petit bilan 2

Soudères Ismaël (ismaels@free.fr)

On se donne n . On se penche sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$. On se donne un ordre sur les n points génériques : c'est ce donner une cellule de $\mathcal{M}_{0,n+3}$. Disons $0 < s_1 < \dots < s_n < 1$.

$$\beta : \quad \mathcal{M}_{0,n+3} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(0, s_1, \dots, s_n, 1, \infty) \longmapsto (s_1, \dots, s_n)$$

Les composantes de codimension 1 du bord se voient comme des lacets entourant un certain nombre de point (une composante donne une classe de lacet entourant les mêmes points. On obtient la description suivante dans $\mathbb{P}^n$:

- les bords de la forme $s_i = s_j$, $s_i = 0, 1, \infty$, donne des hyperplans
- les lacets autour de trois points (dont l'un au plus est égal à $1, 0, \infty$) donnent des espaces affines de codimension 2
- les lacets autour de quatre points (l'un au plus peut être égal à $0, 1, \infty$) donnent des espaces affines codimension 3
- ...
- les lacets autour de $n + 1$ point (un seul étant égal à $0, 1, \infty$) donne les points $(0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1)$ et $(\infty, \dots, \infty)$

Le bord de la cellule donnée par l'ordre correspond aux lacets qui entourent des point qui se "suivent" pour l'ordre.

On étudie une intégrale de la forme

$$\int_0^1 \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_2} \frac{dx_n}{\varepsilon_n - x_n} \dots \frac{dx_1}{\varepsilon_1 - x_1} \quad \text{avec } \varepsilon_i \in \{0, 1, \infty, \varepsilon_j | j \neq i\}$$

On pose

$$\omega = \frac{dx_n}{\varepsilon_n - x_n} \wedge \dots \wedge \frac{dx_1}{\varepsilon_1 - x_1}$$

On a la propriété suivante :

Proposition 0.1. *Soit D une composante irréductible du bord dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$. D s'envoie dans $\mathbb{P}^n$ sur D' . D' est de codimension $i > 1$, D n'appartient pas au diviseur des pôles de $\beta^*(\omega)$ dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$. ssi ω à un pole d'ordre $< i$ le long de D'*

Démonstration. Démontrons cela mais ce n'est rien d'autre que le lemme de Goncharov dont on a déjà parler. On conserve les notations précédentes. On peut supposer que D est au bord de la

cellule donner par l'ordre au départ ça ne mange pas de pain et on est sur que les indices sont dans l'ordre. D' est de la forme $x_k = x_{k+1} = \dots = x_{k+i}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on utilisera la convention que $x_0 = O$ et $x_{n+1} = 1$.

On fait un petit changement de variable affine pour que D' soit donné par $0 = z_1 = \dots = z_i$ dans les nouvelles coordonnées $z_1, \dots, z_n$. Si l'ordre de ω le long de D' est $< i$. Par hypothèse, localement ω est donnée par :

$$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \dots \wedge \frac{dz_k}{z_k} \wedge f(z_{k+1}, \dots, z_n) dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_n \quad \text{avec } k < i$$

et f holomorphe (au moins localement au tour de D). Si D' est un hyperplan le résultat est clair (déjà dans l'écriture de ω on suppose que $i \geq 2$). Sinon c'est que D est la préimage par un certain nombre d'éclatement de D' . On suppose que pour savoir ce qui se passe dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$ il suffit de regarder quand on éclate un fois seulement le long de D' . on en reparlera après. Du coups en éclatent le long de D' on utilise les variables $z_1, z_1 X_2, \dots, z_1 X_i, z_{i+1}, \dots, z_n$ sur l'éclater ω est donner par

$$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_k}{X_k} \wedge f(z_1 X_{k+1}, \dots, z_1 X_i, z_{i+1}, \dots, z - n) z_1^{i-k} dX_{k+1} \wedge \dots \wedge dX_i \wedge dz_{i+1} \wedge dz_n$$

comme $i - k \geq 0$ par hypothèse on a plus de singularité dans la préimage de D' qui correspond au diviseur D .

Le cas $i = k$ se traite exactement de la même façon sauf qu'on trouve un pole d'ordre 1. D'après l'expression de ω on ne peut avoir $k > i$. $\square$

Il reste à montrer que faire un éclatement suffit. C'est l'objet des deux lemmes suivants dont la démonstration donne les calculs de façon explicite.

Le contexte et les notations :

Soit $Z_1 \subset \dots \subset Z_k \subset Z_{k+1} \subset \dots \subset Z_n \subset X$, X est une variété, les Z_i sont des sous variétés données par des équations affines. On note

$\pi_1 : X_1 \rightarrow X$	l'éclatement de	X	le long de	Z_1
$\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$	"	X_1	"	$\pi_1^{-1}(Z_2)$
$\pi_3 : X_3 \rightarrow X_2$	"	X_2	"	$(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(Z_3)$

...

On pose $\pi = \pi_n \circ \dots \circ \pi_1$, $\tilde{Z}_i = \pi^{-1}(Z_i)$. On note encore $\hat{\pi}_i$ l'éclatement $\hat{X}_i \rightarrow X$ le long de Z_i et $\hat{Z}_i = \hat{\pi}_i^{-1}(Z_i)$. On pose encore $d_i = \text{codim}(Z_i)$ et on suppose que Z_i est donné localement par $z_1 = z_2 = \dots = z_{d_i}$ ($z_1, \dots, z_N$ sont des coordonnées locales) et on a $d_1 > d_2 > \dots > d_n \geq 1$

Enfin on se donne une différentielle :

$$\omega = \frac{dz_{a_1}}{z_{a_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{a_s}}{z_{a_s}} \wedge f(z_1, \dots, \hat{z}_{a_1}, \dots, z_i, \dots, \hat{z}_{a_s}, \dots, z_N) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N$$

avec f holomorphe au voisinage de Z_k .

Lemme 0.2. *L'ordre du pôle si pole il y a $\pi^*(\omega)$ le long de $\tilde{Z}_k$ est le même que celui de $\hat{\pi}^*(\omega)$ le long de $\hat{Z}_i$. Si l'une des deux différentielle n'a pas de pôle l'autre non plus et les ordres des zéro sont égaux.*

Démonstration. 1. Calcul de l'ordre du pôle ou du zéro de $\hat{\pi}^*(\omega)$ le long de $\hat{Z}_i$.

Quitte à réordonner les variables Z_k est donné par $z_1 = \dots = z_i$ et $\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_{s+1}, \dots, z_N) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N$. On a

$$\hat{X}_k \subset X \times \mathbb{P}^{i-1} \quad \text{donné par } X_i z_j = X_j z_i$$

On se place par exemple sur l'ouvert affine $X_1 = 1$. Les nouvelles coordonnées sont donc : $(z_1, X_2, \dots, X_s, z_{s+1}, \dots, z_N)$.

si $s = i$

$$\hat{\pi}^*(\omega) = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_i}{X_i} \wedge f(z_{i+1}, \dots, z_N) dz_{i+1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

On trouve un pôle d'ordre 1 le long de $\hat{\pi}^{-1}(Z_k)$ qui est donné par $z_1 = 0$.

si $s > i$

$$\hat{\pi}^*(\omega) = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_i}{X_i} \wedge \frac{dz_{i+1}}{z_{i+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_{s+1}, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

On trouve un pôle d'ordre 1 le long de $\hat{\pi}^{-1}(Z_k)$.

si $s < i$

$$\hat{\pi}^*(\omega) = dz_1 \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_1^{i-s-1} f(z_1 X_{s+1}, \dots, z_1 X_i, z_{i+1}, \dots, z_N) dz_{i+1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

On trouve un zéro d'ordre $i - s - 1$ le long de $\hat{\pi}^{-1}(Z_k)$.

2. Calcul de l'ordre du pôle ou du zéro de $\pi^*(\omega)$ le long de $\tilde{Z}_k$ On revient aux notations générales. On commence par regarder les éclatements π_α pour $\alpha < k$.

Le cas $\alpha = 1$. Z_1 est donné par $z_1 = \dots z_{d_1} = 0$. On se place dans l'ouvert affine de l'éclatement $X_{d_1} = 1$ et on a comme nouvelles variables $X_1, \dots, X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N$. $\pi_1^{-1}(Z_j)$ est donné par $X_1 = \dots = X_{d_j}$ pour $j > 1$.

si $s < d_k$ alors on peut supposer que $\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_{s+1}, \dots, z_N) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N$ avec $s < d_k < d_1$. On a alors :

$$\hat{\pi}^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} f(z_{d_1} X_{s+1}, \dots, z_{d_1} X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N) dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge d_{d_1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

Relativement à Z_k et $\pi_1^{-1}(Z_k)$ la situation n'a pas changé. On peut donc itérer l'opération pour $\pi_2, \dots, \pi_{k_1}$.

si $s = d_k$ Ce cas se traite exactement comme le précédent.

si $s > d_k$ Dans ce cas il faut raffiner un peu les calculs car ω s'écrit $\frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{d_k}}{z_{d_k}} \wedge \frac{dz_{a_{d_k+1}}}{z_{a_{d_k+1}}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_{d_k+1}, \dots, z_{a_{d_k+1}}, \dots, z_i, \dots, z_{\hat{a}_s}, \dots, z_N) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N$ Nous pourrions détaillé l'expression de $\pi_1^*(\omega)$ mais un oeil attentif verra tout seul que l'ordre le long $\pi_1^{-1}(Z_k)$ reste d_k .

On est ramené a la situation suivante : $k = 1$.

si $s = d_1$ Dans l'ouvert affine $X_{d_1} = 1$ on a : $\pi_1^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{d_1}}{z_{d_1}} \wedge f(z_{d_1+1}, \dots, z_N) dz_{d_1+1} \wedge \dots \wedge dz_N$. $\pi_1^{-1}(Z_2)$ est donné par $X_1 = \dots = X_{d_2} = 0$. On éclate le long de $\pi_1^{-1}(Z_2)$ et on se place dans l'ouvert $X_{d_2} = 1$ avec les variables $X_{d_2}, Y_1, \dots, Y_{d_2-1}, X_{d_2+1}, \dots, X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N$. On a alors :

$$\pi_2^* \pi_1^*(\omega) = \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dY_{d_2-1}}{Y_{d_2-1}} \wedge \frac{dX_{d_2}}{X_{d_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_1-1}}{X_{d_1-1}} \wedge \frac{dz_{d_1}}{z_{d_1}} \wedge f(z_{d_1+1}, \dots, z_N) dz_{d_1+1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

Comme $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$ la situation n'a pas bouger. On recommence avec $d_3 < d_2$. On trouve au final un pole d'ordre 1 le long de $\tilde{Z}_k$.

si $s > d_1$ Ce cas se traite comme le précédent et l'on trouve aussi pole d'ordre 1 le long de $\tilde{Z}_k$

si $s < d_1$ On a : $\pi_1^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} f(X_{s+1}z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1}z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N$ On doit ici distingué deux cas :

$s \geq d_2$ On trouve alors en éclatant le long de $\pi_1^{-1}(Z_2)$: $X_1 = \dots = X_{d_2}$ et en regardant dans l'ouvert $Y_{d_2} = 1$:

$$\pi_2^* \pi_1^*(\omega) = \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \frac{dY_2}{Y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dY_{d_2-1}}{Y_{d_2-1}} \wedge \frac{dX_{d_2}}{X_{d_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} f(X_{s+1}z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1}z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N$$

Comme $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$ on voit que l'ordre du zéro est resté constant égal à $d_1 - s - 1$

$s < d_2$ Le même calcul que précédemment donne cette fois :

$$\pi_2^* \pi_1^*(\omega) = \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \frac{dY_2}{Y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dY_s}{Y_s} \wedge X_{d_2}^{d_2-s-1} z_{d_1}^{d_1-s-1} f(Y_{s+1}X_{d_2}z_{d_1}, \dots, Y_{d_2-1}X_{d_2}z_{d_1}, X_{d_2}z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1}z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) dY_{s+1} \wedge \dots \wedge dY_{d_2-1} \wedge dX_{d_2} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N$$

Comme $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$ on voit que l'ordre du zéro est resté constant égal à $d_1 - s - 1$

Dans les deux cas la situation n'a pas changé relativement à $(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(Z_1)$. Les éclatement successif pour $i \geq 3$ ne changeront en rien l'ordre du zéro le long de l'image réciproque de Z_1 . D'où le lemme. $\square$