rho} \omega$. Cet exemple est traité en 4.2.1.

On a :

$$\omega = \frac{dt_3}{t_3} \wedge \frac{dt_2}{1-t_2} \wedge \frac{dt_1}{t_3-t_1}$$

Une approche empirique (Maple) nous conduit à supposer que $\int_{\mathcal{M}_{0,6}^\rho} \omega = 2\zeta(3)$, c'est ce que nous allons montrer ici.

Exemple 4.2.1.

$$I = \int_{\mathcal{M}_{0,6}^\rho} \omega = \int_0^1 \frac{dt_3}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{t_3-t_1} = 2\zeta(3) \quad (4.2.1.1)$$

on rappelle que $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$

Le calcul présenté ici a le mérite de mettre en lumière la nécessité d'astuces pour avancer (on exhibera plus loin, voir 4.2.3 un exemple de calcul complètement évident), il a l'inconvénient d'être obscur à la compréhension : ça marche mais je ne sais pas pourquoi. En esperant que quelqu'un comprenne :

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3-t_1} = \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3} \frac{1}{1-\frac{t_1}{t_3}} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t_1}{t_3}\right)^k = \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3^{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} t_1^k \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \sum_{k=0}^{\infty} t_1^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \frac{t_2^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} t_2^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} t_2^l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} \sum_{l=0}^{\infty} t_2^{l+k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{t_3} t_2^{l+k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \frac{t_3^{l+k+2}}{l+k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(l+k+2)} \int_0^1 t_3^l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(l+k+2)} \frac{1}{l+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl(l+k)}
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3-t_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl(l+k)} \quad (4.2.1.2)$$

On remarque alors que :

$$\frac{1}{kl(l+k)} = \frac{1}{k^2l} - \frac{1}{k^2(l+k)} \quad (4.2.1.3)$$

$$= \frac{1}{l^2k} - \frac{1}{l^2(l+k)} \quad (4.2.1.4)$$

d'autre part :

$$\frac{1}{l^2(l+k)} = -\frac{1}{k^2l} + \frac{1}{l^2k} + \frac{1}{k^2(l+k)} \quad (4.2.1.5)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl(l+k)} \\
&= \sum_{k>l \geq 1} \frac{1}{kl(l+k)} + \sum_{l>k \geq 1} \frac{1}{lk(l+k)} + \sum_{k=l \geq 1} \frac{1}{kl(l+k)} \\
&\stackrel{4.2.1.3 \text{ et } 4.2.1.4}{=} \sum_{k>l \geq 1} \frac{1}{k^2 l} - \frac{1}{k^2(l+k)} + \sum_{l>k \geq 1} \frac{1}{l^2 k} - \frac{1}{l^2(l+k)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
&= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2(l+k)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
&\stackrel{4.2.1.5}{=} 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{l^2 k} + \frac{1}{k^2(l+k)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
&= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l^2 k} \\
&\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
&= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2 k} \\
&\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
&= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2 k} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2 k} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
&\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{=0 \text{ car } \zeta(3)=\zeta(1,2)} \\
&\stackrel{\zeta(3)=\zeta(1,2)}{=} 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
&= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) \\
&= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{k^2(l+k)} + \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right)}_{=0 \forall k : \text{ pour tout } k \text{ traiter la parenthèse comme une série}} \\
I &= 2\zeta(3)
\end{aligned}$$

4.2.2 Cas $n + 3 = 4, 5, 6$

$n = 4$

Base de la cohomologie. Une base de l'anneau de cohomologie

$$\mathbb{H}(\mathcal{M}_{0,4}, \Omega_X^\bullet(\log \overline{\partial \mathcal{M}_{0,4}})) = \mathbb{H}^*(\mathcal{M}_{0,4}, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^*(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \mathbb{C})$$

est donnée par :

$\mathbb{H}^0(\mathcal{M}_{0,4})$	\mathbb{C}
$\mathbb{H}^1(\mathcal{M}_{0,4})$	$\frac{dz_1}{z_1} \quad \frac{dz_1}{1-z_1}$
$\mathbb{H}^2(\mathcal{M}_{0,4})$	0

Diviseurs des pôles et convergence. On note en gras les diviseurs qui intersectent l'associaèdre $\mathcal{M}_{0,4}^p(\mathbb{R})$.

ε_1	différentielle	diviseur dans $\mathcal{M}_{0,4}$	convergence
1	$\frac{dz_1}{1-z_1}$	$s_1 \mathbf{1} \mathbf{0} \infty$ $\infty s_1 01$	DV
0	$\frac{dz_1}{z_1}$	$s_1 \mathbf{0} \mathbf{1} \infty$ $\infty s_1 01$	DV

$n = 5$

Base de la cohomologie.

Base de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathcal{M}_{0,5})$	
$H^0(\mathcal{M}_{0,5})$	\mathbb{C}
$H^1(\mathcal{M}_{0,5})$	$\frac{dz_1}{z_1} \quad \frac{dz_1}{1-z_1}$ $\frac{dz_2}{z_2} \quad \frac{dz_2}{1-z_2} \quad \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1}$
$H^2(\mathcal{M}_{0,5})$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \quad \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \quad \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1}$ $\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \quad \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \quad \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1}$
$H^3(\mathcal{M}_{0,5})$	0

Diviseurs des pôles et convergence. On note en gras les diviseurs qui intersectent l'associaèdre $\mathcal{M}_{0,5}^p(\mathbb{R})$.

ε_1	ε_2	différentielle	diviseur dans $\mathcal{M}_{0,5}$	convergence
1	0	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{z_2(1-z_1)}$	$0s_2 s_11\infty$ $1s_1 s_20\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	$CV = \zeta(2)$
1	z_1	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{(z_1 - z_2)(1 - z_1)}$	$\mathbf{s_1s_2 01}\infty$ $1s_1 s_20\infty$ $\mathbf{1s_1s_2 0}\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	DV
1	1	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{(1 - z_2)(1 - z_1)}$	$\mathbf{1s_2 01}\infty$ $1s_1 s_20\infty$ $\mathbf{1s_1s_2 0}\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	DV

ε_1	ε_2	différentielle	diviseur dans $\mathcal{M}_{0,6}$	convergence
z_2	0	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{z_2(z_2 - z_1)}$	$0s_2 01\infty$ $s_2s_1 s_20\infty$ $0s_1s_2 0\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	DV
z_2	1	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{(1 - z_2)(z_2 - z_1)}$	$1s_2 01\infty$ $s_2s_1 s_20\infty$ $1s_1s_2 0\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	DV
0	0	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{z_2z_1}$	$0s_2 01\infty$ $0s_1 s_20\infty$ $0s_1s_2 0\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	DV
0	z_1	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{(z_1 - z_2)z_1}$	$s_1s_2 01\infty$ $0s_1 s_20\infty$ $0s_1s_2 0\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	DV
0	1	$\frac{dz_2 \wedge dz_1}{(1 - z_2)z_1}$	$1s_2 01\infty$ $0s_1 s_20\infty$ $0s_1s_2 0\infty$ $\infty s_1 s_201\infty$ $\infty s_2 s_101$ $\infty s_1s_2 01$	DV

$n = 6$

Base de la cohomologie.

Base de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathcal{M}_{0,6})$	
$H^0(\mathcal{M}_{0,6})$	\mathbb{C}
$H^1(\mathcal{M}_{0,6})$	$\begin{array}{cccc} \frac{dz_1}{dz_2} & \frac{dz_1}{dz_2} & & \\ \frac{z_1}{1-z_1} & \frac{1-z_1}{dz_2} & \frac{dz_2-dz_1}{dz_3-dz_1} & \\ \frac{z_2}{dz_3} & \frac{1-z_2}{dz_3} & \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} & \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2} \\ \frac{z_3}{z_3} & \frac{1-z_3}{1-z_3} & & \end{array}$
$H^2(\mathcal{M}_{0,6})$	$\begin{array}{cccc} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} & \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} & \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} & \\ \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} & \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} & \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} & \\ \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_3}{z_3} & \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3} & \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_3-dz_1}{z_3-z_1} & \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2} \\ \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_3}{z_3} & \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3} & \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_3-dz_1}{z_3-z_1} & \frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2} \\ \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3}{z_3} & \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3} & \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3-dz_1}{z_3-z_1} & \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2} \\ \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3}{z_3} & \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3} & \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3-dz_1}{z_3-z_1} & \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2} \\ \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} \wedge \frac{dz_3}{z_3} & \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3} & \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} \wedge \frac{dz_3-dz_1}{z_3-z_1} & \frac{dz_2-dz_1}{z_2-z_1} \wedge \frac{dz_3-dz_2}{z_3-z_2} \end{array}$

Base de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathcal{M}_{0,6})$			
$H^3(\mathcal{M}_{0,6})$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3}{z_3}$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3}$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$
			$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$
	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3}{z_3}$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3}$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$
			$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$
	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3}{z_3}$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3}$	$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$
			$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$
	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3}{z_3}$	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3}$	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$
			$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$
	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3}{z_3}$	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3}$	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$
			$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2}{1-z_2} \wedge \frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$
	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3}{z_3}$	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3}{1-z_3}$	$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$
			$\frac{dz_1}{1-z_1} \wedge \frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1} \wedge \frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$
$H^4(\mathcal{M}_{0,6})$	0		

Diviseurs des pôles et convergence. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. ε_i peut prendre les valeurs : $0, 1, z_k, z_l$ avec $k, l \neq i$ et $k \neq l \in \{1; 2; 3\}$. Il y a en tout 52 3-formes différentielles à étudier. Cela serait extrêmement fastidieux et peu intéressant d'en faire la liste complète. On ne tiendra

compte que des différentielles dont le diviseur des pôles ne contient pas de faces de la cellule, auquel cas l'intégrale diverge grossièrement. On exclut donc les cas suivants : $\varepsilon_1 = 0$ ou z_2 , $\varepsilon_2 = z_1$ ou z_3 , $\varepsilon_3 = z_2$ ou 1 . Il reste à étudier les cas suivants :

On ne notera pas les composantes du diviseur de la forme $\infty\dots|\dots 01$.

ε_1	ε_2	ε_3	différentielle	diviseur dans $\mathcal{M}_{0,6}$	convergence
1	0	0	$\frac{dz_3 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{z_3 z_2 (1 - z_1)}$	$0s_2 s_1s_31\infty$ $0s_3 s_1s_21\infty$ $1s_1 s_2s_30\infty$ $0s_2s_3 s_11\infty$	$CV = \zeta(3)$
1	1	0	$\frac{dz_3 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{z_3(1 - z_2)(1 - z_1)}$	$0s_3 s_1s_21\infty$ $1s_1 s_2s_30\infty$ $1s_2 s_1s_30\infty$ $1s_1s_2 s_30\infty$	$CV = \zeta(1, 2)$
1	1	z_1	$\frac{dz_3 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{(z_1 - z_3)(1 - z_2)(1 - z_1)}$	$1s_1 s_2s_30\infty$ $1s_2 s_1s_30\infty$ $s_1s_3 s_201\infty$ $1s_1s_2 s_30\infty$ $0s_1s_2s_3 1\infty$	DV
1	0	z_1	$\frac{dz_3 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{(z_1 - z_3)z_2(1 - z_1)}$	$0s_2 s_1s_31\infty$ $1s_1 s_2s_30\infty$ $s_1s_3 s_201\infty$ $1s_1s_3 s_20\infty$	$CV = -\zeta(1, 2) - \zeta(3) = -2\zeta(3)$
z_3	1	0	$\frac{dz_3 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{z_3(1 - z_2)(z_3 - z_1)}$	$0s_3 s_1s_21\infty$ $1s_2 s_1s_30\infty$ $s_1s_3 s_201\infty$ $0s_1s_3 s_21\infty$	$CV = 2\zeta(3)$ voir ex.4.2.1
z_3	0	0	$\frac{dz_3 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{z_3 z_2 (z_3 - z_1)}$	$0s_2 s_1s_31\infty$ $0s_3 s_1s_21\infty$ $s_1s_3 s_201\infty$ $0s_1s_3 s_21\infty$ $0s_2s_3 s_11\infty$ $1s_1s_2s_3 0\infty$	DV

4.2.3 Quelques remarques sur les cas $n = 7$

Il est à noter que pour $n = 7$, il y a essentiellement 2 types de calculs. Le premier est ardu et abscons comme celui donné en 4.2.1 (pour $n = 6$) mais est assez rare. Plus souvent, une fois que

l'on a transformé l'intégrale en série, il suffit de faire un petit décalage d'indice. Par exemple :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{dx_4}{x_4} \int_0^{x_4} \frac{dx_3}{x_3 - x_1} \int_0^{x_3} \frac{dx_2}{x_2} \int_0^{x_2} \frac{dx_1}{1 - x_1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx_4}{x_4} \int_0^{x_4} \frac{dx_3}{x_3^{l+1}} \int_0^{x_3} \frac{dx_2}{x_2} \int_0^{x_2} x_1^{l+k} dx_1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx_4}{x_4} \int_0^{x_4} \frac{dx_3}{x_3^{l+1}} \int_0^{x_3} \frac{x_2^{l+k+1} dx_2}{(k+l+1)x_2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l+1)^2} \int_0^1 \frac{dx_4}{x_4} \int_0^{x_4} \frac{dx_3}{x_3} x_3^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l+1)^2(k+1)} \int_0^1 x_4^k dx_4 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l+1)^2(k+1)^2} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+l)^2 k^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(l+k)^2 k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \\
&= \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l^2 k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \\
&= \sum_{l>k \geq 1}^{\infty} \frac{1}{l^2 k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 k^2} = \zeta(2, 2) + \zeta(4)
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [Arn69] V. I. Arnol'd, *The cohomology ring of colored braid group*, Mat. Zametki, no. 5, 1969.
- [BFLS99] X. Buf, J. Fehrenbach, P. Lochak, and L. Schneps, *Espace de modules de courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, Panorama et Synthèse, no. 7, SMF, 1999.
- [Del68] Pierre Deligne, *Théorie de hodge 2*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1968), no. 35.
- [DM69] Pierre Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1969), no. 36.
- [Fur03] Hidekazu Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, e-print, www.arxiv.org/abs/math.NT/00112261, february 2003.
- [Get94] E. Getzler, *Operads and moduli spaces of genus 0 riemann surfaces*, e-print, www.arxiv.org/abs/alg-geom/9411004, november 1994.
- [GM02] A. B. Goncharov and Yu. I Manin, *Multiple ζ -motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$* , e-print, [www.arxiv.orgmath.math.ag/0204102](http://www.arxiv.org/math.math.ag/0204102), April 2002.
- [Voi02] Claire Voisin, *Théorie de hodge et géométrie algébrique complexe*, première ed., Société Mathématique de France, 2002.