1ère STMG

# Table des matières

# Avant-propos et licence

Cet ensemble de cours et d'exercices est le résultat de ma première année d'enseignement en classe de 1ère STMG. Ce fût aussi ma première année d'enseignement au lycée.

Comme tous les cours faits par les collègues, ces quelques pages correspondent d'abord à ce dont j'avais besoin. Elles n'ont aucune prétention à servir d'exemple ou de modèle. J'ai utilisé ces fichiers avec deux classes de manière assez différente. Une classe a travaillé essentiellement en groupe, les solutions s'affichant au tableau, l'autre a travaillé en individuel, les élèves allant écrire la correction à côté de l'énoncé vidéoprojeté.

Ce texte a été écrit au fil de l'eau parfois très tard dans la nuit avant le cours du lendemain. Il contient nombre de fautes d'orthographe, de typos et de calculs que je n'ai pas réussi à corriger malgré mes multiples relectures. Les lecteurs sont invités à effectuer ces corrections et à me les signaler `ismael.souderes@gmail.com`

Nous expliquons, ici en quelques mots, comment fonctionnent les différents fichiers. Il y a d'une part le fichier élève avec un cours à trous, les énoncés et parfois de la place prévue pour qu'ils écrivent directement sur la feuille. Ces lignes s'obtiennent avec la commande **quadrib{nbr de carreau en largeur}{- nbr de carreau en hauteur}** . Le fichier « SOL » contient les solutions détaillées car il est souvent difficile de faire la correction avec les élèves. Cela permet ainsi de l'avoir « sous les yeux ». Enfin le fichier « Diapo » correspond à des diapositives que l'on peut videoprojeter. Dans la mesure du possible les diapositives sont le plus proche possible des feuilles données aux élèves. Le fichier et les sources sont prévus pour l'affichage des solutions. La modification des commandes **Sol** et **monly** permettra facilement de changer ce comportement.

**Remarque :** Pour des questions de lisibilité à l'intérieur des fichiers, la commande **ninput** qui ajoute un fichier et modifie la date, est modifiée juste avant sa première entrée pour permettre l'affichage du nom de fichier en bas de page. La même modification est apportée à **nsinput** qui en plus ajoute un nouveau chapitre et remet les compteur à 0.



**Crédit :** Ce cours est le produit complexe d'échanges avec les collègues du lycée Jean-Pierre Vernant (Sèvres 92), de documents glanés sur internet, `http://mathxy.fr/`, `http://mathslycee.fr/`, `http://lgmaths.free.fr` et bien d'autres. L'association APMEP `http://www.apmep.fr` est aussi au coeur de nombre d'exercices présentés ici. Finalement, c'est aussi mon employeur, le ministère de l'éducation nationale, qui m'a permis de faire ce document. Qu'il en soit aussi crédité.

# Chapitre 1
# **Second degré**
Date

## Cours :
à voir
`https://www.youtube.com/watch?v=tTdHlpFERVQ&list=PL_1WVGjLTYqJc5aYRMgF20F_eXc3HGGLV`

## 1 Fonction polynôme du second dégré (de degré 2)

**Définition 1.** Soit $a$, $b$, et $c$ trois nombres réels avec $a \neq 0$.
Une fonction *polynôme de degré 2* est une fonction *définie sur* $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On appelle trinôme du second degré l'expression $ax^2 + bx + c$ .

**Exemple 2.** Donner, parmi les fonctions suivantes, celles de degré 2 :

$$a)\ f(x) = 2x + 3, \quad b)\ g(x) = 3x^2 + 2x - 1, \quad c)\ h(x) = \pi x^2 - x + 8,$$
$$d)\ i(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + 2, \quad e)\ j(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 2$$

**Correction :**
b), c) et e) sont des fonctions polynômes du second degré.

**Exemple 3.** Pour chacune des fonction du second degré ci-dessous déterminer les coefficient $a$, $b$ et $c$.

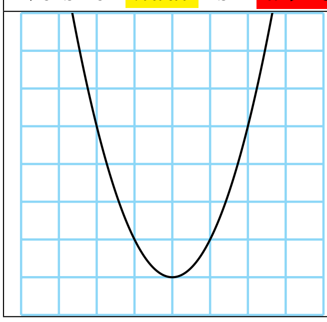
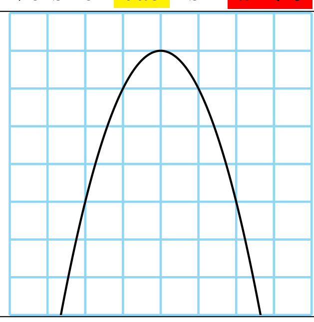
$$a)\ f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad b)\ g(x) = 3x^2 - x - 1, \quad c)\ h(x) = x^2 - \pi x + 8,$$
$$d)\ i(x) = 2x^2 - 2x, \quad e)\ j(x) = -x^2 - \sqrt{2}x + 2, \quad f)\ k(x) = 2x^2 + 1$$

**Correction :**
a) $a = 1$, $b = -2$ et $c = 3$. b) $a = 3$, $b = -1$ et $c = -1$. c) $a = 1$, $b = -\pi$ et $c = 8$
d) $a = 2$, $b = -2$ et $c = 0$. e) $a = -1$, $b = \sqrt{2}$ et $c = 2$. f) $a = 2$, $b = 0$ et $c = 1$.

**Proposition 4.** La *courbe représentative* d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole d'équation

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette *parabole* est orienté

| Vers le *haut* si $a > 0$ | Vers le *bas* si $a < 0$ |
|---|---|
|  |  |

**Proposition 5.** On pose $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

— La droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$ est l' *axe de symétrie* de la parabole.
— Le sommet de la parabole à pour coordonnées $(x_0, y_0)$ avec

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

**Définition 6.** Pour un *trinôme du second degré* $ax^2 + bx + c$, on appelle forme canonique l'expression $a(x - x_0)^2 + y_0$. On a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

**Exemple 7.** Sur les graphiques ci-dessus, tracer les axes de symétries et placer les sommets des paraboles.

**Exemple 8.** Dans chacun des cas suivant, après avoir identifier les coeffcient $a$, $b$ et $c$ donner l'abscisse du sommet et l'axe de symétrie de la courbe représentative de $f$.

$$a)\ f(x) = 2x^2 - x + 6 \quad b)\ f(x) = x^2 + 4x + 1, \quad c)\ f(x) = 3x^2 + 6x - \pi$$

**Correction :**

On a

**a** $a = 2$, $b = -1$ et $c = 6$. L'abscisse du sommet de la parabole est donné par $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-1)}{2 \times 2} = \dfrac{1}{4}$. L'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale $x = 1/4$.

**b** $a = 1$, $b = 4$ et $c = 1$. L'abscisse du sommet de la parabole est donné par $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(4)}{2 \times 1} = -2$. L'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale $x = -2$.

**c** $a = 3$, $b = 6$ et $c = -\pi$. L'abscisse du sommet de la parabole est donné par $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(6)}{2 \times 3} = -1$. L'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale $x = -1$.

**Proposition 9** (Rappel : sens de variation)**.** Soit une fonction de degré 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$. Son sens de variation est donné par

| Vers le *haut* si $a > 0$ | | | | Vers le *bas* si $a < 0$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ | $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
| Variation de $f$ | $\searrow$ | $f(x_0)$ | $\nearrow$ | Variation de $f$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ | $\searrow$ |

## 2 Étude du trinôme $ax^2 + bx + c$

**Définition 10** ( Discriminant )**.** On appelle *discriminant* du trinôme le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

**Remarque :** $\Delta$ se lit “delta”.

*Remarque* 1. Le signe de $\Delta$ permet de déterminer *le nombre* solutions de l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

La *valeur* de $\Delta$ permet de déterminer ces *solutions* .

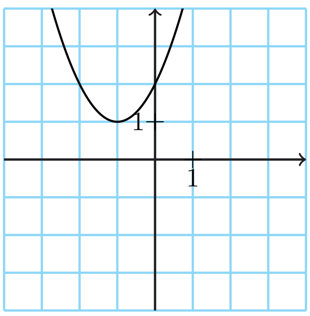
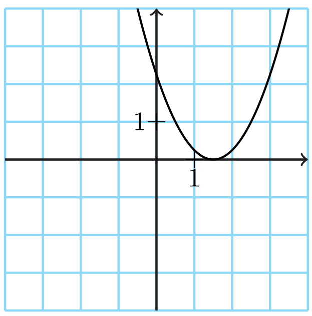
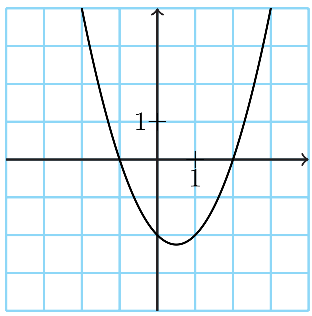
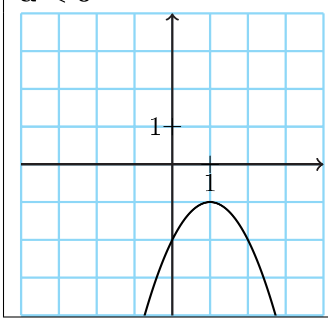
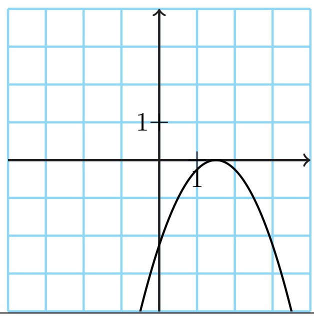
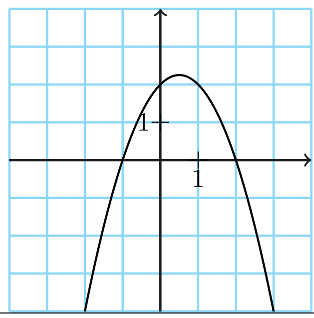
**Définition 11.** On appelle racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ les *solutions* de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

**Proposition 12** (Solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$)**.**

<table>
<tr><th></th><th>$\boldsymbol{\Delta} < \mathbf{0}$</th><th>$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0}$</th><th>$\boldsymbol{\Delta} > \mathbf{0}$</th></tr>
<tr><td>Racines de $f$</td><td>Pas de racines</td><td>$x_1 = x_2 = x_0 = \dfrac{-b}{2a}$</td><td>$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et<br>$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation</td><td>Pas de factorisation</td><td>$f(x) = a(x - x_0)^2$</td><td>$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
<tr><td>Signe de $f$</td><td>$\mathbf{a} > \mathbf{0}$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f$</td><td colspan="2">$+$</td></tr></table></td><td>$\mathbf{a} > \mathbf{0}$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$x_0$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f$</td><td>$+$</td><td>$0$</td><td>$+$</td></tr></table></td><td>$\mathbf{a} > \mathbf{0}$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$x_1$</td><td></td><td>$x_2$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f$</td><td>$+$</td><td>$0$</td><td>$-$</td><td>$0$</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Signe de $f$</td><td>$\mathbf{a} < \mathbf{0}$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f$</td><td colspan="2">$-$</td></tr></table></td><td>$\mathbf{a} < \mathbf{0}$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$x_0$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f$</td><td>$-$</td><td>$0$</td><td>$-$</td></tr></table></td><td>$\mathbf{a} < \mathbf{0}$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$x_1$</td><td></td><td>$x_2$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f$</td><td>$-$</td><td>$0$</td><td>$+$</td><td>$0$</td><td>$-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Aspects graphiques : Pour chacun des 6 cas ci-dessus, dessiner une parabole correspondante et placer les élément importants.

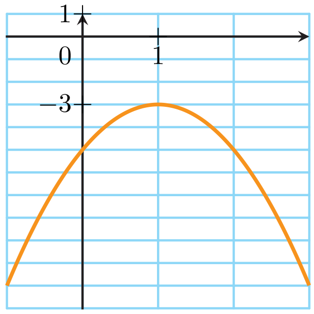
| $\boldsymbol{\Delta} < \mathbf{0}$ | $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0}$ | $\boldsymbol{\Delta} > \mathbf{0}$ |
|---|---|---|
| $\mathbf{a} > \mathbf{0}$  | $\mathbf{a} > \mathbf{0}$  | $\mathbf{a} > \mathbf{0}$  |
| $\mathbf{a} < \mathbf{0}$  | $\mathbf{a} < \mathbf{0}$  | $\mathbf{a} < \mathbf{0}$  |

# Exercices :

**Exercice 1.1.**

On considère la fonction $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ définie sur $[-1;3]$.

1. Déterminer $a$, $b$ et $c$.
   **Correction :**
   $a = -2$, $b = 4$ et $c = -5$
2. Tracer la courbe sur votre calculatrice et reproduiser le résultat sur le repère ci-contre.




3. Justifier, **à l'aide du cours**, que la fonction $f$ admet un maximum. Déterminer alors sa valeur et pour quelle valeur de $x$ il est atteint.
   **Correction :**
   Comme a<0 , la fonction $f$ admet un maximum. Ce maximum est atteint pour $x_0 = \frac{-b}{2a} = 1$ et vaut $f(1) = -2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 5 = -3$
4. Calculer $f(-1)$ et $f(3)$.
   **Correction :**
   $f(-1) = -2(-1)^2 + 4 \times (-1) - 5 = -11$
   et $f(3) = -2(3)^2 + 4 \times (3) - 5 = -11$
5. Compléter le **tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | | $\cdots$ | |

**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | | $-3$ | |

**Exercice 1.2.** On considère la fonction $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$ définie pour tout nombre réel.

1. Déterminer l'abscisse du sommet de la parabole associée.
   **Correction :**
   $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{3}$
2. Compléter le tableau de variation de $f$

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | | $\cdots$ | |

**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | | $1/3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

3. Compléter la table de valeurs suivante.

| $x$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $0.5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

**Correction :**

| $x$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $0.5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 16 | 6.25 | 1 | .25 | 4 |

**Exercice 1.3.** On considère la fonction précédente $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$ définie pour tout nombre réel.

1. Déterminer le discriminant $\Delta$

   **Correction :**

   On a $a = 9$, $b = -6$ et $c = 1$. Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$.

2. En fonction du signe de $\Delta$, déterminer le nombre de solution de l''équation $f(x) = 0$

   **Correction :**

   Comme $\Delta = 0$, il y a une unique solution

3. Déterminer les racines éventuelles du trinôme $9x^2 - 6x + 1$.

   **Correction :**

   Les racines éventuelles du trinôme $9x^2 - 6x + 1$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. D'après les questions précédente, il y a une seul solution car $\Delta = 0$. Elle est donnée par
   $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2 \times 9} = \dfrac{2}{3}$.

# Exercices :

**Exercice 1.4.** On considère l'équation $x^2 - x - 2 = 0$

1. Dans le trinôme du second degré associé, identifier $a$, $b$ et $c$

   **Correction :**

   On a $a = 1$ $b = -1$ et $c = -2$

2. Calculer le discriminant

   **Correction :**

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (1) \times (-2) = 9$

3. En fonction du signe du discriminant, déterminer les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.

   **Correction :**

   Comme $\Delta = 9 > 0$, il y a deux solutions données par

   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 2$

**Exercice 1.5.** On considère l'équation $0.2x^2 - 2x + 5 = 0$

1. Dans le trinôme du second degré associé, identifier $a$, $b$ et $c$

   **Correction :**

   On a $a = 0.2$ $b = -2$ et $c = 5$

2. Calculer le discriminant

   **Correction :**

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (0.2) \times (5) = 0$

3. En fonction du signe du discriminant, déterminer les racine du trinôme $0.2x^2 - 2x + 5$.

   **Correction :**

   Comme $\Delta = 0$, il y a une unique solution donnée par

   $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2\times 0.2} = 5$

   **Remarque :** ici on a $x_0 = x_1 = x_2$ ! !

**Exercice 1.6.** On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

1. Dans le trinôme du second degré associé, identifier $a$, $b$ et $c$

   **Correction :**

   On a $a = 1$ $b = 1$ et $c = 1$

2. Calculer le discriminant

   **Correction :**

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (1) \times (1) = -3$

3. En fonction du signe du discriminant, déterminer les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.

   **Correction :**

   Comme $\Delta = -3 < 0$, il n'y a **aucune** solution

**Exercice 1.7.** On considère l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$

1. Dans le trinôme du second degré associé, identifier $a$, $b$ et $c$

   **Correction :**

   On a $a = 1$ $b = 2$ et $c = 2$

2. Calculer le discriminant

   **Correction :**

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times (1) \times (2) = -4$

3. En fonction du signe du discriminant, déterminer les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.
   **Correction :**
   Comme $\Delta = -3 < 0$, il n'y a **aucune** solution
4. Déterminer le signe du trinôme $x^2 + 2x + 2$.
   **Correction :**
   Comme il n'y a pas de racines et que $a > 0$ on a

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $f$ | $+$ |

**Méthode :** Pour déterminer le signe du trinôme, on calcul d'abord les racines ; puis on regarde le signe de $a$.
Règle : $f$ du signe de $a$ à **l'extérieur des racines**

**Exercice 1.8.** On considère le trinôme $x^2 - x - 2$

1. Déterminer les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.
   **Correction :**
   On a $a = 1$ $b = -1$ et $c = -2$.
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (1) \times (-2) = -9$ Comme $\Delta = 9 = 3^2 < 0$, il n'y a **deux** solutions :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2$$
2. Déterminer le signe du trinôme $x^2 + 2x + 2$.
   **Correction :**
   Comme il n'y a 2 de racines et que $a > 0$ on a

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3. Résoudre l'inéquation $x^2 - x - 2 < 0$
   **Correction :**
   D'après le tableau de signe précédent, on a $x^2 - x - 2 < 0$ pour tout $x$ appartenant à $]-1; 2[$.
   $]-1; 2[$ est l'ensemble des solution de l'inéquation $x^2 - x - 2 < 0$.

# Exercices :

**Exercice 1.9.** Résoudre l'équation $-x^2 + 3x - 2 = 0$ et déterminer une forme factorisée de $-x^2 + 3x - 2$ :

1. Identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
   **Correction :**
   $a = -1, b = 3, c = -2$
2. Calculer le **discriminant** $\Delta$.
   **Correction :**
   $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$
3. Déduire du signe de $\Delta$, les éventuelles solutions de l'équation.
   **Correction :**
   Comme $\Delta = 1 > 0$, il y a deux solutions donnée par $\mathbf{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-1}{-2} = 2}$ et $\mathbf{x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+1}{-2} = 1}$
4. Déterminer une forme factorisée de $-x^2 + 3x - 2$.
   **Correction :**
   D'après les question précédente on a $f(x) = -x^2 + 3x - 2 = -(x-2)(x-1)$

**Exercice 1.10.** Résoudre l'équation $x^2 - x + 2 = 0$ :

1. Identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
   **Correction :**
   $a = 1, b = -1, c = 2$
2. Calculer le **discriminant** $\Delta$.
   **Correction :**
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$
3. Déduire du signe **du discriminant** , les éventuelles solutions de l'équation.
   **Correction :**
   Comme $\Delta = -7 < 0$n il n'y a pas de solution.
4. le trinôme $x^2 - x + 2$ admet il une forme factorisée ?
   **Correction :**
   Non car $\Delta < 0$

**Exercice 1.11.** On considère la fonction $f(x) = -2x^2 - 7x - 6$ définie pour tout nombre réel.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   — Identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
   **Correction :**
   $a = -2, b = -7, c = -6$
   — Calculer le **discriminant** $\Delta$.
   **Correction :**
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times (-6) = 1$
   — Déduire du signe **du discriminant**, les éventuelles solutions de l'équation.
   **Correction :**
   Comme $\Delta = 1 > 0$, il y a deux solutions.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{3}{2}$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -2$

2. Étudier le signe de $f$ et compléter le tableau (**recopier et compléter**) Comme $\Delta$ *>0* , le signe de $f$ est le même que celui de $a$ pour tout $x$ à *l'exterieur* des racines.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-3/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

**Exercice 1.12.** On considère la fonction $f(x) = x^2 + 10x + 25$ définie pour tout nombre réel.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   - Identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$.

     **Correction :**

     $a = 1, b = 10, c = 25$
   - Calculer le **discriminant** $\Delta$.

     **Correction :**

     $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$
   - Déduire du signe **du discriminant**, les éventuelles solutions de l'équation.

     **Correction :**

     Comme $\Delta = 0$ il y a une unique solution donnée par $x - 0 = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = -5$
2. Étudier le signe de $f$, recopier et compléter le tableau :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | $+$ | 0 | $+$ | |

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

   **Correction :**

   D'après le tableau de signe précédent, l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ n'admet qu'une solution $x = -5$ pour laquelle $f(-5) = 0$.

# Exercices :

**Exercice 1.13.** On considère la fonction $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

— Comment s'appelle sa courbe représentative.

**Correction :**

La courbe représentative de $f$ est une parabole.

— Donner les coordonnées du sommet.

**Correction :**

L'abscisse du sommet de la courbe représentative de $f$ est donnée par $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
L'ordonée est alors donnée par $f(x_0) = 3 \times (2/3)^2 - 4 \times (2/3) + 3 = \frac{5}{3}$.
Les coordonnées du sommets de la paraboles sont donc $(\frac{2}{3}; \frac{5}{3})$.

— Dresser le tableau de variation.

**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | $2/3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $\searrow$ | $5/3$ | $\nearrow$ |

— L'équation $f(x) = 0$ a t elle des solutions ? Pourquoi ?

**Correction :**

L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutation car d'après le tableau de variation on a $f(x) \geqslant 5/3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
**Autre méthode :** On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 3 = -20 < 0$. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution.

**Exercice 1.14.**

1. On considère la fonction $f(x) = 2x^2 - 2x + 0.5 = 0$. Dresser son tableau de variation.

**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | $1/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

2. Résoudre l'équation $2x^2 - 2x + 0.5 = 0$ et déterminer une forme factorisée de $2x^2 - 2x + 0.5$ :

(a) Identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$.

**Correction :**

$a = 2, b = -2, c = 0.5$

(b) Calculer le **discriminant**. $\Delta$

**Correction :**

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 0.5 = 0$

(c) Déduire du signe **du discriminant**, les éventuelles solutions de l'équation.

**Correction :**

Comme $\Delta = 0$ il y a une unique solution donnée par $x_0 = 1/2$

(d) Déterminer une forme factorisée de $2x^2 - 2x + 0.5$.

**Correction :**

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2 = 2(x - 1/2)^2$

**Exercice 1.15.** On considère la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ définie pour tout nombre réel.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

- Identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
  **Correction :**
  $a = 2, b = 3, c = 2$
- Calculer le **discriminant** $\Delta$.
  **Correction :**
  $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7$
- Déduire du signe **du discriminant**, les éventuelles solutions de l'équation.
  **Correction :**
  Comme $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.

2. Étudier le signe de $f$ et compléter le tableau.

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | |

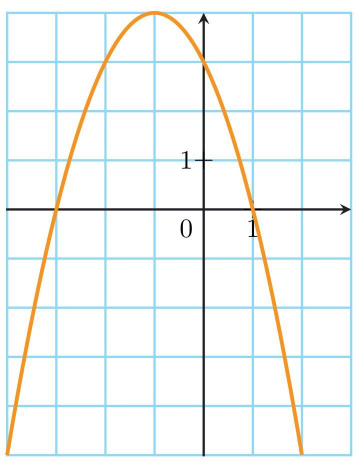
**Correction :**

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Signe de $f$ | $+$ | |

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   **Correction :**
   L'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est vrai pour tout réel $x$.

**Exercice 1.16.**

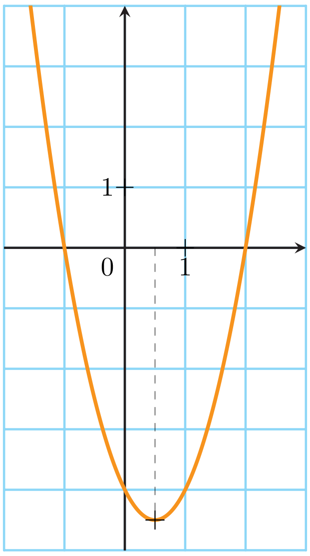
Ci-contre figure le tracé de la parabole $\mathcal{P}$, courbe représentative de la fonction polynôme du second degré $f$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse ; la corriger si elle est fausse.




1. L'équation $f(x)$ a deux solutions 1 et 3.
   **Correction :**
   FAUX : il y a 2 solution 1 et $-3$.
2. La fonction polynôme $f$ a deux racines de signe opposées.
   **Correction :**
   VRAI : ce sont les solutions de l'équation précédente.
3. Le coefficient de $x^2$ est strictement négatif.
   **Correction :**
   VRAI
4. Le discriminant de $f$ est nul.
   **Correction :**
   FAUX : car il y a deux solutions
5. Les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$ sont $(1, 2)$.
   **Correction :**
   FAUX : les coordonnées sont $(-1; 4)$

# Exercices :

**Exercice 1.17.**




Ci-contre figure le tracé de la parabole $\mathcal{P}$, courbe représentative de la fonction polynôme du second degré $f$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse ; la corriger si elle est fausse.

1. L'équation $f(x)$ a deux solutions 1 et 2.
   **Correction :**
   Faux les solutions sont $-1$ et 2.
2. La fonction polynôme $f$ a deux racines de signe opposées.
   **Correction :**
   Vrai
3. Le coefficient de $x^2$ est strictement négatif.
   **Correction :**
   Faux : le coéfficient de $x^2$ ets positif.
4. Le discriminant de $f$ est nul.
   **Correction :**
   Faux : Il y a 2 point d'intersection avec l'axe des abscisses donc deux solution à l'équation $f(x) = 0$. Les discriminant est donc strictement positif.
5. L'abscisse du sommet de la parabole est $-1$.
   **Correction :**
   Faux : l'abscisse est $0,5$

**Exercice 1.18 (Question de cours !!).** On considère une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbb{R}$ et sa courbe représentative $\mathcal{P}$.

1. Donner la définition des racines de la fonction $f$.
   **Correction :**
   Les racines de $f$ sont les solution de l'équation $f(x) = 0$
2. Donner l'abscisse du sommet de la parabole $\mathcal{P}$.
   **Correction :**
   L'abscisse du sommet de la parabole vaut : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
3. Qu'est ce que le discriminant ?
   **Correction :**
   Le discriminant est le nombre défini par $\Delta = b^2 - 4ac$
4. Si $\Delta > 0$, donnez les formules donnant les deux racines.
   **Correction :**
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
5. Si $a < 0$, dressez de tableau de **variations** de $f$ ou faites un dessin de la parabole.
   **Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | $x_0 = -b/2a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ | $\searrow$ |

6. Si $\Delta = 0$, dressez le tableau de **signes** de $f$.

**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0 = -b/2a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | signe de a | 0 | signe de a | |

**Exercice 1.19.** On considère la fonction $f(x) = x^2 - 14x + 33$ définie pour tout nombre réel.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Pour cela :
   — Identifier $a =$ , $b =$ et $c =$.
   — Calculer $\Delta$ (on donne $14^2 = 196$).
   **Correction :**
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 33 = 64 = 8^2 > 0$
   — En fonction du signe de $\Delta$, en déduire les éventuelles solutions.
   **Correction :**
   Comme $\Delta = 8^2 > 0$, il y a 2 solutions données par
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14 - 8}{2} = 3$ $\quad$ $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14 + 8}{2} = 11$
2. Étudier le signe de $f$.
   **Correction :**
   Comme $\Delta > 0$ et que $a > 0$ on a

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $11$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | $+$ | 0 | - | 0 | $+$ | |

**Exercice 1.20.**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$a)\quad 4x^2 + 4x - 3 = 0 \qquad b)\quad -x^2 + 10x + 200 = 0 \qquad c)\quad x^2 + 6x + 9 = 0$$

2. Dresser le tableau de **signes** de

$$a)\quad 4x^2 + 4x - 3 = 0 \qquad b)\quad -x^2 + 10x + 200 = 0 \qquad c)\quad x^2 + 6x + 9 = 0$$

**Correction :**

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 64 = 8^2 > 0$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - 8}{2 \times 4} = \dfrac{-3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + 8}{2 \times 4} = \dfrac{1}{2}$

**Correction :**

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 900 = 30^2$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10 - 30}{2 \times (-1)} = 20$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10 + 30}{2 \times (-1)} = -10$

**Correction :**

c) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Comme $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution :
$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$

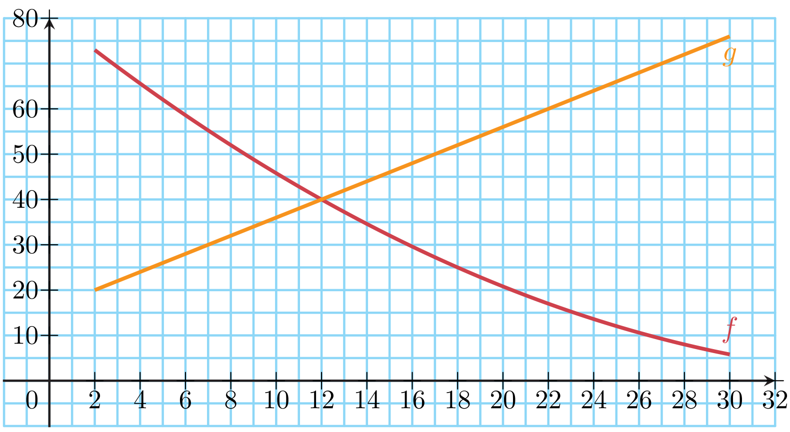
**Exercice 1.21.** **(3 points)** Un artisan fabrique des petits meubles. Le coût de production, en euros, de $x$ meuble est donné par :

$$C(x) = x^2 + 10x + 550 \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 60$$

1. Calculer $C(0)$. En déduire les frais fixes de l'artisan.
   **Correction :**
   $onaC(0) = 0^2 + 10 \times 0 + 550 = 550$. Les frais fixe sont donc de 550 euros.
2. Quel est le coût de production de 15 meubles ?
   **Correction :**
   Le coût de production de 15 meubles est de
   $C(15) = 15^2 + 10 \times 15 + 550 = 925$
3. Montrer que l'équation $x^2 + 10x + 550 = 750$ se ramène à $x^2 + 10x - 200 = 0$.
   **Correction :**
   En ajoutant $-750$ à chaque menbre de $x^2 + 10x + 550 = 750$ on obtient
   $x^2 + 10x - 200 = 0$.
4. Résoudre l'équation $x^2 + 10x - 200 = 0$.
   **Correction :**
   $-20; 10$
   **Correction :**
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-200) = 900 = 30^2$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10 - 30}{2 \times 1} = -20$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10 + 30}{2 \times 1} = 10$
5. Déterminer le nombre de meuble fabriqués pour un coût de production de 750 euros. (On pensera à utiliser les deux questions précédentes afin de trouver les solutions.)
   **Correction :**
   D'après les question précédente, il faut fabriquer 10 meubles (la solution positive de l'équation $x^2 + 10x - 200 = 0$

**Exercice 1.22.**
Ci-contre figure le tracé de

$f(x) = 0.05x^2 - 4x + 80.8$ et $g(x) = 2x + 16$




1. Déterminer graphiquement $f(18)$ et $g(18)$.
2. Retrouver la première question par le calcul.
3. Déterminez graphiquement l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.
4. Résoudre $0.05x^2 - 6x + 64.8 = 0$.
5. Retrouver par le calcul la troisième question.

**Correction :**
1- on lit $f(18) = 25$ et $g(18) = 52$

**Correction :**
2-$f(18) = 0.05 \times 18^2 - 4 \times 18 + 80.8 = 25$ et $g(18) = 2 \times 18 + 16 = 52$.

**Correction :**

3-L'abscisse du point d'intersection vaut 12.

**Correction :**

$0.05x^2 - 6x + 64.8 = 0$ on a $\Delta = 23.04 = 4.8^2$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 12$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 108$

## Travail en groupe – Comme au devoir

**Exercice 1.23. Question de cours :** **(2 points)**

On considère une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbb{R}$ et sa courbe représentative $\mathcal{P}$.

1. Donner la définition des racines de la fonction $f$.
   **Correction :**
   Les racines de la fonction $f$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$
2. Combien peut-il y a avoir de solutions à l'équation $f(x) = 0$ ?
   **Correction :**
   Il peut y avoir 0, 1 ou 2 solution en fonction du signe du **discriminant** $\Delta$.
3. Donner l'abscisse du sommet de la parabole $\mathcal{P}$.
   **Correction :**
   l'abscisse du sommet de la parabole est donné par $\frac{-b}{2a}$.
4. Qu'est ce que le discriminant ?
   **Correction :**
   Le discriminant permet de savoir combien il y a de racines et de les déterminer. C'est un nombre noté $\Delta$ qui vaut $\Delta = b^2 - 4ac$

**Exercice 1.24.** **(3 points)**

On considère la fonction $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ définie pour tout nombre réel.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ .Pour cela :
   — Identifier $a =$ , $b =$ et $c =$.
   **Correction :**
   $a = -1$, $b = 4$ et $c = 5$
   — Calculer $\Delta$.
   **Correction :**
   $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-1) \times (5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$
   — En fonction du signe de $\Delta$, en déduire les éventuelles solutions.
   **Correction :**
   Comme $\Delta = 36 > 0$, il y a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-6}{-2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -1$
2. Étudier le signe de $f$.
   **Correction :**
   Comme $a = -1 < 0$ on a

| $x$ | $-\infty$ | | $x_2 = -1$ | | $x_1 = 5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   **Correction :**
   D'après la question précédente, on a $f(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1; 5]$

**Exercice 1.25.** **(5 points)**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$a)\quad 16x^2 - 8x + 1 = 0 \qquad b)\quad -x^2 + 3x + 10 = 0 \qquad c)\quad 2x^2 - x + 1 = 0$$

2. Dresser le tableau de **signes** de

$$b) \quad -x^2+3x+10 \qquad c) \quad 2x^2-x+1$$

**Correction :**

1-a) : $\Delta = b^2-4ac = (-8)^2-4\times(16)\times 1 = 0$. Il y a une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{4}$.
1-b)$\Delta = b^2-4ac = (3)^2-4\times(-1)\times 10 = 49 = 7^2 > 0$. Il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -2$
1-c) $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times 2\times 1 = -7 < 0$. Il n'y a donc pas de solution.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-b) Signe | | - | 0 | + | 0 | - | |

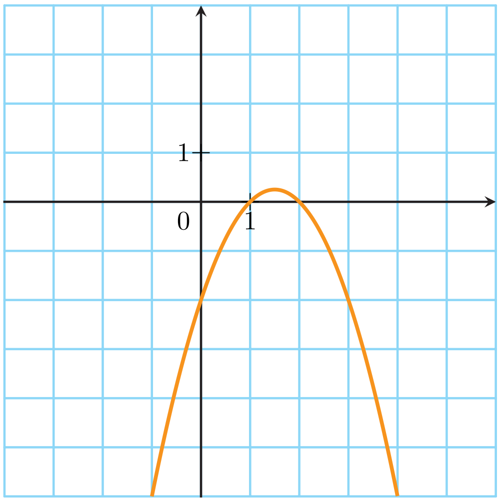
| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| 1-c) Signe | | + | |

**Exercice 1.26. (5 points)** Un artisan fabrique des petits meubles. Le coût de production, en euros, de $x$ meubles est donné par :

$$C(x) = x^2+50x+900 \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 60$$

1. Calculer $C(0)$. En déduire les frais fixes de l'artisan.
   **Correction :**
   $C(0) = 0^2+50\times 0+900 = 900$. Les frais fixe sont donc de 900 euros.
2. Quel est le coût de production de 30 meubles ?
   **Correction :**
   Le coup de 30 meubles est donné par
   $C(30) = 30^2+50\times 30+900 = 3300$ euros.
3. Déterminer le nombre de meubles fabriqués pour un coût de production de 2300 euros. (On pensera à résoudre l'équation et à la mettre sous la forme $x^2+50x+? = 0$ afin de trouver les solutions.)
   **Correction :**
   On cherche $x$ tel que $C(x) = 2300$. C'est à dire tel que
   $x^2+50x+900 = 2300 \Leftrightarrow x^2+50x-1400 = 0$.
   On calcule $\Delta = b^2-4ac = 8100 = 90^2$. On a donc deux solutions
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -70$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 20$
   Les cout de production sont donc de 2300 euros lorsque l'entreprise produit 20 meubles.

**Exercice 1.27. Vrai ou Faux** **(5 points)**




Ci-contre figure le tracé de la parabole $\mathcal{P}$, courbe représentative de la fonction polynôme du second degré $f$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse ; la corriger si elle est fausse.

1. L'équation $f(x)$ a une solution $-2$.
   **Correction :**
   FAUX : il y a deux solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 2$
2. La fonction polynôme $f$ a deux racines de signe opposés.
   **Correction :**
   FAUX : les deux racines sont de même signe.
3. Le coefficient de $x^2$ est strictement négatif.
   **Correction :**
   VRAI
4. Le discriminant de $f$ est strictement négatif.
   **Correction :**
   FAUX : les discriminant est strictement positif car il y a deux racines
5. Les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$ sont $(0.5, 0.5)$.
   **Correction :**
   FAUX : elles sont $(1.5, 0.5)$

# Rappel :

**Méthode :**

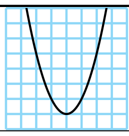
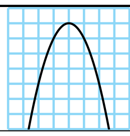
## Rappels **Polynôme du 2nd degré**

$f$ est un trinôme (polynôme) du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^2 + bx + c$

**À savoir par cœur :**

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_0 = \frac{-b}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

| | **a < 0** | **a > 0** |
|---|---|---|
| Variation de $f$ | $x$ : $-\infty$ ; $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ; $+\infty$ <br> $f$ : ↗ Max ↘ | $x$ : $-\infty$ ; $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ; $+\infty$ <br> $f$ : ↘ Min ↗ |
| aspect graphique |  |  |

| | **Δ < 0** | **Δ = 0** | **Δ > 0** |
|---|---|---|---|
| Racines de $f$ | Pas de racines | $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{-b}{2a}$ | $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et <br> $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| Factorisation | Pas de factorisation | $f(x) = a(x - x_0)^2$ | $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ |
| Signe de $f$ | **a > 0** <br> $x$ : $-\infty$ ; $+\infty$ <br> $f$ : $+$ | **a > 0** <br> $x$ : $-\infty$ ; $x_0$ ; $+\infty$ <br> $f$ : $+$ 0 $+$ | **a > 0** <br> $x$ : $-\infty$ ; $x_1$ ; $x_2$ ; $+\infty$ <br> $f$ : $+$ 0 $-$ 0 $+$ |
| Signe de $f$ | **a < 0** <br> $x$ : $-\infty$ ; $+\infty$ <br> $f$ : $-$ | **a < 0** <br> $x$ : $-\infty$ ; $x_0$ ; $+\infty$ <br> $f$ : $-$ 0 $-$ | **a < 0** <br> $x$ : $-\infty$ ; $x_1$ ; $x_2$ ; $+\infty$ <br> $f$ : $-$ 0 $+$ 0 $-$ |

# Chapitre 2
# Proportions et pourcentages

Date

## 1 Vocabulaire

### 1.1 Définition

Soit $A$ une partie (ou *sous-population* ) d'un ensemble $E$ (ou *population* ). On note $n_A$ et $n_E$ le nombre d'éléments (ou *d'individus* ) respectivement de $A$ et de $E$.

**Définition 1.** La proportion $p$ de $A$ par rapport à $E$ est le quotient : $p = \dfrac{n_A}{n_E}$ .

*Remarque 2.* — Une proportion est un nombre **toujours compris entre 0 et 1** .
- $p$ est aussi appelée :
  - *proportion* de $A$ dans $E$, ou *part* de $A$ dans $E$, ou encore *fréquence* de $A$ dans $E$,
  - ou encore taux de $A$ par rapport à $E$ lorsque la proportion est écrite sous forme de pourcentage $\dfrac{t}{100}$.
- $n_A$ est aussi appelé *effectif* de $A$, $n_E$ est l'*effectif total* (ou *effectif de référence*).

### 1.2 Proportions à connaître

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $0 = 0\%$ $= \text{rien}$ | | | | $1 = 100\%$ $= \text{tout}$ |
| | | $0,5 = \frac{1}{2} = 50\%$ $= \text{la moitié}$ | | |
| | $0,25 = \frac{1}{4} = 25\%$ $= \text{le quart}$ | | $0,75 = \frac{3}{4} = 75\%$ $= \text{les trois quarts}$ | |

**Exemple 2.** Exemples de pourcentage. À savoir faire :

$$0,56 = 56\ \%,\quad 0,3 = 30\ \%,\quad 0,08 = 8\ \%,\quad 0,025 = 2{,}5\ \%,\quad etc\ldots$$

**Exemple 3.**
1. En juillet 2012, la France compte 3 millions de chômeurs, pour une population active de 29 millions de personnes. Quel est le taux de chômage ?

   **Correction :**

   Le taux de chômage est de $\dfrac{3}{29} \simeq 0,1034 = 10,3\%$

2. Dans un petit port, les cinq sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche ?

   **Correction :**

   il y a $\dfrac{5}{6} \times 720 = 600$ habitants qui vivent de la pêche

3. Lors des élections présidentielles en France (2e tour 2012), on a compté 9 millions d'abstentions, soit environ 20 % des inscrits. Combien de personnes étaient inscrites sur les listes électorales ?

**Correction :**

Soit $N$ le nombre d'électeur. On a $\dfrac{9}{N} = 0,20$. d'où $N = \frac{9}{0{,}20} = 9 \times \frac{100}{20} = 45$ millions d'inscrits.

# Exercices :

**Exercice 2.1 (Calculer un pourcentage).**

**Méthode :** Pour calculer $x\%$ d'un nombre $N$ on calcule $N \times \dfrac{x}{100}$

1. 25% de 300
   **Correction :**
   $300 \times \frac{25}{100} = 75$
2. 33% de 660
   **Correction :**
   $660 \times \frac{33}{100} = 217,8$
3. $0,5\%$ de 2 496 000
   **Correction :**
   $2\,496\,000 \times \frac{0,5}{100} = 12\,480$
4. 15% de $200,5$
   **Correction :**
   $200,5 \times \frac{15}{100} = 30,075$
5. 300% de 12
   **Correction :**
   Remarque : $300\% = \frac{300}{100} = 3$. On trouve ainsi : $12 \times 3 = 36$

**Exercice 2.2.**

**Méthode :** On utilisera la relation $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{n_A}}{\mathbf{n_E}} \Rightarrow \mathbf{n_A} = \mathbf{p} \times \mathbf{n_E} \Rightarrow \mathbf{n_E} = \dfrac{\mathbf{n_A}}{\mathbf{p}}$

1. Calculer $p$ lorsque $n_A = 18$ et $n_E = 2400$. Écrire le résulat sous forme de pourcentage.
   **Correction :**
   On a $p = \dfrac{n_A}{n_E} = \dfrac{18}{2400} = 0,0075 = 0,75\%$
2. Calculer $p$ lorsque $n_A = 14,6$ et $n_E = 59,2$. Arrondir à $10^{-2}$. Écrire le résulat sous forme de pourcentage.
   **Correction :**
   On a $p = \dfrac{n_A}{n_E} = \dfrac{14,6}{59,2} = 0,246 \simeq 0,25 = 25\%$
3. Calculer $p$ lorsque $n_A = 3,90$ et $n_E = 18$. Arrondir à $10^{-2}$. Écrire le résulat sous forme de pourcentage.
   **Correction :**
   On a $p = \dfrac{n_A}{n_E} = \dfrac{3,90}{18} = 0,216 \simeq 0,22 = 22\%$
4. Calculer $n_A$ lorsque $p = 0,098$ et $n_E = 250\,000$.
   **Correction :**
   On a $n_A = p \times n_E = 0,098 \times 250\,000 = 24\,500$
5. Calculer $n_E$ lorsque $p = 0,315$ et $n_A = 7\,875$.
   **Correction :**
   On a $n_E = \dfrac{n_A}{p} = \dfrac{7\,875}{0,315} = 25\,000$

6. Calculer $n_E$ lorsque $p = 27,25\%$ et $n_A = 68\,125$.
   **Correction :**
   On a $n_E = \dfrac{n_A}{p} = \dfrac{68\,125}{0,2725} = 250\,000$
7. Calculer 20% d'une somme de 600 euros.
   **Correction :**
   On a $n_E = 600$ et $p = 20\% = 0,2$ donc $n_A = p \times n_E = 0,20 \times 600 = 120$.
8. Sachant que 30% d'une somme $S$ vaut 330 euros, calculer $S$.
   **Correction :**
   On a $n_A = 330$ et $p = 30\% = 0,3$ donc $n_E = \dfrac{n_A}{p} = \dfrac{330}{0,30} = 1100$.

**Exercice 2.3.** Dans chaque question, repérer les nombres connus et calculer le nombre inconnu parmi $p$, $n_A$ et $n_E$.

**Répondre ensuite par une phrase.**

1. Dans une association de 375 membres, les propositions de modification des statuts doivent être approuvés par au moins 70% des adhérents pour entrer en vigueur. Quel nombre minimum d'adhérents doit voter favorablement ?
   **Correction :**
   On a $n_E = 375$, $p = 70\% = 0,7$ et donc $n_A = p \times n_E = 262,5$ Au minimum, il faut donc que 263 adhérents votent favorablement.
2. Un concessionnaire de voitures gère un parc de 450 véhicules dont 270 de marques étrangères.
   — Calculer la proportion de véhicules de marques étrangères dans ce parc.
   **Correction :**
   On a $n_E = 450$, $n_A = 270$ et donc $p = \dfrac{n_A}{n_E} = 0,6 = 60\%$. La proportion de voiture étrangère est de 60%
   — En déduire la proportion de véhicules de marques françaises.
   **Correction :**
   La proportion de véhicules de marques françaises est donc de $100\% - 60\% = 40\%$
3. Le salaire de Kevin est de 1800 euros par mois. Le montant de son loyer équivaut à 30% de son salaire. Quel est le montant de son loyer ?
   **Correction :**
   On a $n_E = 1800$, le salaire de Kevin et $p = 30\% = 0.30$. On en déduit que le montant de son loyer est de $n_A = p \times n_E = 540$ euros

**Exercice 2.4.**

1. En France, le taux normal de TVA est 20%. Calculer les montants de la TVA sur les prix HT (hors taxe) suivants :

$$a)\,25 \qquad b)\,104 \qquad c)\,89 \qquad d)\,45,30$$

**Correction :**

Il s'agit ici de calculer $n_A$ avec $n_E$ = le prix HT et $p = 20\%$. Avec la relation $n_A = p \times n_E$ on trouve ( avec $20\% = 0.2$) :
   a) Le montant de la TVA est de $25 \times 0,2 = 5$ euros
   b) Le montant de la TVA est de $104 \times 0,2 = 20,80$ euros
   c) Le montant de la TVA est de $89 \times 0.2 = 17.80$ euros
   d) Le montant de la TVA est de $45,30 \times 0.2 = 9.06$ euros

2. Dans la restauration, on applique un taux de TVA réduit, s'élevant à $5,5\%$. Retrouver les prix TTC (toute taxe comprise) des repas suivants, dont on donne le montant de TVA (en euros) :

$$a)\,0.19 \qquad b)\,1,40 \qquad c)\,4,95$$

**Correction :**

Il s'agit ici de calculer le prix **TTC**.
On calcule d'abord $n_E$ = le prix HT à l'aide de $p = 5,5\% = 0,055$.
Enfin on ajoute le prix HT et la taxe.
   a) Le pris HT est $\dfrac{0,19}{0,055} = 3,45$ euros. Le prix TTC est donc de : $3.45 + 019 = 3,64$ euros
   b) Le pris HT est $\dfrac{1,40}{0,055} = 25,45$ euros. Le prix TTC est donc de : $25,45 + 1,40 = 26,85$ euros
   c) Le pris HT est $\dfrac{4,95}{0,055} = 90$ euros. Le prix TTC est donc de : $90 + 4,95 = 94.95$ euros

3. Conaissez-vous un autre taux de TVA en France ?
   **Correction :**
   il y a le taux intermédiaire à 10%, et le taux à $2,1\%$ pour la presse

**Exercice 2.5.** Parmi les 450 jeunes d'une association :
— 90 ont eu un diplome de licence ;
— 150 ont un emploi ;
— 80 sont au chomage.

Par ailleurs 4 titulaires d'un diplome de licence sont au chômage.

1. Calculer la proportion de jeunes qui ont un emploi ou qui sont au chômage.
   **Correction :**

On note $E$ la population de l'association, $A$ celle des jeunes ayant une licence, $B$ celle de ceux qui ont un emploi et $C$ celle de ceux au chômage.
On a donc $n_E = 450$, $n_A = 90$, $n_B = 150$, $n_C = 80$

$$p_{B \text{ ou } C} = \frac{150+80}{450} \simeq 0,51 \simeq 51\%$$

On a $p_{B \text{ ou } C} = p_B + p_C$ car on ne peut être au chômage et avoir un emploi.
Environ 51% des jeunes de l'association ont un emploi ou sont au chômage.

2. Calculer la proportion de jeunes qui ont une licence ou qui sont au chômage.
**Correction :**

Ici certains jeunes sont au chômage et ont une licence. Il ne faut pas les compter deux fois.

$$p_{A \text{ ou } C} = \frac{90+80-4}{450} = \frac{166}{450} \simeq 0,37 \simeq 37\%$$

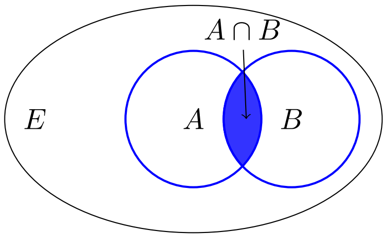
# Cours :

## 2 Intersection, Réunion

$A$ et $B$ sont deux sous-populations d'une population $E$. On note :
— $p(A)$ ou $p_A$ la proportion de $A$ dans $E$ et
— $p(B)$ ou $p_B$ la proportion de $B$ dans $E$

**Définition 4** (intersection)**.**

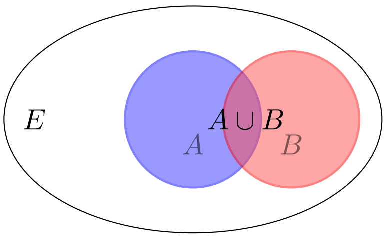
L' intersection de $A$ et $B$, notée $A \cap B$ , est constitué des éléments communs à $A$ et $B$ ; qui sont *à la fois* dans $A$ et dans $B$.




*Remarque* 3.
— Lorsque $A$ et $B$ n'ont **aucun** élément commun, on dits qu'ils sont *disjoints.* Dans ce cas, on note : $A \cap B = \emptyset$ .
— On note $p(A \cap B)$ la proportion de l'intersection de $A$ et $B$ dans $E$

**Définition 5** (Définition de l'union)**.**

L' union (ou la *réunion* ) de $A$ et $B$, notée $A \cup B$ , est constitué éléments appartenant à au moins une des parties $A$ et $B$.




**Proposition 6.** La proportion de $A \cup B$ dans $E$ est donnée par :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

cas particulier : Lorsque $A$ et $B$ sont *disjoints* , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

**Exemple 7.** Dans un groupe de 80 élèves de première STMG, un professeur d'éducation physique et sportive a noté que le football est pratiqué par 34 élèves, le basket-ball par 25 élèves, et parmi eux 12 élèves pratiquent à la fois le basket-ball et le football.
**Correction :**
On note $E$ l'ensemble des élèves de la classe, $F$ celui de ceux qui jouent au football, $B$ celui de ceux qui jouent au basketball. On a $n_E = 80$, $n_F = 34$, $n_B = 25$ et $n_{F \cap B} = 12$.

1. Calculer la proportion des pratiquants du football dans ce groupe d'élèves de première STMG.
   **Correction :**
   la proportion des pratiquants du football est $p(F) = \dfrac{34}{80} = 0,425 = 42,5\%$.

2. Calculer la proportion des pratiquants du basket-ball dans ce groupe d'élèves de première STMG.
   **Correction :**
   la proportion des pratiquants du basket-ball est $p(B)=\dfrac{25}{80}=0,3125=31,25\%$.
3. Calculer la proportion des pratiquants à la fois du football et du basket-ball dans ce groupe d'élèves de première STMG.
   **Correction :**
   la proportion des pratiquants les deux sports est $p(F\cap B)=\dfrac{12}{80}=0,15=15\%$.
4. Calculer la proportion d'élèves pratiquant au moins un de ces deux sports.
   **Correction :**
   la proportion des pratiquants au moins un des deux sports est $p(F\cup B)=p_F+p_B-p_{F\cap B}=0,425+0,3125-0,15=0,5875=58,75\%$.
5. De plus 7 élèves pratiquent uniquement le tennis ; calculer la proportion d'élèves pratiquant le football ou le tennis.
   **Correction :**
   la proportion des pratiquants du tennis est $p(T)=\dfrac{7}{80}=0,0875=8,75\%$
   Comme $F\cap T=\emptyset$, la proportion des pratiquants du football ou du tennis est $p(F\cup T)=0,425+0,0875=0,5125=51,25\%$.

# Exercices

**Exercice 2.6.** Lu sur un site internet en 2010 : « Comme plus des deux tiers des cadres ne disposent pas encore aujourd'hui d'ordinateurs portables (61%) ... »

Cette affirmation est-elle mathématiquement correcte ?

**Correction :**

Non car $2/3 \simeq 0,667 = 66,7\%$

**Exercice 2.7.**

1. Dans un immeuble 20% des appartements sont des studios et 30% sont des F3.

   Peut-on en déduire que, dans cet immeuble, il y a moins de studio que de F3 ? Pourquoi ?

   **Correction :**

   Oui car les proportions sont calculées à partir de la même population de référence : les appartements de l'immeuble.

2. Parmi les pilotes de Formule 1 (course automobile), J. M. Fangio remporta 24 grand prix, A. Senna en remporta 41 et A. Prost en gagna 51. J.M Fangio a couru 51 courses, A. Senna 161 et Prost 199.

   Calculer la *fréquence* de courses victorieuses pour chacun des pilotes.

   Les fréquences sont-elles rangées dans le même ordre que les nombres des victoires ? Pourquoi ?

   **Correction :**

   On a pour J.M. Fangio $\frac{24}{51} \simeq 47\%$ de victoires, pour A. Senna $\frac{41}{161} \simeq 25\%$ de victoires et pour A. Prost $\frac{51}{199} \simeq 26\%$ de victoires.
   Les fréquences **ne sont pas** dans le même ordre que le nombre de victoires car les populations de référence (le nombre de courses courues) ne sont pas les mêmes.

**Exercice 2.8.** Lors d'une journée « portes ouvertes », un club de ski propose deux initiations : ski de fond **ou** raquettes. Il n'est possible de participer qu'à une seule initiation. Le bilan montre que 35% des visiteurs se sont initiés au ski de fond et que 50% des visiteurs se sont initiés aux raquettes.

Calculer la proportion de visiteurs ayant participé à une initiation.

**Correction :**

Comme les visiteurs **n'ont pas pu faire les deux** initiations, la proportion de visiteurs ayant participé à une initiation est de $50 + 35 = 85\%$

**Exercice 2.9.** Un examen est composé d'une épreuve pratique et d'une épreuve théorique. Pour réussir à l'examen, il faut réussir les deux épreuves.

La proportion de candidats ayant réussi l'épreuve pratique est de $0,9$ ; la proportion de candidats ayant réussi l'épreuve théorique est égale à $0,8$. La proportion de candidats ayant réussi au moins une épreuve est de $0,95$.

Calculer la proportion de candidats reçus.

**Correction :**

On note $A$ l'ensemble des candidats reçus à l'épreuve pratique et $B$ celui de ceux ayant réussi l'épreuve théorique. On a :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
et donc $0,95 = 0,9 + 0,8 - p(A \cap B)$.
La proportion de candidats reçus à l'examen est donc de
$p(A \cap B) = 0,9 + 0,8 - 0,95 = 0,75$.

**Exercice 2.10.**

Les train “Grandes Lignes” se divisent en deux catégories : les TGV et les Corail. Dans les deux cas, on peut voyager en première classe ou en seconde classe.

Lors d’une enquète, dans une gare pendant une semaine estivale, on observe que, sur les 2540 billets vendus, 82% sont des billets de seconde classe. Sur les 850 billets de TGV vendus, 14% sont des billets de première classe.

1. Recopier et compléter le tableau d’effectif suivant :

| | Corail | TGV | Total |
|---|---|---|---|
| 2nd | | | |
| 1ère | | | |
| Total | | 850 | 2450 |

**Correction :**

On trouve

| | Corail | TGV | Total |
|---|---|---|---|
| 2nd | 1278 | 731 | 2009 |
| 1ère | 322 | 119 | 441 |
| Total | 1600 | 850 | 2450 |

2. Vérifier que la proportion de billets première classe vendus parmi les billets Corails est de 20% (arrondi à l’unité)

**Correction :**

La proportion des billets de première parmi les train Corail est de $\dfrac{322}{1600} = 0,20125 \simeq 0,20 = 20\%$.

3. Le directeur de la gare déduit de cette enquète que 34% des billets vendu sont des billets de première classe. Qu’en pensez vous ? Jusitifier.

**Correction :**

La proportion des billets de 1ère est donnée par : $\dfrac{441}{2450} = 18\%$ et **non** par $20\% + 14\% = 34\%$ : le directeur se trompe.

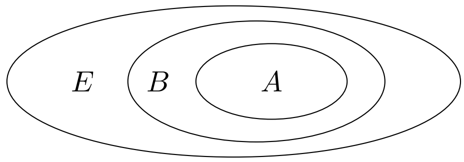
# Cours :

## 3 Inclusion

$A$ et $B$ sont deux sous-populations d'une population $E$.

**Définition 8.**

Lorsque tous les éléments de l'ensemble $A$ appartiennent à l'ensemble $B$, on dit que $A$ est *inclus* dans $B$, et on note $A \subset B$ .




**Exemple 9.** Tout habitant du département 92 habite en France : l'ensemble des habitants du 92 est *inclus* dans l'ensemble des habitants en France.

**Proposition 10.** $A \subset B$ et on note $p$ la proportion de $A$ dans $E$, $p_1$ la proportion de $A$ *dans* $B$ et $p_2$ celle de $B$ *dans* $E$ , on a :

$$p = p_1 \times p_2$$

**Exemple 11.** Dans une classe de Première, il y a 30% de garçons. 60% de ces garçons ont 17 ans.

Calculer la proportion des garçons de 17 ans dans cette classe.

**Correction :**

Avec $p_1 = 60\%$ et $p_2 = 30\%$, il y a $0.30 \times 0.60 = 0.18 = 18\%$ des élèves sont des garçons de 17 ans

De plus on sait que 70% des filles n'ont pas 17 ans. **Compléter le tableau ci-dessous.**

**Correction :**

Avec $p_1 = 70\%$ et $p_2 = 100 - 30 = 70\%$, il y a $0.70 \times 0.70 = 0.49 = 49\%$ des élèves sont des filles qui n'ont pas 17 ans

**Tableau de proportions ou fréquences (en %) :**

| % | Garçons | Filles | Total |
|---|---|---|---|
| 17 ans | 18 | 21 | 39 |
| autres | 12 | 49 | 61 |
| Total | 30 | 70 | 100 |

# Exercices

**Exercice 2.11.** D'après une brochure de l'académie de Grenoble en 2010, la population de cette académie représente

— 4,8% de la population nationale

— 50,7% de la population de la région Rhône-Alpes.

Calculer la proportion de la population de Rhône-Alpes dans la population nationale.

**Correction :**

On note $p$ la proportion de la population de l'académie dans la population nationale et $p_1$ celle de la population de l'académie dans la région. Enfin on note $p_2$ la proportion de la population de la région dans la population nationale.
On a alors $p = p_1 \times p_2$, c'est à dire $0,048 = 0,507 \times p_2$. On en déduit que $p_2 = \frac{0,048}{0,507} \simeq 0,0947 = 9,47\%$

**Exercice 2.12.** Une enquête auprès d'élèves fumeurs montre que 90% d'entre eux ont déjà essayer d'arrêter de fumer. De plus parmi ces derniers, 60% ont réussit à s'arrêter plus de 2 mois. Calculer la porportion d'élèves ayant réussit à arrêter de fumer pendant plus de 2 mois parmi les élèves fumeurs.

**Correction :**

On a $p_2 = 0.90 = 90\%$ la proportion des élèves fumeurs ayant essayé d'arrêter de fumer ; et $p_1 = 0.60 = 60\%$ celle de ceux qui, ayant essayé d'arrêter, n'ont pas fumé pendant un mois ou plus.
La proportion de ceux qui se sont arrêtés pendant un mois ou plus parmi les élèves interrogés est donc de $p = p_1 \times p_2 = 0.6 \times 0.9 = 0.54 = 54\%$

**Exercice 2.13.**

Une enquète au près d'un groupe de personnes établit que :

— 82% d'entre-elles ont au moins 18 ans ;

— 42% d'entre-elles sont titulaire du permis de conduire.

Déterminer la proportion de personne titulaire du permis de conduire parmi celles qui ont plus de 18 ans ; on donnera le résultat sous forme de pourcentage arrondi à 0,1% près.

Remarque : il est nécessaire d'avoir 18 ans pour être titulaire du permis de conduire.

**Correction :**

On a $p = 0.42 = 42\%$ la proportions de personnes ayant le permis de conduire et $p_2 = 0.82 = 82\%$ celle des personnes agées de plus de 18 ans. On cherche à connaître $p_1$, la proportion de gens ayant le permis de conduire parmi les personnes de plus de 18 ans.
Comme $0.42 = p = p_1 \times p_2 = p_1 \times 0.82$, on trouve donc
$p_1 = \dfrac{.42}{0.82} \simeq 0.5121 \simeq 0.512 \simeq 51.2\%.$

**Exercice 2.14.** Le tableau ci-contre donne une estimation de la population française par sexe et par âge en 2011.

| | Ensemble | Hommes | Femmes |
|---|---|---|---|
| Population totale | 63 136 180 | 30 586 946 | 32 549 234 |
| Moins de 20 ans | 15 368 039 | 7 861 611 | 7 506 428 |
| De 20 à 64 ans | 37 076 796 | 18 298 213 | 18 778 583 |
| 65 ans ou plus | 10 691 345 | 4 427 122 | 6 264 223 |

1. Donner la proportion des femmes dans la population totale.
   **Correction :**
   La proportion de femmes dans la population total est
   $\frac{32\,549\,234}{63\,136\,180} \simeq 0.515 \simeq 52\%$
2. Donner la proportion des femmes dans la population des moins de 20 ans.
   **Correction :**
   La proportion des femmes dans la population des moins de 20 ans est
   $\frac{7\,506\,428}{15\,368\,039} \simeq 0.488 \simeq 49\%$
3. Donner de deux façons la proportion des femmes de moins de 20 ans dans la population totale.
   **Correction :**
   La proportion des femmes de moins de 20 ans dans la population totale est donnée par
   $\frac{7\,506\,428}{63\,136\,180} \simeq 0.118 \simeq 12\%$
   ou par la règle de calcul des proportions des inclusions : $p = p_1 \times p_2$. La proportion des moins de 20 ans est de
   $\frac{15\,368\,039}{63\,136\,180} \simeq 0.243 \simeq 24\%$. On trouve alors
   $p = p_1 \times p_2 = 0.24 \times 0.49 \simeq 0.117 \simeq 12\%$

à voir
`https://www.youtube.com/watch?v=rcKTUIRsByw`
`https://www.youtube.com/watch?v=eyW8y7lSeZg`

**Exercice 2.15.** Une entreprise possède trois usines de fabrication d'alarmes : la première située à Bordeaux, la deuxième à Grenoble et la troisième à Lille.

Un contrôleur qualité s'intéresse au nombre d'alarmes (défectueuses ou non), produites en ce mois de septembre 2007 dans chacune des trois usines.

Il a relevé les données suivantes :

| | Défectueuses | En bon état | Total |
|---|---|---|---|
| Usine de Bordeaux | 160 | 3 200 | 3 360 |
| Usine de Grenoble | 66 | 1 200 | 1 266 |
| Usine de Lille | 154 | 3 500 | 3 654 |
| Total | 380 | 7 900 | 8 280 |

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. *Dans toute cette question, les résultats seront arrondis à* $10^{-3}$ *près.*

   (a) Calculer la proportion d'alarmes fabriquées à Bordeaux.

   **Correction :**
   La proportion d'alarmes fabriquées à Bordeaux est de :
   $p(B) = \dfrac{3360}{8280} \approx 0{,}405\,7$,soit environ $0,406$.

   (b) Calculer la proportion d'alarmes défectueuses.

   **Correction :**
   La proportion d'alarmes défectueuses est de :
   $p(D) = \dfrac{380}{8\,280} \approx 0{,}045\,8$ soit environ 0,046.

   (c) Calculer la proportion d'alarmes défectueuses fabriquées à Bordeaux.

   **Correction :**
   La proportion d'alarmes défectueuses fabriquées à Bordeaux est de :
   $p(B \cap D) = \dfrac{160}{8\,280} \approx 0,0193$, soit environ 0,019.

   (d) En déduire la proportion d'alarmes défectueuses ou fabriquées à Bordeaux.

   **Correction :**
   La proportion d'alarmes défectueuses ou fabriquées à Bordeaux est de :
   $p(B \cup D) = p(B) + p(D) - p(B \cap D) = 0,406 + 0,046 - 0,019 = 0,433$.

   (e) Calculer la proportion d'alarmes défectueuses parmi celles fabriquées à Bordeaux.

   **Correction :**
   La proportion d'alarmes défectueuses parmi celles fabriquées à Bordeaux est de :
   $\dfrac{p(B \cap D)}{p(B)} = \dfrac{0,019}{0,406} \approx 0{,}046\,7$ soit environ 0,047.

(f) Quelle usine semble la plus efficace en terme de qualité de production ?

**Correction :**

— À Bordeaux la proportion d'alarmes défectueuses est : $\dfrac{160}{3\,360} \approx 0,048$.

— À Grenoble la proportion d'alarmes défectueuses est : $\dfrac{66}{1\,266} = 0,052$.

— À Lille la proportion d'alarmes défectueuses est : $\dfrac{154}{3\,654} \approx 0,042$.

C'est donc l'usine de Lille qui semble être la plus efficace.

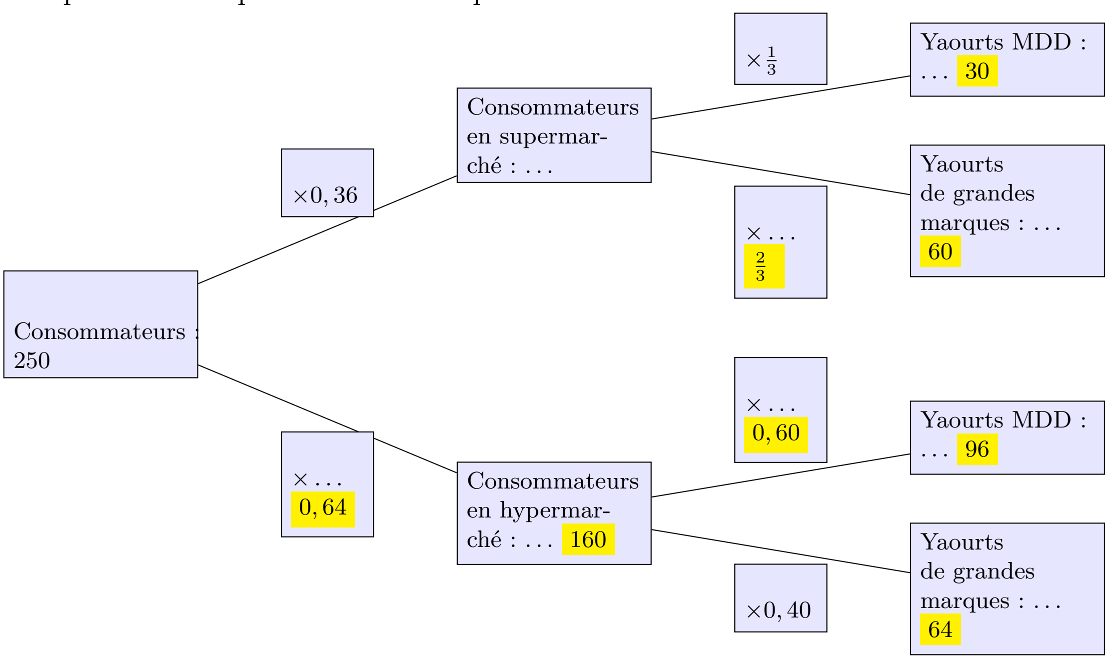
**Exercice 2.16.** Une enquête a été réalisée auprès de consommateurs de yaourts. 250 personnes ont été interrogées. Les consommateurs ont le choix entre les yaourts de grandes marques ou les marques de distributeurs (**MDD**). Parmi les personnes interrogées :

— 36% achètent des yaourts dans un supermarché, les autres dans un hypermarché (qui est plus grand) ;

— 1/3 des consommateurs, qui achètent dans un supermarché, achètent des yaourts MDD. 40% des consommateurs, qui achètent dans un hypermarché, achètent des yaourts de grandes marques

**On cherche le nombre de consommateurs de yaourts de MDD puis la part des consommateurs de yaourts de MDD dans les achats de yaourts.**

1. Compléter l'arbre pondéré suivant représentant cette situation.




2. Déterminer le nombre de consommateurs achetant des yaourts MDD.

3. Déterminer, sous forme de pourcentages, la proportion de consommateurs achetant des yaourts MDD parmi les personnes interrogées.

4. Compléter le tableau suivant dans lequel on fera figurer des effectifs de consommateurs :

| | Nombre de consommateurs en supermarché | Nombre de consommateurs en hypermarché | Total |
|---|---|---|---|
| Consommateurs de yaourts de MDD | 30 | 96 | 126 |
| Consommateurs de yaourts de grandes marques | 60 | 64 | 124 |
| Total | $0,36 \times 250 = \ldots$ 90 | 160 | 250 |

# Comme au Devoir 2

**Exercice 2.17.** Une enquête s'est intéressée à deux maladies : la grippe et l'angine. On a interrogé 2000 personnes : 380 ont eu la grippe, 550 ont eu une angine. De plus 300 personnes ont eu les deux maladies.

1. Calculer en % la proportion des personnes qui ont eu les deux maladies

**Correction :**

La proportion des personnes ayant eu les deux maladies est :$\dfrac{300}{2000} = 0,15 = 15\%$.

2. Calculer en % la proportion des personnes qui ont eu la grippe puis celle de ceux qui ont eu une angine.

**Correction :**

La proportion des personnes ayant eu la grippe est :$\dfrac{380}{2000} = 0,19 = 19\%$.

La proportion des personnes ayant eu une angine est de : $\dfrac{550}{2000} = 0,275 = 27,5\%$.

3. Déduire des questions précédentes la proportion en % des personnes qui ont eu au moins une des deux maladies. $31,5\%$

**Correction :**

La proportion des personnes ayant eu au moins un des deux maladie est :$0,19 + 0,275 - 0,15 = 0,315 = 31,5\%$.

**Exercice 2.18.** Une agence bancaire classe ses clients en deux catégories, notées $J$ et $V$, pour lesquelles elle propose deux types de prêts $C$ et $L$. L'agence fait une étude sur 1 000 clients. 55% des clients sont dans la catégorie $V$ et le reste dans la catégorie $J$. 40% des prêts contractés par les clients de la catégorie $J$ sont des prêts $L$. 20% des prêts contractés par la catégorie $V$ sont des prêts $L$.

1. Compléter, en justifiant vos calculs, le tableau suivant :

| | Prêts $L$ : longs | Prêts $C$ : courts | Total |
|---|---|---|---|
| Catégorie $J$ : jeunes | 180 | 270 | 450 |
| Catégorie $V$ : vieux | 110 | 440 | 550 |
| Total | 290 | 710 | 1 000 |

**Correction :**

Total catégorie $V$ : $0,55 \times 1000 = 550$ d'où total catégorie $J$ : $1000 - 550 = 450$.
De là Dans la catégorie $V$ la proportion de prêts $C$ est de $100\% - 20\% = 80\%$ et il y a $0,80 \times 550 = 440$ prêts $C$ dans la catégories $V$. (On peut aussi calculer $550 - 110$.)
Dans la catégorie $J$, 40% des prêts sont des prêts $L$, soit $0,40 \times 450 = 180$. On conclue qu'il y a $450 - 180 = 270$ prêts $C$ dans la catégorie $J$.

2. Déterminer, sous la forme d'un pourcentage, la proportion de prêts $L$ contractés par la catégorie $J$ parmi l'ensemble des prêts.

**Correction :**

La proportion des prêts $L$ contractés par la catégorie $J$ dans l'ensemble des prêts est de : $\dfrac{180}{1000} = 0,18 = 18\%$

3. Déterminer, sous la forme d'un pourcentage, la proportion de prêts $L$ contractés par la catégorie $V$ parmi l'ensemble des prêts.

**Correction :**

La proportion des prêts $L$ contractés par la catégorie $V$ dans l'ensemble des prêts est de : $\dfrac{110}{1000} = 0,11 = 11\%$

4. En déduire la proportion, exprimée en %, de prêts $L$ parmi l'ensemble des prêts contractés.

**Correction :**

La proportion des prêts $L$ dans l'ensemble des prêts est de : $\dfrac{180}{1000} = 0,18 + 0,11 = 0,29 = 29\%$

**Exercice 2.19.** 1. Sur le marché des chaussures de sport, la marque N détient 66% du marché et le modèle "BLUE" de la marque N représente 19,8% de la totalité du marché. Déterminer la part du modèle "BLUE" dans la marque N.

**Correction :**

On note $p$ la part du modèle BLUE dans l'ensemble du marché, $p_1$ celle du modèle N parmi les chaussures de la marque N et $p_2$ la part de la marque N dans l'ensemble du marché.
On cherche $p_1$ et l'on connait $p = 19,8\%$ et $p_2 = 66\%$. Comme $p = p_1 \times p_2$ on a aussi

$$p_1 = \frac{p}{p_2} = \frac{0,198}{0,66} = 0,3 = 30\%$$

2. La Médiathèque du quartier est composée de 35% de films d'action et, parmi ces films d'action, 55% sont des films policiers. Quelle est la proportion de films policiers dans la médiathèque ?

**Correction :**

On note $p_1$ la proportion de films policiers dans les films d'action et $p_2$ celle des films d'action dans la médiathèque. La proportion $p$ de films policiers dans la médiathèque est de $p = p_1 \times p_2 = 0,35 \times 0,55 = 0,1925 = 19,25\%$

**Exercice 2.20.** Dans un groupe, 30% des personnes utilisent leur vélo pour aller au travail, 50% utilisent le train, 20% utilisent les deux moyens de transport. 65% des personnes utilisant uniquement le vélo portent un casque et 50% d' entre-elles portent aussi un gilet réfléchissant.

1. Quel est le pourcentage du groupe représentant les personnes utilisant au moins un des deux moyens de transport ?

**Correction :**

Le pourcentage du groupe utilisant au moins un des deux moyens de transport est donné par

$$30 + 50 - 20 = 60\%$$

2. Quel pourcentage du groupe correspond aux personnes utilisant uniquement le vélo ?

**Correction :**

Le pourcentage de gens utilisant uniquemnt le vélo est donné par $30 - 20 = 10\%$

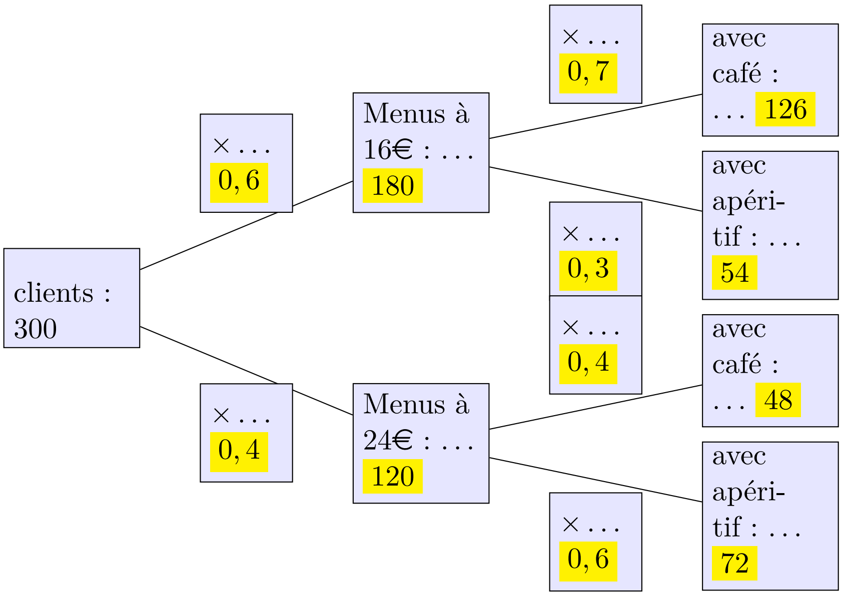
3. Quel pourcentage du groupe n'utilisant que le vélo correspond aux personnes portant un casque et un gilet ?

**Correction :**

Parmi ceux n'utilisant que le vélo, le pourcentage de ceux utilisant un casque et un gilet est de $0,50 \times 0,65 = 0,325 = 32,5\%$

**Exercice 2.21.** Un restaurant sert 300 clients par service, en proposant un menu à 16€ et un menu à 24€. Pour l'inauguration du restaurant le gérant offre à chacun de ses clients soit un café soit un apéritif. 60% des clients ont choisi un menu à 16€ ; parmi ceux-ci, 30% ont pris un apéritif. 60% des clients ayant choisi un menu à 24€ont pris un apéritif.

1. Compléter l'arbre pondéré suivant représentant cette situation.




2. Déterminer le nombre de clients ayant pris un café.

**Correction :**

Le nombre de clients ayant pris un café est de $126 + 48 = 174$.

à voir
https://www.youtube.com/watch?v=ezY-VntwbwU

# Cours :

## 4 Coefficient multiplicateur - première approche

**Exemple 12.** Le salaire d'Olivier qui est de 1 540 euros est augmenté de 5%. Quel est le nouveau salaire d'Olivier ?
On peut calculer le montant de l'augmentation, puis le nouveau salaire :

**Correction :**
l'augmentation est de $0,05 \times 1540 = 77$ euros. Le nouveau salaire est donc de $1540 + 77 = 1617$ euros

On peut aussi calculer :

$$1540 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1617$$

Le nouveau salaire d'Olivier est de 1 617 euros

**Proposition 13.**

— Augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$

— Diminuer de $t\%$ revient à multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$

**Exercice 2.21.** Au 1er janvier 2015, un village comptait 120 habitants. Durant l'année, la population à diminué de 12, 5%. Quel est la population au 1er janvier 2016 ?
**Correction :**
La population a diminué de 12, 5%. Le coefficient multiplicateur est donc de $1 - \frac{12,5}{100} = 0,875$. La population au 1er janvier 2016 est donc de

$$120 \times 0,875 = 105 \text{ habitants}$$

**Exercice 2.22.** Compléter le tableau suivant sachant que le taux de TVA appliqué est de 20%

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix HT | 24 | 230 | | 14 | |
| Prix TCC | | | 199 | | 17 |

**Exercice 2.23.** Le gagnant d'un jeu de télévision se voit attribué une rente pendant un an. Le premier mois il touche 1 500€ puis le versement augmente chaque mois de 5%.

Calculer la somme perçue par le gagnant le 1er mois, le 2ième mois, le 3ième mois et le 4ième mois.
**Correction :**

Augmentation de 5% : coefficient multiplicateur est égal à :
$1 + \dfrac{5}{100} = 1,05$.

— Somme perçue le premier mois $u_0 = 1500$ euros
— Somme perçue le deuxième mois $u_1 = 1500 \times 1,05 = 1575$ euros
— Somme perçue le troisième mois $u_2 = 1575 \times 1,05 = 1653,75$ euros
— Somme perçue le quatrième $u_3 = 1653,75 \times 1,05 = 1\,736{,}437\,5$ euros

**Exercice 2.24.**

1. Monsieur et Madame Dupont placent un capital de 1 000€ au taux annuel de 4% à intérêts simples (chaque année le capital acquis est augmenté du même montant : celui de la première année).
   Calculer le montant du capital au bout de deux années.
   **Correction :**
   Chaque année, les époux reçoivent $1000 \times 0,04 = 40$ euros.
   Au bout d'une année, ils ont un capital de $1000 + 40 = 1040$ euros. On retrouve le **coefficient multiplicateur :** $1000 \times 1,04 = 1040$
   Au bout de deux années, ils ont capital de $1040 + 40 = 1080$. Ce **n'est plus** une augmentation de 4% du capital car $40 \neq 0,04 \times 1040$ ; on n'utilise pas le coefficient multiplicateur.
2. Monsieur et Madame Martin placent un capital de 1 000€ au taux annuel de $3,99\%$ à intérêts composés (chaque année le capital acquis est augmenté de $3,99\%$).
   Calculer le montant du capital au bout de deux années.
   **Correction :**
   Chaque année, le capital est augmenté de $3,99\%$. Le coefficient multiplicateur est de $1 + \frac{3{,}99}{100} = 1,0399$.
   Au bout d'une année, le capital est $1000 \times 1,0399 = 1039,9$ euros.
   Au bout de deux années, ils est de $1039,9 \times 1,0399 == 1081,39$ euros.

# Chapitre 3
# Suites numériques
14/11/2016

## Cours :
à voir
`https://www.youtube.com/watch?v=iVyttQCabJM&list=PL_1WVGjLTYqK4esG6Rex4AhPwBX3zFpFC&index=3`

## 1 Suites : généralités

### 1.1 Définition

**Définition 1.** Une suite numérique est une fonction, qui à tout *entier naturel* $n$ associe un *nombre réel* .

**Idée :** une suite est une liste de nombres réels numérotés par les nombres entiers naturels.

**Notation.**
- On utilise généralement les lettres $u$, $v$ et $w$ pour désigner les suites.
  On note la suite $(u_n)$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Le terme général de la suite ou terme de rang $n$ se note $u_n$ (au lieu de $u(n)$ comme pour une fonction).
- $n$ est l'indice de $u$.
- Le terme initial de la suite est :
  soit $u_0$ si la numérotation de la suite *commence à* 0 soit $u_1$ si la numérotation de la suite *commence à* 1

**Exemple 2.** Les six premiers termes d'une suite $(u_n)$ sont 8, 10, 11, 14, 16, 20 ...
En numérotant les termes à partir de 0, on voit que :
- le terme de rang 0 est 8
- le terme de rang 4 est 16

**On note donc** $u_0 = 8$ et $u_4 = 16$

**Exemple 3.** On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{16}{2^n}$. Donner les 5 premier termes de la suite.

**Correction :**

On a
- $u_0 = 16$ (car $2^0 = 1$),
- $u_1 = \dfrac{16}{2} = 8$,
- $u_2 = \dfrac{16}{2^2} = \dfrac{16}{4} = 4$,
- $u_3 = \dfrac{16}{2^3} = \dfrac{16}{8} = 2$ et $u_4 = \dfrac{16}{2^4} = 1$.

# Cours :

## 1.2 Génération

**Définition 4** ( DÉFINITION EXPLICITE )**.** Lorsque le terme général $u_n$ est donné *en fonction* de $n$ : $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction.

**Remarque** On peut alors calculer directement tout terme $u_n$.

**Exemple 5.** On considère la suite définie par $u_n = 40n + 1000$. Calculer $u_0$, $u_2$, $u_4$ et $u_{45}$

**Correction :**

On a $u_0 = 40 \times 0 + 1000 = 1000$, $u_2 = 40 \times 2 + 1000 = 1080$, $u_4 = 40 \times 4 + 1000 = 1160$ et $u_{45} = 40 \times 45 + 1000 = 2800$.

**Exemple 6.** On considère la suite définie par $u_n = 1000 \times (1,03)^n$. Calculer $u_0$, $u_2$, $u_4$ et donner une valeur approchée à $10^{-2}$ de $u_{45}$

**Correction :**

On a $u_0 = 1000 \times (1,03)^0 = 1000 \times 1 = 1000$, $u_2 = 1000 \times (1,03)^2 = 1060,9$, $u_4 = 1000 \times (1,03)^4 = 1125,50881$ et $u_{45} \simeq 3781,60$.

**Définition 7** ( DÉFINITION PAR RÉCURRENCE )**.** Une suite est définie par *récurrence* (ou sous fome récurrente ) quand elle est définie par :

— la donnée du *terme initial* $u_0$ ou $u_1$ . une relation liant *un terme* au terme précédent : par exemple
  — $u_{n+1}$ est donné en fonction de $u_n$ .
  — ou bien $u_n$ est donné en fonction de $u_{n-1}$ .

**Exemple 8.** On considère la suite définie par $u_0 = 1000$ et $u_n = u_{n-1} + 40$. Calculer $u_0$, $u_2$ et $u_4$.

**Correction :**

On a bien sur $u_0 = 1000$. Pour calculer $u_2$, **il faut calculer** $u_1$ **avant**. On a donc :
$u_1 = u_0 + 40 = 1000 + 40 = 1040$
$u_2 = u_1 + 40 = 1040 + 40 = 1080$
$u_3 = u_2 + 40 = 1080 + 40 = 1120$
$u_4 = u_3 + 40 = 1120 + 40 = 1160$

**Exemple 9.** On considère la suite définie par $u_0 = 1000$ et $u_n = u_{n-1} \times (1,03)$. Calculer $u_0$, $u_2$ et $u_4$.

**Correction :**

On a bien sur $u_0 = 1000$. Pour calculer $u_2$, **il faut calculer** $u_1$ **avant**. On a donc :
$u_1 = u_0 \times (1,03) = 1000 \times (1,0399) = 1030$
$u_2 = u_1 \times (1,03) = 1030 \times (1,0399) = 1060,9$
$u_3 = u_2 \times (1,03) = 1060,9 \times (1,0399) = 1092,727$
$u_4 = u_3 \times (1,03) = 1092,727 \times (1,0399) = 1125,50881$

**Exercice 3.1.** Que pouvez vous remarquez à propos de ces suites ?

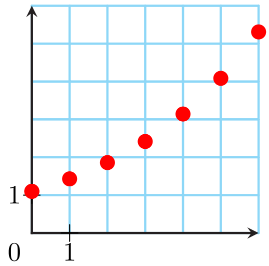
### 1.3 Sens de variation

**Définition 10.** La suite est strictement croissante si, pout tout n, $u_n < u_{n+1}$ .
La suite est strictement décroissante si, pout tout n, $u_n > u_{n+1}$ .

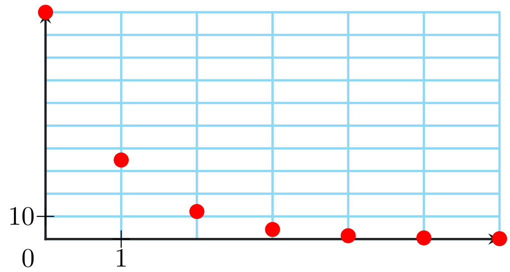
### 1.4 Représentation graphique

**Définition 11** (Représentation graphique)**.** La *représentation graphique* d'une suite $(u_n)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ .

**Exemple 12.**




La suite est ***croissante*** : « ça monte ! »




La suite est ***décroissante*** : « ça descend ! »

# Tableur

**Exercice 3.2.** — Figure 1 : Comment s'appelle cette figure ? Donner le PIB des États-Unis en 2015 ; celui de 2016.
- Figure 2 : Comment s'appelle cette figure ? Et en anglais ? Comparer (à vue) le PIB de la Chine avec celui de la France, de l'Allemagne et du Royaume-Uni.
- Figure 2 et 3 : Pourquoi alors que le PIB des États-unis reste inchangé, la zone correspondante du camembert n'était-elle pas la même ?
- Figure 4 : La suite des PIB du Royaume-Uni est-elle croissante ? décroissante ? ni l'un ni l'autre ? Même question avec la Russie puis la France.
- Figure 5 : Quel est la principale (la plus importante pour le sens) différence entre cette figure et la figure 4 ?
- Sur la feuille de calcul "Ex1donnees", comment est obtenu le nombre correspondant aux État-Unis en 2017 ? Obtenez de la même manière des nombres pour les autres pays (cela demande 15 secondes maximum !)
- Vous venez de voir la fonction "PREVISION". Chercher sur internet (3 minutes) comment cela fonctionne et ce que cela veut dire.

**Exercice 3.3 (une suite "arithmétique").** On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_n = u_{n-1} - 3,5$. De même on considère la suite définie par $v_n = 5 - 3,5 \times n$.
- Quelles sont les formules dans les cases "B2" et "C2". Sont-elles les mêmes ?
- Donner les termes de rang 4 et 5 de la suite $u_n$.
- Donner les quatrièmes et cinquièmes termes de la suite $u_n$.
- Obtenir du tableur qu'il affiche tous les termes jusqu'au rang 26 des suites $u_n$ et $v_n$. Quelles sont les formules donnant les cases "B8" et "C8" ?
- Qu'observez-vous concernant $u_n$ et $v_n$ ?
- Obtenez du tableur une représentation graphique de la suite $u_n$. Que remarquez vous ?
- La suite semble-t-elle croissante ? décroissante ? Pourquoi "semble" et non pas "est" ?
- Dans la colone "D" afficher au rang $n$ la différence $v_n - v_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

**Exercice 3.4 (une suite "géométrique").** On considère la suite définie par $u_1 = 1/256$ et $u_n = u_{n-1} \times b$ où $b = 2$ s'appelle la raison. De même on considère la suite définie par $v_n = 1024 \times (b)^{n-1}$.
- Quelles sont les formules dans les cases "B2" et "C2". Sont-elles les mêmes ?
- Donner les termes de rang 4 et 5 de la suite $u_n$.
- Obtenir du tableur qu'il affiche tous les termes jusqu'au rang 19 des suites $u_n$ et $v_n$. Quelles sont les formules donnant les cases "B8" et "C8" ?
- Qu'observez-vous concernant $u_n$ et $v_n$ ?
- Obtenez du tableur une représentation graphique de la suite $u_n$.
- La suite semble-t-elle croissante ? décroissante ? Pourquoi "semble" et non pas "est" ?
- Dans la colone "D" afficher au rang $n$ la différence $v_n/v_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$

**Exercice 3.5.** On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = 1 - \frac{u_{n-1}^2}{2}$.
- Quelle est la formule dans la case "B2" ?
- Donner les termes de rang 12 et 17 de la suite $u_n$.
- La suite semble-t-elle croissante ? décroissante ? ni l'un ni l'autre ?
- Que semble faire la suite (lecture du graphique) ? Pouvez vous confirmer cette impression en obtenant du tableur les valeurs de $u_n$ pour $n$ entre 75 et 100 ?

# Exercices :

**Exercice 3.6.**

Soit la suite définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = -0,5n^2 + 3.$$

Calculer le premier terme puis $u_6$ et $u_{25}$.

**Méthode :**
La suite est définie en fonction de $n$. Pour calculer $u_n$, remplace $n$ dans la formule.

**Correction :**

On a $u_0 = -0,5 \times (0)^2 + 3 = 3$, puis $u_6 = -0,5 \times (6)^2 + 3 = -15$ et $u_{25} = -0,5 \times (25)^2 + 3 = -309.5$

**Exercice 3.7.**

Soit la suite définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et } u_{n+1} = -2u_n + 10.$$

Calculer le premier terme puis $u_3$.

**Méthode :**
La suite est récurrente. Avant de calculer $u_n$, il faut calculer **tous ceux d'avant** : ici $u_0$, $u_1$ et $u_2$ puis $u_3$.

**Correction :**

On a $u_0 = -1$, $u_1 = -2u_0 + 10 = -2 \times (-1) + 10 = 12$, $u_2 = -2u_2 + 10 = -2 \times (12) + 10 = -14$ et enfin $u_3 = -2u_2 + 10 = -2 \times (-14) + 10 = 38$

**Exercice 3.8.**

1. La suite $(u_n)$ est définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = n^2 + 4n$. Calculer $u_0$, $u_3$ et $u_5$.
   **Correction :**
   On a $u_0 = 0^2 + 4 \times 0 = 0$, $u_3 = 3^2 + 4 \times 3 = 21$, $u_5 = 5^2 + 4 \times 5 = 45$
2. La suite $(u_n)$ est définie pour $n \geqslant 1$ par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$. Calculer $u_1$ et $u_4$.
   **Correction :**
   On a $u_1 = 2$, $u_2 = u_1^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$, $u_3 = u_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ et $u_4 = u_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$.
3. La suite $(u_n)$ est définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = 4n + \dfrac{2}{n+1}$. Calculer les trois premiers termes de la suite puis le septième.
   **Correction :**
   On a $u_0 = 4n + \dfrac{2}{n+1} = 4 \times 0 + \dfrac{2}{0+1}$, $u_1 = 4n + \dfrac{2}{n+1} = 4 \times 1 + \dfrac{2}{1+1} = 5$, $u_2 = 4n + \dfrac{2}{n+1} = 4 \times 2 + \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{26}{3}$. Enfin $u_6 = 4n + \frac{2}{n+1} = 4 \times 6 + \frac{2}{6+1} = \dfrac{170}{7}$.
4. La suite $(u_n)$ est définie pour $n \geqslant 0$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 4$. Calculer $u_1$ et $u_4$.
   **Correction :**
   On a $u_0 = -2$ puis $u_1 = 2u_0 + 4 = 2 \times (-2) + 4 = 0$, $u_2 = 2u_1 + 4 = 2 \times 0 + 4 = 4$, $u_3 = 2u_2 + 4 = 2 \times 4 + 4 = 12$ et enfin $u_4 = 2u_3 + 4 = 2 \times 12 + 4 = 28$.

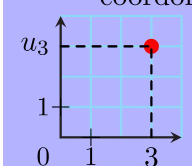
**Exercice 3.9.**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel par

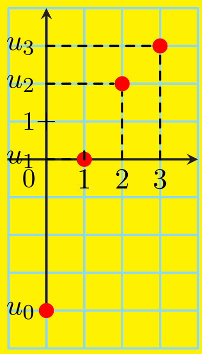
$$u_0 = -4 \text{ et } u_{n+1} = 0,5u_n + 2$$

1. Calculer $u_1$ $u_2$ et $u_3$.
2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de $u_0$, $u_1$ $u_2$ et $u_3$.
3. La suite semble-t-elle croissante ?

**pour le 2. - > Méthode :**
- On trace un repère ;
- pour chaque $n$ on place le point de coordonnée $(n, u_n)$.



**Correction :**

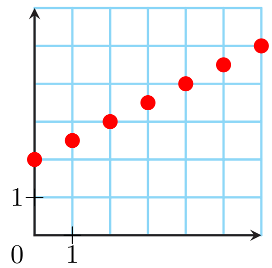



On a $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$ donc $u_1 = 0,5u_0 + 2 = 0,5 \times (-4) + 2 = 0$, puis
$u_2 = 0,5u_1 + 2 = 0,5 \times 0 + 2 = 2$, puis
$u_3 = 0,5u_2 + 2 = 0,5 \times 2 + 2 = 3$, puis

**Exercice 3.10.**

On considère une suite $(u_n)$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

— La suite est-elle décroissante ?
— Lire les rangs et les valeurs des cinq premiers termes




**Correction :**

La suite n'est pas décroissante, elle est croissante sur les termes représentés..
On lit $u_0 = 2$, $u_1 = 2,5$, $u_2 = 3$, $u_3 = 3,5$ et $u_4 = 4$

**Exercice 3.11.** On considère la suite $(u_n)$ dont le terme initial est $u_0 = 41$ et tel que tout terme s'obtient en ajoutant $-2$ au triple du terme précédent.

— Donner une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
— Calculer les 4 premiers termes de cette suite.
— Donner une relation entre $u_n$ et $u_{n-1}$

**Correction :**

— $u_{n+1} = 3 \times u_n - 2$.
— $u_0 = 41$, $u_1 = 3 \times 41 - 2 = 121$, $u_2 = 3 \times 121 - 2 = 361$ et $u_3 = 3 \times 361 - 2 = 1081$ $u_4 = 3 \times 1081 - 2 = 3241$
— $u_n = 3 \times u_{n-1} - 2$

**Exercice 3.12.** On considère la suite $(u_n)$ par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = -4u_n + 3$$

— Donner une définition de $u_n$ en langage courant.
— Calculer les 3 premiers termes de cette suite, puis exprimer $u_{14}$ en fonction de $u_{13}$.
— Donner une relation entre $u_n$ et $u_{n-1}$

**Correction :**

— La suite $(u_n)$ est la suite de terme initial 0 et telle que chaque terme s'obtient en multipliant le terme précédent par $-4$ puis en ajoutant 3.
— $u_0 = 0$, $u_1 = -4 \times 0 + 3 = 3$, $u_2 = -4 \times 3 + 3 = -9$, $u_3 = -4 \times (-9) + 3 = 39$ et $u_4 = -4 \times 39 + 3 = 153$
— $u_n = -4 \times u_{n-1} + 3$

# Cours :

à voir
`https://www.youtube.com/watch?v=Rz1GbWg0TJU`

## 2 Suites arithmétiques

### 2.1 Définition

**Définition 13.**
Une suite est arithmétique lorsque l'on *passe* d'un terme au suivant en ajoutant à chaque fois le même nombre $a$ :

$$u_{n+1} = u_n + a$$

le nombre $a$ est appelé raison de la suite.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & \cdots & u_{n-1} & & u_n & & u_{n+1} \\ & +a & & +a & & +a & & & & +a & & +a & \end{array}$$

**Exemple 14.** On considère la suite arithémtique $(u_n)$ de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 3. Donner la relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$, puis calculer les 3 premiers termes de cette suite.

**Correction :**

Comme $u_n$ est une suite arithmétique de raison 3 on a $u_{n+1} = u_n + 3$. On calcule : $u_0 = 2$, $u_1 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$, $u_2 = u_1 + 3 = 5 + 3 = 8$ et $u_3 = u_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

**Exemple 15.** On considère la suite $(u_n)$ de terme initial $u_0 = 42$ tel que tout terme s'obtient en ajoutant $-4$ au terme précédent. Donner la relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$, puis calculer les 3 premiers termes de cette suite.

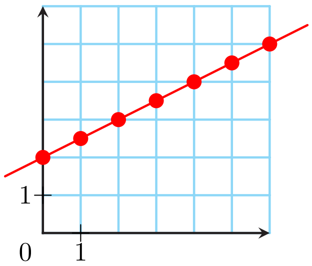
**Correction :**

On a $u_{n+1} = u_n - 4$. La suite $u_n$ est donc une suite arithmétique de raison $-4$. On calcule : $u_0 = 42$, $u_1 = u_0 - 4 = 42 - 4 = 38$, $u_2 = u_1 - 4 = 38 - 4 = 34$ et $u_3 = u_2 - 4 = 34 - 4 = 30$

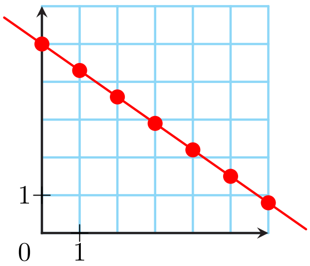
### 2.2 Sens de variation et représentation graphique

**Proposition 16 (Sens de variation d'une suite arithmétique).**
- Si la raison est positive ( $a > 0$ ), la suite arithmétique est croissante .
- Si la raison est négative ( $a < 0$ ), la suite arithmétique est décroissante .
- Si la raison est nulle ( $a = 0$ ), la suite arithmétique est constante .

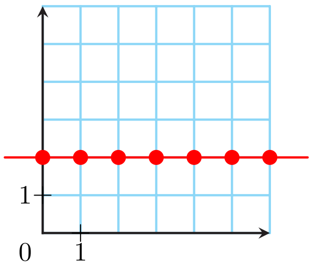
**Proposition 17 (représentation graphique).** Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés sur une droite : on parle de *croissance linéaire* .



$a > 0$, la droite *monte* ,
La suite est *croissante* .



$a < 0$, la droite *descend* ,
La suite est *décroissante* .



$a = 0$, la droite est *horizontale* ,
La suite est *constante* .

# Cours :

à voir
https://www.youtube.com/watch?v=VFtzibt4VLY
https://www.youtube.com/watch?v=ZZLxA3Z6x8c

## 3 Suites géométriques

### 3.1 Définition

**Définition 18.**
Une suite est géométrique lorsque l'on *passe* d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par le même nombre $b$ :

$$u_{n+1} = u_n \times b$$

le nombre $b$ est appelé raison de la suite.

$$u_0 \xrightarrow{\times b} u_1 \xrightarrow{\times b} u_2 \xrightarrow{\times b} u_3 \quad \cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times b} u_n \xrightarrow{\times b} u_{n+1}$$

**Exemple 19.** On considère la suite géométrique $(u_n)$ de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 1.5. Donner la relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$, puis calculer les 4 premiers termes de cette suite.

**Correction :**
Comme $u_n$ est une suite géométrique de raison 1.5 on a $u_{n+1} = u_n \times 1.5$.
On calcule : $u_0 = 2$, $u_1 = u_0 \times 1.5 = 2 \times 1.5 = 3$, $u_2 = u_1 \times 1.5 = 3 \times 1.5 = 4.5$ et $u_3 = u_2 \times 1.5 = 4.5 \times 1.5 = 6.75$

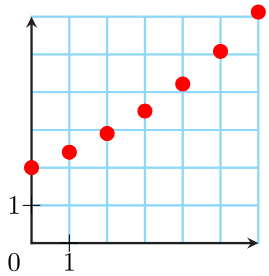
**Exemple 20.** On considère la suite $(u_n)$ de terme initial $u_0 = 42$ tel que tout terme s'obtient en multipliant le terme précédent par 0.5. Donner la relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$, puis calculer les 4 premiers termes de cette suite.

**Correction :**
On a $u_{n+1} = u_n \times 0.5$. La suite $u_n$ est donc une suite géométrique de raison 0.5.
On calcule : $u_0 = 42$, $u_1 = u_0 \times 0.5 = 42 \times 0.5 = 21$,$u_2 = u_1 \times 0.5 = 21 \times 0.5 = 10.5$ et $u_3 = u_2 \times 0.5 = 10.5 \times 0.5 = 5.25$

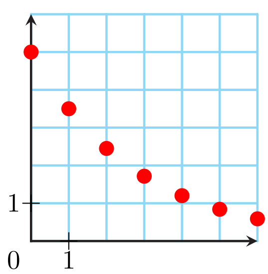
### 3.2 Sens de variation et représentation graphique

**Proposition 21** (**Sens de variation d'une suite géométrique**).
- Si $b > 1$ , la suite géométrique est croissante .
- Si $b < 1$ , la suite géométrique est décroissante .
- Si $b = 1$ , la suite géométrique est constante .

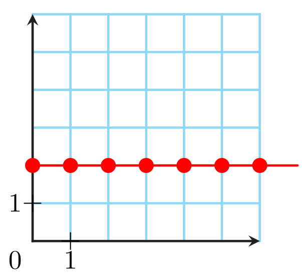
**Proposition 22** (**représentation graphique**)**.** Une suite géométrique est représentée graphiquement par des points situés sur une courbe dite exponentielle : on parle de *croissance exponentielle* .




$b > 1$, la courbe *monte* ,
La suite est *croissante* .




$b < 1$, la courbe *descend* ,
La suite est *décroissante* .




$b = 1$,
La suite est *constante* .

# Exercices :

**Exercice 3.13.**

La vie dans les grandes ville étant plus chère qu'à la campagne, le maire d'une petite ville constate que chaque année la population de sa commune augmente de 62 habitants. En 2010, la population de cette ville était de 845 habitants. On note $p_0$ la population en 2010 et $p_n$ la population en (2010 +n).
Montrer que la suite $(p_n)$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison. Quelle sera la population en 2017 ?

**Méthode :**

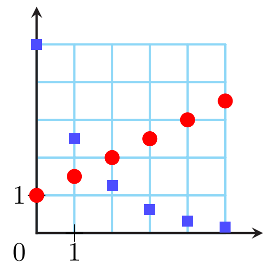
1. Montrer que la différence **entre deux termes consécutifs** $p_{n+1} - p_n$ est **constante**.
2. Conclure en donnant la raison et le terme initial.

**Correction :**

D'après l'énoncé, entre l'année (2010+n) et (2010+(n+1)), la ville gagne 62 habitants. Cela s'écrit $p_{n+1} - p_n = 62$. La différence entre deux termes consécutifs est donc constante.
On en déduit que la suite $p_n$ est une suite arithmétique de raison 62 et de terme initial 845. À l'aide de la calculatrice, on trouve $p_7 = 1279$ habitants en 2017=2010+7.

**Exercice 3.14.**

1. Sur le graphique ci-contre les points notés d'un ■ sont-ils les points représentatifs d'une suite arithmétique ? Justifier votre réponse de deux façons possibles
2. Sur le graphique ci-contre les points représentatifs d'une suite arithmétique $(u_n)$ sont notés d'un ●. Donner le terme initial et la raison de la suite $u_n$.




**Méthode : lorsque les questions 1 et 2 sont mélangées**

1. On lit sur le graphique les valeurs de $u_0$, $u_1$, $u_2$ ; etc.
2. On calcule les différences $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$. On conclut.

**Correction :**

1. On peut simplement remarquer que les points ne sont pas alignés sur une droite. Ce n'est donc pas une suite arithmétique.
   En notant $v_0$, $v_1$, etc. les ordonnées des points, on lit $v_0 = 5$, $v_1 = 2,5$ et $v_2 = 1,25$. On a alors $v_1 - v_0 = 2,5$ et $v_2 - v_1 = 1,25$ la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante et ce n'est pas une suite arithmétique.
2. On lit $u_0 = 1$, $u_1 = 1,5$, $u_2 = 2$. La suite étant arithmétique la raison est la différence entre deux termes consécutifs par exemple : $u_2 - u_1 = 2 - 1,5 = 0,5$.
   La suite $u_n$ est arithmétique de raison $0,5$ et de terme initial $u_0 = 1$.

**Exercice 3.15.** On place un capital de 2 000 euros au taux annuel de 3% à intérêts composés. On pose $C_0 = 2000$ et $C_n$ le capital acquis au bout de $n$ années.

1. Montrer que le capital acquis au bout d'un an est de 2 060 euros et celui acquis au bout de deux ans est de 2 121,80.
2. La suite $C_n$ est-elle arithmétique ?

3. La suite $C_n$ est-elle géométrique ?

**Correction :**

1. Les intérêts étant composés on applique chaque année un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{3}{100} = 1,03$. On trouve $C_1 = 2000 \times 1,03 = 2060$ et $C_2 = 2060 \times 1,03 = 2121,80$.
2. On calcule $C_1 - C_0 = 2060 - 2000 = 60$ et $C_2 - C_1 = 2121,80 - 2060 = 61,80$. La différence entre deux termes n'est pas constante la suite n'est donc pas arithmétique.
3. Les intérêts étant composés, chaque année le capital est multiplié par $1,03$, c'est à dire $C_{n+1} = C_n \times 1,03$. La suite est géométrique de raison $1,03$ et de terme initial 2000.

**Exercice 3.16.** Une entreprise importe une matière première d'un pays étranger. Elle a importé 1 000 tonnes de produit en janvier de l'année passée. À cause d'événements internes cette quantité diminue de 20 tonnes par mois.

1. Quelle quantité l'entreprise a-t-elle importé en février ? en mars ?
2. On note $q_1$ la quantité importée en janvier, $q_2$ celle importée en février, etc. Montrer que la suite $(q_n)$ est artihmétique, déterminer sa raison et son terme initial.
3. Quel est le sens de variation de la suite $(q_n)$

**Correction :**

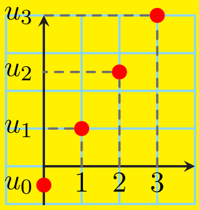
1. En février, l'entreprise importe $1000 - 20 = 980$ tonnes. En mars elle importe $980 - 20 = 960$ tonnes.
2. Chaque mois l'entreprise importe 20 tonnes de moins que le mois précédent. On a donc $q_{n+1} = q_n - 20$. La suite est arithmétique de raison $-20$ et de terme initial $q_1 = 1000$.
3. Comme la raison de $(q_n)$ est $-20 < 0$, la suite est décroissante.

**Exercice 3.17.**

1. On considère la suite arithmétique de raison $1,5$ de terme initial $u_0 = -0,5$. Calculer $u_1$ et $u_3$. Marquer sur un graphique les points représentatifs des quatre premiers termes de la suite.
2. On considère la suite arithmétique de raison 7 de terme initial $v_1$ et telle que $v_6 = 23$. Calculer $v_5$.
3. On considère la suite géométrique de raison $1,4$ de terme initial $u_0 = 0,5$. Calculer $u_1$ et $u_4$.

**Correction :**

1. **Pour calculer $u_3$ il faut calculer $u_2$ avant.**
   On calcule :$u_0 = -1,5$,
   $u_1 = u_0 + 1,5 = -0,5 + 1,5 = 1$,
   $u_2 = u_1 + 1,5 = 1 + 1,5 = 2,5$ et enfin
   $u_3 = u_2 + 1,5 = 2,5 + 1,5 = 4$.




2. On sait que $v_6 = 23$ et que $v_6 = v_5 + 7$ donc $v_5 = v_6 - 7 = 23 - 7 = 16$.
3. On a $u_0 = 0,5$, $u_1 = u_0 \times 1,4 = 0,5 \times 1,4 = 0,7$ puis $u_2 = u_1 \times 1,4 = 0,98$, $u_3 = u_2 \times 1,4 = 1,372$ et $u_4 = 1,9208$.

# Exercices :

**Exercice 3.18.**

La population d'une ville, qui était de 30 000 habitants en 2010, diminue de 5% par an depuis. On note $p_0$ la population en 2010 et $p_n$ la population en (2010 +n).
Montrer que la suite $(p_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison. Quelle sera la population en 2017 ?

**Méthode :**

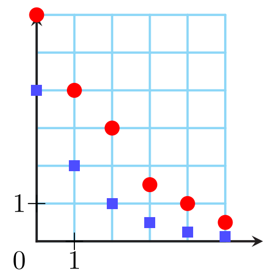
1. Montrer que le quotient **entre deux termes consécutifs** $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ est **constant**.
2. Conclure en donnant la raison et le terme initial.

**Correction :**

D'après l'énoncé, entre l'année (2010+n) et (2010+(n+1)), la population baisse de 5%. Le coefficient multiplicateur est donc $1 - \frac{5}{100} = 0,95$. Cela s'écrit $p_{n+1} = p_n \times 0,95$ ou encore $\frac{p_{n+1}}{p_n} = 0,95$. Le quotient entre deux termes consécutifs est donc constant.
On en déduit que la suite $p_n$ est une suite géométrique de raison 0,95 et de terme initial 30 000. À l'aide de la calculatrice, on trouve $p_7 \approx 20950$ habitants en 2017=2010+7.

**Exercice 3.19.**

1. Sur le graphique ci-contre les points notés d'un ● sont-ils les points représentatifs d'une suite géométrique ? Justifier.
2. Sur le graphique ci-contre les points représentatifs d'une suite géométrique $(u_n)$ sont notés d'un ■. Donner le terme initial et la raison de la suite $u_n$.




**Méthode : lorsque les questions 1 et 2 sont mélangées**

1. On lit sur le graphique les valeurs de $u_0$, $u_1$, $u_2$ ; etc.
2. On calcule les quotient $u_1/u_0$, $u_2/u_1$, $u_3/u_2$. On conclut.

**Correction :**

1. En notant $v_0$, $v_1$, etc. les ordonnées des points, on lit $v_0 = 6$, $v_1 = 4$ et $v_2 = 3$. On a alors $\frac{v_1}{v_0} = \frac{4}{6} \approx 0,67$ et $\frac{v_2}{v_1} = 0,75$ le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas constant et ce n'est pas une suite géométrique.
2. On lit $u_0 = 4$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$. La suite étant géométrique la raison est le quotient entre deux termes consécutifs par exemple : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} = 0,5$.
La suite $u_n$ est géométrique de raison 0,5 et de terme initial $u_0 = 1$.

**Exercice 3.20.** On place un capital de 2 000 euros au taux annuel de 3% à intérêts simples.
On pose $C_0 = 2000$ et $C_n$ le capital acquis au bout de $n$ années.

1. Montrer que le capital acquis au bout d'un an est de 2 060 euros et celui acquis au bout de deux ans est de 2 120.
2. La suite $C_n$ est-elle arithmétique ?
3. La suite $C_n$ est-elle géométrique ?

**Correction :**

1. Les intérêts étant simples, chaque année le capital augmente du montant des intérets de la première année : $2000\frac{3}{100} = 60$ euros. On trouve $C_1 = 2000 + 60 = 2060$ et $C_2 = 2060 + 60 = 2120$.
2. Comme dit à la question précédente, chaque année le capital augment de 60 euro soit : $C_{n+1} - C_n = 60$. La suite est bien arithmétique de raison 60 et de terme initial 2 000.
3. On calcul $\frac{C_1}{C_0} = 1,03$ et $\frac{C_2}{C_1} \approx 1,029$. Le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant, la suite n'est pas géométrique.

**Exercice 3.21.** Une entreprise importe une matière première d'un pays étranger. Elle a importé 1 000 tonnes de produit en janvier de l'année passée. À cause de besoins importants cette quantité augmente de 10% par mois.

1. Quelle quantité l'entreprise a-t-elle importé en février ? en mars ?
2. On note $q_1$ la quantité importée en janvier, $q_2$ celle importée en février, etc. Montrer que la suite $(q_n)$ est géométrique, déterminer sa raison et son terme initial.
3. Quel est le sens de variation de la suite $(q_n)$

**Correction :**

Pour augmenter de 10% on multiplie par $1,1$

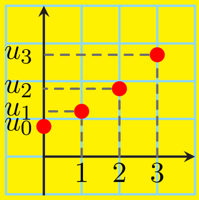
1. En février, l'entreprise importe $1000 \times 1,1 = 1100$ tonnes. En mars elle importe $1100 \times 1,1 = 1210$ tonnes.
2. Chaque mois l'entreprise importe 10% de produit de plus que le mois précédent. On a donc $q_{n+1} = q_n \times (1 + \frac{10}{100}) = q_n \times 1,1$. La suite est géométrique de raison $1,1$ et de terme initial $q_1 = 1000$.
3. Comme la raison de $(q_n)$ est $1,1 > 1$, la suite est croissante.

**Exercice 3.22.**

1. On considère la suite arithmétique de raison $2,3$ de terme initial $u_0 = -3,2$. Calculer $u_1$ et $u_3$.
2. On considère la suite géométrique de raison 5 de terme initial $v_1$ et telle que $v_6 = 40$. Calculer $v_5$.
3. On considère la suite géométrique de raison $1,5$ de terme initial $u_1 = 0,8$. Calculer $u_1$ et $u_4$. Marquer sur un graphique les points représentatifs des quatre premiers termes de la suite.

**Correction :**

1. **Pour calculer $u_3$ il faut calculer $u_2$ avant.**
   On calcule avec la calculatrice :$u_0 = -3,2$,
   $u_1 = u_0 + 2,3 = -0,9$,
   $u_2 = u_1 + 2,3 = 1,4$ et enfin
   $u_3 = u_2 + 2,3 = 3,7$.
2. On sait que $v_6 = 40$ et que $v_6 = v_5 \times 5$ donc $v_5 = \frac{v_6}{5} = \frac{40}{5} = 8$.
3. On a $u_1 = 0,8$, $u_2 = u_1 \times 1,5 = 1,2$ puis $u_3 = u_2 \times 1,5 = 1,8$, $u_4 = u_3 \times 1,5 = 2,7$.



# Exercices :

**Exercice 3.23.** Le but de cet exercice est de comparer l'évolution de la population de deux quartiers d'une même ville : le quartier Uranus et le quartier Saturne.

En 2010, Uranus compte 2 000 habitants et Saturne en compte 2 700. On fait l'hypothèse que, chaque année, la population d'Uranus augmente de 250 habitants et celle de Saturne augmente de 4 %.

On note $u_0$ la population d'Uranus en 2010, $u_1$ sa population en 2011 et plus généralement $u_n$ sa population en l'an $2010 + n$.

De même, on note $s_0$ la population de Saturne en 2010, $s_1$ sa population en 2011 et plus généralement $s_n$ sa population en l'an $2010 + n$.

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? Justifier.
   **Correction :**
   La suite $(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison 250, car chaque année la population s'accroît de 250 personnes.
2. Démontrer que la suite $(s_n)$ est géométrique de raison 1,04.
   **Correction :**
   Le taux annuel d'augmentation étant de 4 %, le coefficient multiplicateur associé est 1,04. On a Donc $s_{n+1} = s_n \times 1.04$.la suite $(s_n)$ est donc une suite géométrique de premier terme $s_0 = 2\,700$ et de raison 1,04.
3. Afin de prévoir l'évolution de la population de ces deux quartiers, on a réalisé **ci-contre** une feuille de calcul. *(Les valeurs ont été arrondies à l'unité).*
   (a) Indiquer la formule saisie en C3 qui, recopiée vers le bas, permet d'obtenir les termes consécutifs de la suite $(s_n)$ dans la colonne C.
   **Correction :**
   Pour obtenir les termes consécutifs de la suite $(s_n)$, nous pouvons écrire comme formule en C3, puis en la recopiant vers le bas :
   =$C2*1,04
   A quoi sert le $ ?
   (b) Compléter les colonnes B et C.
   (c) D'après cette feuille de calcul, en quelle année la population d'Uranus dépassera-t-elle pour la première fois celle de Saturne ?
   **Correction :**
   D'après cette feuille de calcul, la population d'Uranus dépassera pour la première fois celle de Saturne, en 2016.
   Nous lisons ligne 8 pour $n = 6$ $u_6 = 3\,500$ et $s_6 = 3\,416$

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** | $n$ | $u_n$ | $s_n$ |
| **2** | 0 | 2 000 | 2 700 |
| **3** | 1 | 2 250 | 2 808 |
| **4** | 2 | 2 500 | 2 920 |
| **5** | 3 | 2 750 | 3 037 |
| **6** | 4 | 3 000 | 3 159 |
| **7** | 5 | 3 250 | 3 285 |
| **8** | 6 | 3 500 | 3 416 |
| **9** | 7 | 3 750 | 3 553 |
| **10** | 8 | 4 000 | 3 695 |

4. **À rendre pour Jeudi :** Esquisser la représentation graphique de $(u_n)$ et $(s_n)$ à l'aide d'un tableur. Donner les valeurs de $u_{40}$ et $s_{40}$. Interprétation ?

**Exercice 3.24.** Cet exercice est un questionnaire à choix multiples **(QCM)**.
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée**.

1. La suite $(U_n)$ est géométrique de premier terme $U_0 = 10$ et de raison $q = 3$, alors :
   **a.** $U_4 = 22$ **b.** $U_4 = 810$ **c.** $U_4 = 10 \times 3^3$ **d.** $U_4 = 10 + 3 \times 4$
2. La suite $(V_n)$ est arithmétique de premier terme $V_1 = -2$ et de raison $r = 5$ alors $V_6$ est égal

à

**a.** 23 **b.** 28 **c.** -31250 **d.** 275

3. Une ville a décidé d'augmenter de 10 % ses logements sociaux chaque année. En 2012 elle avait 150 logements sociaux. Pour tout entier $n$, on note $a_n$ le nombre de logements sociaux dans cette ville en $(2012+n)$. On a donc $a_0 = 150$.

   On aura alors :

   **a.** $a_1 = 135$ **b.** $a_3 = 180$ **c.** $a_3 = 195$ **d.** $a_n = a_{n-1} \times 1,10$

4. La ville souhaite au moins doubler le nombre de ses logements sociaux. Cet objectif sera dépassé en :

   **a.** 2015 **b.** 2017 **c.** 2020 **d.** 2022

# Comme au Devoir 3

**Exercice 3.25.**

1. La suite $(u_n)$ est définie pour tout $n \geqslant 0$ par. $u_n = \dfrac{40}{n+5}$.
   (a) Calculer $u_0$.
   (b) Calculer le troisième terme.
   (c) Calculer $u_{35}$.
2. La suite $v_n$ est définie pour tout entier naturel non nul par $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = -3v_n + 5 \end{cases}$
   (a) Calculer $v_2$.
   (b) Calculer le quatrième terme.
   (c) Calculer $v_6$.

**Exercice 3.26.** Cet exercice est un questionnaire à choix multiples **(QCM)**.
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée**.

1. La suite $(U_n)$ est arithmétique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 4$, alors :
   **a.** $U_4 = 21$ **b.** $U_4 = 1280$ **c.** $U_4 = 17$ **d.** $U_4 = 405$
2. La suite $(V_n)$ est géométrique de premier terme $V_1 = 7$ et de raison $r = 3$ alors $V_6$ est égal à
   **a.** 25 **b.** 22 **c.** 1701 **d.** 5103
3. Une entreprise a décidé d'augmenter de 5 % sa production chaque année. En 2016 elle produisait 1500 produits. Pour tout entier $n$, on note $a_n$ le nombre de produits fabriqués par l'entreprise en $(2016 + n)$. On a donc $a_0 = 1500$.
   On aura alors :
   **a.** $a_1 = 1580$ **b.** $a_n = a_{n-1} \times 1,2$ **c.** $a_3 = 1725$ **d.** $a_3 \approx 1736$
4. L'entreprise souhaite produire au moins 2000 produits. Cet objectif sera dépassé en :
   **a.** 2020 **b.** 2021 **c.** 2022 **d.** 2023

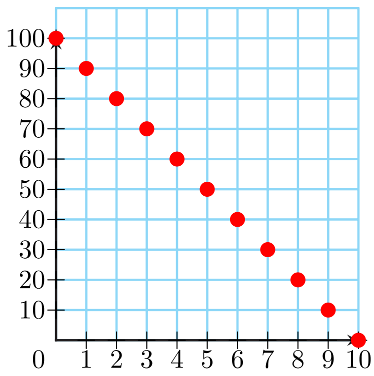
**Exercice 3.27.**

On considère les suites :

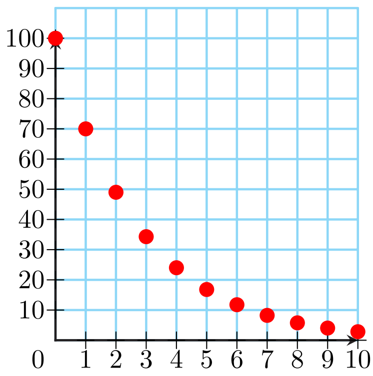
— $(u_n)$ définit par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n - 10$
— $(v_n)$ défnit par $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = v_n \times 0,7$
— $(w_n)$ défnit par le tableau ci-contre.

| | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| **1** | $n$ | $w_n$ | |
| **2** | 0 | 2 | |
| **3** | 1 | 4 | |
| **4** | 2 | 7 | |
| **5** | 3 | 12 | |
| **6** | 4 | 18 | |
| **7** | 5 | 28 | |
| **8** | 6 | 44 | |
| **9** | 7 | 66 | |
| **10** | 8 | 86 | |
| **11** | 9 | 101 | |

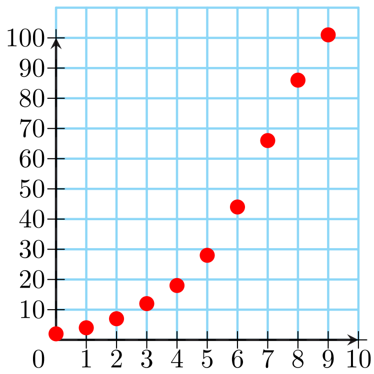
On a représenté ces suites ainsi qu'une autre par des nuages de points.



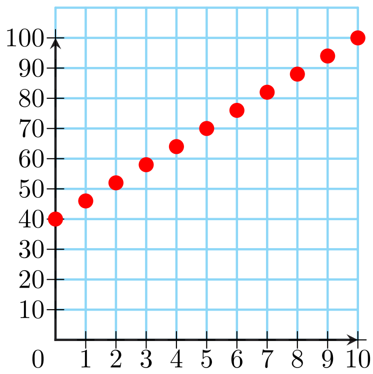

a) représente la suite : ____




b) représente la suite : ____




c) représente la suite : ____




d) représente la suite : ____

1. Associer chaque suite à sa représentation graphique.

2. Pour chaque représentation dire si la suite est croissante ou décroissante.
3. D'après les définition de $u_n$, $v_n$ et $w_n$, quelles suites sont géométriques.

**Exercice 3.28.** On place un capital de 15 000 à 4% par an avec intérêts simples au premier janvier 2016. On note $C_0 = 15\,000$ et $C_n$ le capital acquis au premier janvier de l'année (2016 +n).

1. Calculer $C_1$ et $C_3$.
2. Exprimer $C_{n+1}$ en fonction de $C_n$.
3. En déduire la nature de la suite $C_n$ en donnant son terme inital et sa raison.
4. Donner une valeur approchée à l'unité du capital acquis en 2022

# Chapitre 4
# Évolutions

14/11/2016

## Cours :

à voir
`https://www.youtube.com/watch?v=ezY-VntwbwU`

## 1 Taux et pourcentage d'évolution

**Définition 1** (Taux d'évolution)**.**
Si une grandeur passe d'une *valeur initiale* $V_i$ à une *valeur finale* $V_f$, le taux d'évolution $t$ est

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

**Définition 2** (Pourcentage d'évolution)**.**
Si le taux d'évolution $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$ est exprimé en *pourcentage* , on parle parfois de pourcentage d'évolution

**Exemple 3.** La population d'une ville est passé de 5 000 habitant en 1996 à 6 000 habitant en 2016. Le taux d'évolution démographique est

**Correction :**

On calcule :
$t = \dfrac{6000 - 5000}{5000} = \dfrac{1000}{5000} = 0.2$

Le pourcentage d'évolution est de

**Correction :**

$0,2 = 20\%$

En 1986 une ville comptait 10 000 habitant. Elle en compte aujourd'hui 7 000. Le *taux d'évolution* est de

**Correction :**

$t = \dfrac{7000 - 10000}{10000} = -0,3$

Le pourcentage d'évolution est de *-30 %*

*Remarque* 4. Le *taux d'évolution* peut être positif ou négatif

## 2 Coefficient multiplicateur

**Proposition 4.**

— *Augmenter* de $a\%$ revient à *multiplier* par $k = 1 + \dfrac{a}{100} = 1 + t$ où $t = \frac{a}{100}$ est le *taux d'évolution*

— *Diminuer* de $a\%$ revient à *multiplier* par $k = 1 - \dfrac{a}{100} = 1 + t$ où $t = \frac{a}{100}$ est le *taux d'évolution*

**Exemple 5.** Déterminer le coefficient multiplicateur associé à : une augementation de 3%, une baisse de 5%, une augmentation de 18% et une baisse de 12, 5%

**Correction :**

on trouve successivement : $1 + \frac{3}{100} = 1 + 0,03 = 1,03$ puis
$1 - \frac{5}{100} = 1 - 0,05 = 0,95$ puis
$1 + \frac{18}{100} = 1 + 0,18 = 1,18$ et enfin $1 - \frac{12,5}{100} = 1 - 0,125 = 0,875$.

## 3 Évolutions successives

**Proposition 6** (Coefficient multiplicateur global)**.**

Une grandeur passe successivement d'une valeur *initiale* $V_0$ à une valeur *intermédiaire* $V_1$ puis à une valeur *finale* $V_2$. On note $t_1$ le *taux d'évolution* de $V_0$ à $V_1$ et $k_1$ le *coefficient multiplicateur* associé. De même on note $t_2$ le *taux d'évolution* de $V_1$ à $V_2$ et $k_2$ le *coefficient multiplicateur* associé. Enfin on note $t$ le taux d'évolution global.

Le coefficient multiplicateur *global* $k$ est le produit des coefficients multiplicateurs intermédiaires :

$$k = k_1 \times k_2$$

c'est à dire :

$$1 + t = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$$

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, "\times(1+t_1)"] \arrow[rr, bend right, "\times(1+t_1)(1+t_2)"'] & V_1 \arrow[r, "\times(1+t_2)"] & V_2 \end{tikzcd}$$

**Exemple 7.** Déterminer le coefficient multiplicateur global associé à : une augementation de 20% suivit d'une une baisse de 10%. Déterminer le pourcentage d'évolution global.

**Correction :**

on trouve $k_1 = 1,2$ et $k_2 = 0,9$ d'où $k = 1,2 \times 0,9 = 1,08$. Le pourcentage d'évolution global est $t = k - 1 = 0,08 = 8\%$. PAS 10%

Au cours de l'année le prix d'une chaise subit une baisse de 8% suivit d'une une augmentation de 10%. Déterminer le pourcentage d'évolution global. À la fin de l'année le prix est il inférieur au prix de départ.

**Correction :**

on trouve $k_1 = 1 - 0,08 = 0,82$ et $k_2 = 1,1$ d'où $k = 0,82 \times 1,1 = 0,902$. Le pourcentage d'évolution global est $t = k - 1 = 0,902 - 1 = -0,098 = -9,8\%$.
Le prix de la chaise a donc baissé de 9, 8%

*Remarque* 5. Le taux d'évolution global *n'est pas* la somme des taux d'évolution.

**Proposition 8.** Le taux d'évolution global est donné par $t = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1 = k_1 \times k_2 - 1$

**Exemple 9.** En début d'année le prix d'un bureau est de 150 euros. En Mars, son prix augmente de 10%. Durant le mois de juillet le prix du bureau baisse de 10%. Calucler le prix du bureau en avril. Calculer de prix en septembre. Déterminer le taux d'évolution entre janvier et septembre.

**Correction :**

on trouve $k_1 = 1 + 0,1 = 1,1$. Le prix en avril est donc de $1,1 \times 150 = 165$ euros. De même on a $k_2 = 0,9$ et le prix en septembre est $165 \times 0.9 = 148,5$ euros.
Le pourcentage d'évolution global est $\dfrac{148,5 - 150}{150} = \dfrac{-1,5}{150} = -0,01 = -1\%$.
Cela s'écrit encore $t = k - 1 = k_1 \times k_2 - 1 = 1,1 \times 0,9 - 1 = -0,01 = -1\%$.
Le prix du bureau a donc baissé de 1%

## 4 Taux d'évolution réciproque

**Proposition 10** (Taux d'évolution réciproque)**.** Si une grandeur est passé d'une valeur initiale $V_i$ à une valeur finale $V_f$, pour *revenir* à la valeur *initiale* , le taux d'évolution réciproque est $t' = \dfrac{V_f - V_i}{V_f}$ .

En notant $k$ le coefficient multiplicateur de $V_i$ à $V_f$ et $k'$ celui de $V_f$ à $V_i$ on a

$$1 + t' = k' = \frac{1}{k} = \frac{1}{1+t}.$$

**Exemple 11.** Un article passe de 100 à 150 euros. C'est une augmentation de *50%* . Le coefficient multiplicateur est de $1 + 0,5 = 3/2$ . Le coefficient multiplicateur réciproque est de $2/3$ soit un taux d'évolution de $-0,33$ .

# Exercices :

**Exercice 4.1.**

La valeur d'un appartement a été multiplier par $k$ passant ainsi d'une valeur $v_1$ à une valeur $v_2$.

1. Montrer que cette évolution est une hausse pour $k = 1,09$ et une baisse pour $k = 0,83$.
2. Dans chacun des cas, calculer de taux d'évolution de $v_1$ à $v_2$

**Méthode :**

1. Pensez aux 2 cas :
   $k > 1$ et $k < 1$.
2. On sait que $k = 1 + t$ donc $t = k - 1$.

**Correction :**

1. Pour $k = 1,09$, l'évolution est une hausse car $k > 1$. Pour $k = 0,83$ l'évolution est une baisse car $k < 1$.
2. Pour $k = 1,09$, le taux d'évolution est $t = k - 1 = 0,09 = 9\%$. Pour $k = 0,83$, le taux d'évolution vaut $t = k - 1 = -0,17$, donc une baisse de 17%.

**Exercice 4.2.**

Un magasin augmente le prix des pantalons de 10% et réduit celui des pulls de 20%

1. Sachant que le prix initial d'un pantalon est de 50 euros, calculer le nouveau prix.
2. Sachant que le nouveau prix d'un pull est de 44 euros, calculer l'ancien prix.

**Méthode :**

1. Utiliser la coefficient multiplicateur $k = 1+t = 1+\frac{a}{100}$ et la relation $v_f = (1+t)v_i$.
2. Utiliser la coefficient multiplicateur $k = 1+t = 1+\frac{a}{100}$ et la relation $v_i = \dfrac{v_i}{(1+t)}$.
   (Sans le dire on utilise le coefficient multiplcateur **réciproque**

**Correction :**

1. Une augmentation de 10% correspond à un coefficient multiplicateur $k = 1+0,1 = 1,1$. Le nouveau prix d'un pantalon est donc $50 \times 1,1 = 55$ euros.
2. Une réduction de 20% correspond à un coefficient multiplicateur $k = 1 - 0,2 = 0,8$. L'ancien prix d'un pull est donc $\frac{44}{0,8} = 55$ euros.

**Exercice 4.3.**

Pendant un mois, le cours d'une action augmente de 10% puis baisse de $9,5\%$. Calculer le taux d'évolution de cette action au cours du mois (entre le début et à la fin). La valeur de l'action a-t-elle augmenté, baissée ?

**Méthode :**

1. Coefficient multiplicateur global :
   $k = k_1 \times k_2$
2. La relation $t = k - 1$.

**Correction :**

Le coefficient multiplicateur correspondant à la hausse est $k = 1 + 0,1 = 1,1$.
Le coefficient multiplicateur correspondant à la baisse est $1 - 0,095 = 0,905$.
Le coefficient multiplicateur global est $k = 1,1 \times 0,905 = 0,9955$.
Le taux d'évolution globale est donc $k - 1 = 0,9955 - 1 = -0,0045$, soit une baisse de $0,45\%$.

**Exercice 4.4.**

Dans un supermarché, le prix de la lessive augmente de 6%. Calculer le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer pour que la lessive revienne à son prix initial (arrondir à 0,01%) près.

**Méthode :**

1. Coefficient multiplicateur réciproque : $k' = \frac{1}{k}$
2. La relation $t = k - 1$.

**Correction :**

Une augmentation de 6% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + 0,06 = 1,06$.
Le coefficient multiplicateur réciproque est de $\frac{1}{1{,}06} \approx 0,9434$.
Ce qui donne un taux d'évolution de
$t = k - 1 = 0,9434 - 1 = -0,0566$.

# Exercices :

**Méthode :** $t = \dfrac{v_f - v_i}{v_i}$, $k = 1 + t$, $v_f = (1+t) \times v_i = k \times v_i$

On a aussi $v_i = \dfrac{v_f}{1+t}$, $t = k - 1$

**Exercice 4.5.** Completer le tableau ci-dessous :

| $v_i$ | $v_f$ | taux d'évolution de $v_i$ à $v_f$ | coefficient multiplicateur |
|---|---|---|---|
| | 4,44 | 11% | |
| | 2,336 | | 0,73 |
| 84 | | 25% | |
| 200 | 195 | | |

**Exercice 4.6.** Les soldes arrivent ... Un magnifique jeans a vu son prix subir une première remise de 10%, puis une seconde remise de 20% et enfin une troisième remise de 30%.

1. Déterminer la remise total sur le jeans.
2. Determiner le prix initial du jeans sachant qu'il a été vendu 52,92 euros

**Correction :**

Pensez à utiliser le coéfficient multiplicateur global !

1. La première remise correspond à un coefficient multiplicateur $k_1 = 0,9$, la seconde à $k_2 = 0,8$ et la troisième à $k_3 = 0,7$.
   Après les deux premières remises, le coefficient multiplicateur est de $k_1 \times k_2 = 0,72$
   Après la troisième remise, le coefficient multiplicateur global vaut $0,72 \times k_3 = 0,504$.
   La rmeise total vaut donc $t = k - 1 = 0,504 - 1 = -0,496$ soit une remise de $49,6\%$.
2. En notant $v_i$ l'ancien prix, on a $v_i \times 0,504 = 52,92$, c'est à dire $v_i = \dfrac{52,92}{0,504} = 105$ euros.

**Exercice 4.7.**

1. Une compagnie d'assurance baisse ses tarifs de 5%. Calculer la prime que devra payer un client qui payait l'année dernière 654 euros.
2. Une compagnie concurent baisse ses tarif de $3,5\%$. Calculer la prime que payait l'année dernière un client qui paye cette année 405,30 euros.

**Correction :**

1. Le coefficient multiplicateur vaut $1 - 0,05 = 0,95$.Le client devra payer $654 \times 0,95 = 621,3$ euros.
2. Le coefficient multiplicateur vaut $1-0,035 = 0,965$.Le client devra payer $\dfrac{405,30}{0,965} = 420$ euros.

**Exercice 4.8.**

1. Dans un pays le prix du boeuf a augmenté de 6% en 2011 puis de 5% en 2012. Calculer le taux d'evolution du prix du boeuf entre début 2011 et fin 2012.
2. Dans ce pays la consomation de boeuf a baissé de 2% en 2011 puis de 6% en 2012. Calculer le taux d'évolution global de la consomation de boeuf.

**Correction :**

1. Le coefficient multiplicateur associé à la hausse de 2011 est de $1+0,06 = 1,06$, celui associé à celle de 2012 est de $1 + 0,05 = 1,05$.
   Le coefficient multiplicateur global est de $1,06 \times 1,05 = 1,113$ ce qui correspond à un taux d'évolution de
   $t = k - 1 = 1,113 - 1 = 0,113 = 11,3\%$
2. Le coefficient multiplicateur associé à la baisse de la consomation en 2011 est de $1 - 0,02 = 0,98$, celui associé à celle de 2012 est de $1 - 0,06 = 0,94$.
   Le coefficient multiplicateur global est de $0,98 \times 0,94 = .9212$ ce qui correspond à un taux d'évolution de
   $t = k - 1 = 0,9212 - 1 = -0,0788 = -7,88\%$

**Exercice 4.9.** Le chanteur KW a vu la vente de ses albums baissé de 45% en 2012 (par rapport à 2011). Determiner la hausse (en pourcentage) de vente nécessaire pour retrouver en 2013 le niveau de vente de 2011.

**Correction :**

Le coefficient multiplicateur vaut $1 - 0,45 = 0,55$.
Le coefficient multiplicateur réciproque vaut donc $\dfrac{1}{0,55} \approx 1,82$ soit une hausse nécessaire de $1,82 - 1 = 0,82 = 82\%$

**Exercice 4.10** (Poucentages VS Pourcentages)**.** Dans chacun des texte suivants dire si les nombre exprimés par des pourcentages correspondent à une proportion ou une évolution.

1. Le nombre de demandeur d'emploi a augmenté de 0,8% depuis le mois dernier ; en particulier dans notre ville 23% des moins de 25 ans sont au chomage.
2. Succès de la lutte anti-tabac dans le lycée ; en 1 mois plus de 25% des élèves fumeurs ont arrêté de fumer.
3. Dans le lycée, au moins 40% des enseignant à moins de 40 ans.
4. Le nombre d'élèves au collège a augmenté (+0,9%) tandis que celui des élèves au primaire a baissé (-1,4%) ; dans le supérieur les filières courtes sont plébiscité (+8%) et représente 60% des étudiants.

# Exercices :

**Méthode :** $t = \dfrac{v_f - v_i}{v_i}$ $\qquad k = 1 + t \qquad v_f = (1+t) \times v_i = k \times v_i$

On a aussi $\qquad v_i = \dfrac{v_f}{1+t} \qquad t = k - 1$

**Exercice 4.11.** La population mondiale était d'environ 5 321 millions en 1990. L'évolution de cette population tous les cinq ans depuis 1990 est donnée par le tableau ci-dessous :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | Année | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2010 |
| B | Rang de l'année $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| C | Taux d'évolution (arrondi à 0,01 %) | | + 7,91 % | + 6,72 % | + 6,30 % | + 6,17 % |
| D | Effectif $y_i$ (arrondi au million) | 5 321 | 5 742 | 6 128 | 6 514 | 6 916 |
| E | Taux d'évolution **depuis 1990** | 0% | 7,91% | 15,16% | 22,42% | 29,98% |
| F | Coeff. multiplicateur de l'évolution **depuis 1990** | 1 | 1,0791 | 1,1516 | 1,2242 | 1,2998 |

Source : INSEE

Exemple de lecture : la population mondiale a augmenté de 7,91 % entre 1990 et 1995.

1. Calculer l'effectif de la population mondiale en 2005, arrondi au million.
   **Correction :**
   Calculons l'effectif de la population mondiale en 2005, arrondi au million.
   À un taux d'évolution $t$ correspond un coefficient multiplicateur $1 + t$. Nous avons $t = 0{,}063$, le coefficient multiplicateur est alors 1,063.
   $6\,128 \times 1{,}063 \approx 6\,514$ l'effectif de la population mondiale en 2005 est, à un million près, d'environ 6 514 millions.
2. Quelle formule doit on écrire dans la case E3 et tirer vers la droite pour compléter la ligne E ? Compléter la ligne E. Même questions pour la ligne F.
   **Correction :**
   en E3 : "=($D$2-$D3)/$D$2" et affichage en %
   en F3 : "=1+($D$2-$D3)/$D$2"
3. (a) Quel est le taux d'évolution de la population mondiale entre 1990 et 2010 ? On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 0,01 %.
   **Correction :**
   Déterminons le taux d'évolution de la population mondiale entre 1990 et 2010.
   Le taux d'évolution est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. On calcule donc
   $t = \dfrac{6\,916 - 5\,321}{5\,321} \approx 0{,}299\,76$
   Le taux d'évolution de la population mondiale entre 1990 et 2010 est d'environ 29,98 % arrondi à 0,01 %.

   (b) On suppose que la population augmente chaque année de 1,3 % à partir de 2010. Estimer la population mondiale attendue en 2020, arrondie au million.
   **Correction :**

Cela correspond à une suite géométrique de raison $k = 1 + 0,013 = 1,013$ et de premier terme $u_0 = 6916$. On trouve avec la calculatrice $u_{10} \approx 7\,869{,}54$ millions d'habitant en 2020.

**Exercice 4.12.** En 2010, le taux d'inflation a été de 1,5%. On admet dans l'exercice que le prix des produits ont tous suivi ce taux.

1. Quel était, à la fin de l'année 2010, le prix d'un produit qui valait 100 euros en début d'année.
   **Correction :**
   Le coefficient multiplicateur vaut $k = 1,015$. Le produit vaut donc à la fin de l'année $100 \times 1,015 = 101,5$ euros
2. Quel était, au début de l'année 2010, le prix d'un produit qui valait 100 euro à la fin de l'année
   **Correction :**
   Le coefficient multiplicateur vaut $k = 1,015$. Le produit valait donc au début de l'année $100 \div 1,015 = 98,52$ euros

**Exercice 4.13.**

1. Au Botswana, un adulte sur quatre est infecté par le virus du sida. Dans ce pays l'espérance de vie à la naissance est passé de 64 ans à 55 ans entre 1990 et 2009. Calculer le taux d'évoltuion de l'espérance de vie à la naissance de 1990 à 2009. Écrire la conclusion en langage usuel.
   **Correction :**
   On calcule le taux d'évolution par la formule du cours :
   $t = \dfrac{v_f - v_i}{v_i} = \dfrac{55 - 64}{64} = \dfrac{-9}{64} \approx -0,14.$
   L'espérance de vie à la naissance à baisser de 14% entre 1990 et 2009.
2. En France, entre 1984 et 2009, l'espérance de vie des hommes est passée de 71,2 ans à 77,8 ans ; celle des femmes est passé de 79,3 ans à 84,5 ans. Comparer le taux d'évolution de l'espérance de vie des hommes au taux d'évolution de l'espérance de vie des femmes.
   **Correction :**
   On calcule pour les hommes $\dfrac{77,8 - 71,2}{71,2} \approx 0,092$ soit un taux d'évolution d'environ 9,2%. On calcule pour les femmes $\dfrac{84,5 - 79,3}{79,3} \approx 0,066$ soit une hausse d'environ 6,6%. Le taux d'évolution de l'espérance de vie à la naissance des hommes est plus élevé que celui des femmes.

**Exercice 4.14.** Deux villes notées P et M avaient le même nombre d'habitant en 2013. La population de la ville P a augmenté de 5% en 2014 puis a baissé de 4% en 2015. La population de la ville P a baissé de 4% en 2014 puis a augmenté de 5% en 2015.

1. Calculer pour la ville P le taux d'évolution de la population entre 2013 et 2015. Faire de même pour M.
   **Correction :**
   Pour la ville P, on calcule le coefficient multiplicateur entre 2013 et 2014 : $1+0,05=1,05$ puis celui entre 2014 et 2015 : $1-0,04=0,96$. Le coefficient multiplicateur entre 2013 et 2015 est de $k=k_1\times k_2=1,05\times 0,96=1,008$.
   Pour la ville M, on fait de même : $k_1 1-0,04=0,96$ et $k_2=1+0,05=1,05$. Le coefficient multiplicateur entre 2013 et 2015 est de $k=k_1\times k_2=0,96\times 1,05=1,008$
2. Comparer la population des deux villes à la fin de l'année 2015.
   **Correction :**
   Les taux d'évolution étant le même, les population finale sont les même car les population en 2013 sont identiques.

**Exercice 4.15.** Le cours d'une action d'une action a baissé de 1,2% de 9h à 11h alors qu'il avait augmenté de 2,6% de 9h à 10h. Calculer le taux d'évolution du cours de l'action de 10h à 11h.
**Correction :**

On fait un schéma de la situation avec les taux d'évolutions

$$\begin{tikzcd} 9h \arrow[r, "+2,6\%"] \arrow[rr, bend right, "-1,2\%"'] & 10h \arrow[r, "?"] & 11 \end{tikzcd}$$

On traduit en terme de coefficients multiplicateur

$$\begin{tikzcd} 9h \arrow[r, "\times k_1"] \arrow[rr, bend right, "\times k"'] & 10h \arrow[r, "\times k_2"] & 11 \end{tikzcd}$$

Avec $k_1=1+0,026=1,026$, $k_2$ est le coefficient multiplicateur cherché, et $k=k_1\times k_2=1-0,012=0,988$. On trouve donc $k_2=\dfrac{0,988}{1,026}\approx 0,963$. Cela donne un taux d'évolution entre 10h et 11h de $0,963-1=-0,037$ soit une baisse de 3,7%

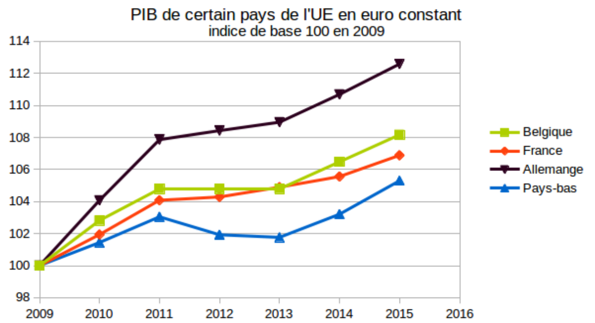
# Exercices :

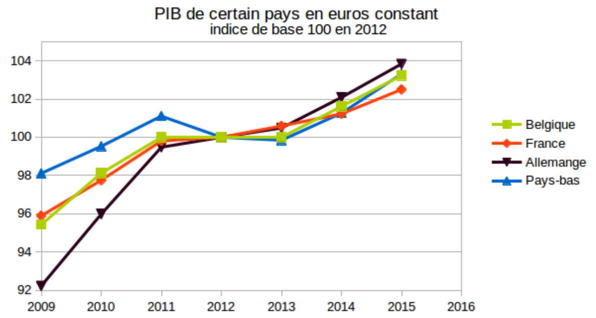
**Méthode :** Autour de l' "indice"
Indice = coeff. multiplicateur $\times 100$.
Attention à l'année de référence !

Le PIB de quelques pays de l'Union Européenne est donné (en milliards d'euros de 2010) dans tableau ci-dessous :

| Annnée | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| France | 1 960 | 1 998 | 2 040 | 2 044 | 2 056 | 2 069 | 2 095 |
| Belgique | 355 | 365 | 372 | 372 | 372 | 378 | 384 |
| Pays-Bas | 623 | 632 | 642 | 635 | 634 | 643 | 656 |
| Allemagne | 2 479 | 2 580 | 2 674 | 2 688 | 2 701 | 2 744 | 2 791 |

Source : OCDE




**Exercice 4.16.** Commenter les deux graphiques ci-dessus. Expliquer ce que vous comprenez ? Quelle est la différence entre les deux graphiques ?

**Exercice 4.17.** On reprend le tableau ci-dessus en ne conservant que la ligne "France".

| Annnée | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| France | 1 960 | 1 998 | 2 040 | 2 044 | 2 056 | 2 069 | 2 095 |
| Taux d'évolution | n.d. | 1,94% | 2,10% | 0,20% | 0,59% | 0,63% | 1,26% |
| Coeff. multiplicateur associé | n.d. | 1,0194 | 1,021 | 1,002 | 1,0059 | 1,0063 | 1,0126 |
| Taux d'évolution **depuis 2009** | n.d. | 1,94% | 4,08% | 4,29% | 4,90% | 5,56% | 6,89% |
| Coeff. multiplicateur **depuis 2009** | n.d. | 1,0194 | 1,0408 | 1,0429 | 1,0490 | 1,0556 | 1,0689 |
| Coeff. multiplicateur $\times 100$ | n.d. | 101,94 | 104,08 | 104,29 | 104,9 | 105,56 | 106,89 |

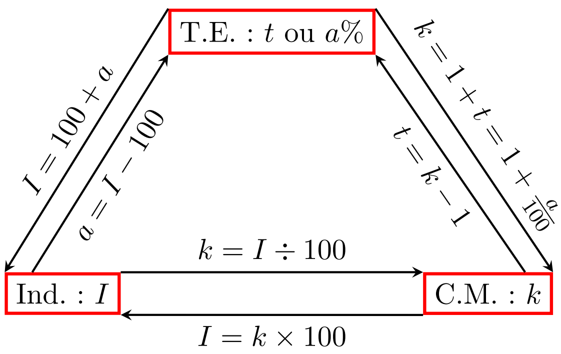
1. Compléter le tableau (détaillez quelques calculs sur une feuille).
2. Quel lien faites vous avec le graphique de gauche ?

**Méthode :** On appelle **Indice** le coefficient multiplicateur $\times 100$. La notion d'indice sous-entend **toujours** une valeur de **référence**

**Exercice 4.18.** On reprend le tableau ci-dessus en ne conservant que les lignes “Allemagne” et “Pays-Bas”.

| Annnée | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pays-Bas | 623 | 632 | 642 | 635 | 634 | 643 | 656 |
| T. E. **depuis 2012** | -1,89% | -0,47% | 1,10% | 0% | -0,16% | 1,26% | 3,31% |
| C.M. **depuis 2012** | 0,9811 | 0,9953 | 1,0110 | 1 | 0,9984 | 1,0126 | 1,0331 |
| Indice (année de ref. 2012) | 98,11 | 99,53 | 101,10 | 1 | 99,84 | 101,26 | 103,31 |
| | | | | | | | |
| Allemagne | 2 479 | 2 580 | 2 674 | 2 688 | 2 700 | 2 744 | 2 791 |
| T. E. **depuis 2012** | -7,78% | -4,02% | -0,52% | 0% | 0,48% | 2,08% | 3,83% |
| C.M. **depuis 2012** | 0,9222 | 0,9598 | 0,9948 | 1 | 1,0048 | 1,0208 | 1,0383 |
| Indice (année de ref. 2012) | 92,22 | 95,98 | 99,48 | 100 | 100,48 | 102,08 | 103,83 |

1. Compléter le tableau (détaillez quelques calculs sur une feuille).
2. Quel lien faites vous avec le graphique de droite de la page précédente ?
3. Pourquoi est-ce plus pertinent de comparer les indices de l’Allemagne et des Pays-bas ou de la France et de la Belgique, plutôt que les valeurs brut du PIB ?
4. Comment sont obtenus les deux graphiques de la page précédentes ? Que mettent-ils en valeur ? Quelle est la différence entre les deux graphiques ?




https://www.youtube.com/watch?v=5JebMbE1TrI https://www.youtube.com/watch?v=R7szOtN1RD8

# Exercices :

**Exercice 4.19.** La tableau suivant donne l'évolution du nombre d'habitants d'un village entre les années 2004 et 2009 (les relevés de population sont effectués chaque année au 1er janvier).

| Année | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'habitants | 873 | 1 025 | 1 010 | 1 121 | 1 289 | 1 456 |

*Les deux parties qui suivent sont indépendantes.*

**Partie I : première étude**

1. Calculer le taux global d'évolution en pourcentage de cette population entre les années 2004 et 2009 (arrondir le résultat à 0,1 %).

   **Correction :**

   Le taux global de 2004 à 2009 est égal à :
   $\dfrac{1\,456-873}{873}\times 100=\dfrac{583}{873}\times 100\approx 66,8\,\%$ à 0,1 près.

2. En supposant que la population augmentera après 2009 de 10,8 % par an, calculer combien ce village comptera d'habitant au 1er janvier 2011 (on arrondira bien sûr le résultat à l'unité !).

   **Correction :**

   De 2009 à 2011, il y a 2 ans ; donc la population estimée en 2011 sera de :
   $1\,456\times 1,108^2\approx 1\,787$.

**Partie II : seconde étude**

Dans cette partie, on suppose que la population du village après 2009 n'augmentera que de 6 % par an jusqu'en 2016.

Soit $(u_n)$ la suite telle que $u_n$ arrondi à l'entier près représente le nombre d'habitants de ce village en $(2009+n)$, on a $u_0=1\,456$.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Année | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 2009 | 0 | 1 456 |
| 3 | 2010 | 1 | |
| 4 | 2011 | 2 | |
| 5 | 2012 | 3 | |
| 6 | 2013 | 4 | |
| 7 | 2014 | 5 | |
| 8 | 2015 | 6 | |
| 9 | 2016 | 7 | |

1. Justifier pourquoi $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 1,06.
   **Correction :**
   Chaque année la population augmente de 6 %, donc celle-ci est multipliée par $1 + \frac{6}{100} = 1,06$. La suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 1,06.
2. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$
   **Correction :**
   On a $u_{n+1} = u_n + u_n \times 0,06 = u_n(1 + 0,06) = 1,06u_n$.
3. Calculer $u_4$. En donner un arrondi à l'entier près. Que représente ce nombre ?
   **Correction :**
   On a $u_4 = u_3 \times 1,06 = u_2 \times 1,06 \times 1,06 = \cdots = 1456 \times 1,06^4 \approx 1\,838$.
4. Calculer le nombre estimé d'habitants dans ce village en 2015.
   **Correction :**
   2015 correspond à $n = 6$ ; donc $u_6 \approx 2\,065$.
5. À l'aide d'un logiciel de type tableur, on réalise la feuille de calcul suivante : Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 afin d'obtenir, par recopie vers le bas, les termes de la suite $(u_n)$ jusqu'au rang 7 ?
   **Correction :**
   Formule : =C2*1,06

**Exercice 4.20.** Le tableau suivant donne le taux d'inflation annuel des prix en Argentine depuis l'année 2000 :

| Année | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taux d'inflation en pourcentage | $-2$ | $-0,9$ | 4 | 41 | 13,4 | 6,1 | 9,6 | 9,8 | 8,5 |

*Source : GIA Wodd Fadbook*

On considère une marchandise produite en Argentine dont la valeur au 01/01/2000 était 1 500 euros.

On admet que chaque année le taux d'évolution de la valeur de cette marchandise est égal au taux d'inflation en Argentine.

Par exemple le taux d 'évolution de la valeur de cette marchandise entre le 01/01/2000 et le 01/01/2001 était $-2\,\%$.

1. (a) Calculer la valeur de la marchandise le 01/01/2001 puis la valeur de cette marchandise le 01/01/2002.

   **Correction :**

   Le 01/01/2001 la valeur était de $1\,500 \times \left(1 - \dfrac{2}{100}\right) = 1\,500 \times 0,98 = 1\,470$.

   Le 01/01/2002 la valeur était de $1\,470 \times \left(1 - \dfrac{0,9}{100}\right) = 1\,500 \times 0,991 = 1\,456{,}77$.

   (b) Calculer, en pourcentage, à 0,1 % près, le taux d'évolution global de la valeur de la marchandise au cours des deux années comprises entre le 01/01/2003 et le 01/01/2005.

   **Correction :**

   Les prix ont été multipliés la première année par 1,41 et la seconde par $1,134$, donc sur les deux ans par $1,41 \times 1,134 = 1{,}589\,84$ soit une augmentation d'environ 59,0 %.

2. On prend pour base 100 la valeur de la marchandise le 01/01/2007.

   (a) Recopier et compléter le tableau suivant avec les indices arrondis au dixième :

| Date | 01/01/2006 | 01/01/2007 | 01/01/2008 | 01/01/2009 |
|---|---|---|---|---|
| Indice | 91,4 | 100 | 109,8 | 119,1 |

   (b) Quel est le taux d'évolution global de la valeur de la marchandise entre le 01/01/2007 et le 01/01/2009 ?

   **Correction :**

   L'indice est passé de 100 à 119,1 ce qui correspond à une augmentation en deux ans de 19,1 %.

# Comme au Devoir 4

**Exercice 4.21.** Compléter le tableau suivant

| $P_1$ en euros | $P_2$ en euros | taux d'évolution en % | coefficient multiplicateur |
|---|---|---|---|
| 6 | 6,78 | 13% | 1,13 |
| 40 | 29,2 | -27% | 0,73 |
| 62 | 83,7 | 35% | 1,35 |
| 200 | 194 | -3% | 0,97 |

**Exercice 4.22.**

1. Le prix TTC (toute taxe comprise) s'obtient après avoir augmenté le prix HT (hors taxe) de $19,6\%$. Déterminer le prix TTC d'un article dont le prix HT s'élève à 250 euros (arrondir à l'unité).
   **Correction :**
   Le coefficient multiplicateur est $k = 1 + \frac{19{,}6}{100} = 1,196$. Pour avoir le prix TTC on multiplie par $1,196$.
   On obtient $250 \times 1,196 = 299$
2. Le prix TTC (toute taxe comprise) s'obtient après avoir augmenté le prix HT (hors taxe) de $19,6\%$. Déterminer le prix HT d'un article dont le prix TTC s'élève à 80 euros (arrondir à l'unité).
   **Correction :**
   Le coefficient multiplicateur est $k = 1 + \frac{19{,}6}{100} = 1,196$. Pour avoir le prix HT on **divise** par $1,196$.
   On obtient $80 \div 1,196 = 66,89$ soit 67 euros arrondi à l'unité.
3. La population d'une ville de 15 millions d'habitants diminue de 3% sur un an. Calculer la population de la ville après un an.
   **Correction :**
   La population diminue de 3%, le coefficient multiplicateur associé est donc $k = 1 - \dfrac{3}{100} = 0,97$. La population après un an est de $15\,000\,000 \times 0,97 = 14\,550\,000$.
4. Entre 2010 et 2016, le prix d'un article a augmenté de 20%. Quel était son prix en 2010, sachant qu'il coûtait 540 euros en 2016.
   **Correction :**
   Le coefficient multiplicateur associé à la hausse est $k = 1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$.
   En notant $p_i$ le prix en 2010, on sait que $540 = p_i \times 1,2$.
   On en déduit que le prix en 2010 était de $p_i = \dfrac{540}{1,2} = 450$ euros.
5. Une entreprise produisait 1 500 moules à gâteaux en 2009, elle en produit 1 000 en 2016. Calculer le taux d'évolution de la production entre 2009 et 2016. Exprimer **ensuite** ce taux en pourcentage arrondi à 0,01% près.

**Correction :**

Le taux d'évolution vaut : $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i} = \dfrac{1000 - 1500}{1500} = 0,3333$, soit $33,33\%$.

**Exercice 4.23.** Le prix des transports publics à Madrid en 2010 a augmenté de 50%. Puis une remise 80% a été accordée à certaines populations défavorisées.

1. En utilisant les coefficients multiplicateurs, calculer le taux d'évolution global du prix des transports pour les populations défavorisées.
   **Correction :**
   Le premier coefficient multiplicateur vaut $k_1 = 1 + \frac{50}{100} = 1,5$ le second vaut $k_2 = 1 - \frac{80}{100} = 0,2$.
   Le coefficient multiplicateur global est $k = k_1 \times k_2 = 1,5 \times 0,2 = 0,3$. Le taux dévolution vaut $t = k - 1 = 0,3 - 1 = -0,7$ soit une baisse de 70%.
2. Quel sera le prix à payer pour ces populations pour un trajet qui valait 23 euros le 31/12/2009.
   **Correction :**
   On a $23 \times 0,3 = 6,9$ soit 6 euros et 90 centimes.

**Exercice 4.24.** Dans un congrès, 87% des participants comprennent l'anglais ou le français. En particulier, 82% des participants comprennent l'anglais et 72% des participants comprennent le français.

Calculer la proportion des participants qui comprennent l'anglais et le français.

**Correction :**

Ici il ne s'agit **PAS** d'évolution mais de proportion. On se souvient de la formule
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
On trouve donc avec les notations $A$ : "parlent anglais" et $B$ : "parlent français".
$$87 = 82 + 72 - p(A \cap B)$$
On en déduit : $p(A \cap B) = 82 + 72 - 87 = 67\%$ des participants parlent anglais et français.

**Exercice 4.25.** Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'un article de consommation courante entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2009.

| Année | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Prix en euros : $y_i$ | 72 | 79 | 85 | 88 | 97 | 106 | 119 | 132 | 144 | 153 |

1. Calculer, en pourcentage, le taux d'évolution du prix en euros de cet article entre le 1er janvier 2003 et le 1er janvier 2009.

   **Correction :**

   $t = \dfrac{153 - 88}{88} = 0,738$ soit une augmentation de 74%

2. Calculer, le coefficient multiplicateur du prix en euros de cet article entre le 1er janvier 2001 et le 1er janvier 2007.

   **Correction :**

   $t = \dfrac{132 - 79}{79} = 0,671$ soit un coefficient multiplicateur de $1,671$.

3. De même calculer, le coefficient multiplicateur du prix en euros de cet article entre le 1er janvier 2006 et le 1er janvier 2002 (l'année de référence est 2006).

   **Correction :**

   $t = \dfrac{85 - 119}{119} = -0,286$ soit un coefficient multiplicateur de $0,714$.

4. Sachant qu'entre le 1er janvier 1999 et le 1er janvier 2000, le prix a augmenté de 1,5%. Déterminer le prix au le 1er janvier 1999.

   **Correction :**

   On a un coefficient multiplicateur de $1,015$. Le prix en 2000 étant de 72 euros, le prix en 1999 est de $\dfrac{72}{1,015} \approx 71$ euros.

5. Sachant qu'entre le 1er janvier 2009 et le 1er janvier 2010, le prix a augmenté de 1,3% ; puis qu'il a augmenté de 1,2% jusqu'au le 1er janvier 2011. Déterminer le prix au le 1er janvier 2011.

   **Correction :**

   On a un coefficient multiplicateur global de de $1,013 \times 1,012 = 1,02516$.
   Le prix en 2009 étant de 153 euros, le prix en 2011 est de $153 \times 1,02516 = 156,85$ euros.

**Exercice 4.26.** Le tableau suivant donne, pour chaque année, entre 2002 et 2004, le pourcentage d'évolution du nombre de touristes dans une ville de Normandie par rapport au nombre de touristes de l'année précédente.

| Année | 2002 | 2003 | 2004 |
|---|---|---|---|
| Taux d'évolution | + 3,1% | - 1,2% | + 5% |
| Coefficient multiplicateur | $1,031$ | $0,988$ | 1,05 |

Par exemple, en 2002, le nombre de touristes a augmenté de 3,1% par rapport à 2001.

1. Compléter le tableau.
2. Calculer le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution du nombre de touristes de 2001 à 2004.
   **Correction :**
   Le coefficient multiplicateur est obtenu en **multipliant** les coefficients multiplicateurs intermédiaires :
   $$k = k_1 \times k_2 \times k_3 = 1,031 \times 0,988 \times 1,05 = 1,06956$$
3. En déduire le taux d'évolution (en pourcentage) entre 2001 et 2004 (arrondir à 0,01% près).
   **Correction :**
   On sait que $k = 1,06956$. Le taux d'évolution vaut donc $t = k - 1 = 0,06956$ soit $6,96\%$
4. En 2004, il y avait 100 000 touristes. On suppose qu'ensuite le nombre de touristes augmente de 2,5% par an. Soit $(t_n)$ la suite telle que $t_n$ arrondi à l'entier près représente le nombre de touristes dans cette ville en $(2004 + n)$, on a $t_0 = 100\,000$.
   Justifier pourquoi $(t_n)$ est une suite géométrique de raison 1,025
   **Correction :**
   Chaque année le nombre de touristes augmente de 2,5 %, donc celui-ci est multipliée par $1 + \dfrac{2,5}{100} = 1,025$. La suite $(t_n)$ est une suite géométrique de raison 1,06.
5. Exprimer $t_n$ en fonction $t_{n-1}$.
   **Correction :**
   $t_n = 1,025 \times t_{n-1}$
6. Calculer $t_3$. En donner un arrondi à l'entier près. Que représente ce nombre ?
   **Correction :**
   On calcule avec la calculatrice : $t_1 = 100000 \times 1,025 = 102500$, $t_2 = 102500 \times 1,025 = 105063$ et $t_3 = 105063 \times 1,025 = 107689$.

# Chapitre 5
# Droites et Systèmes
09/01/2017

# Cours :

## 1 Droites du plan

**Proposition 1** (Équation d'une droite)**.**
Dans un repère $(0, I, J)$, toute droite admet une *équation* de la forme

$$y = a \times x + b \quad \text{avec } a,\ b \text{ deux nombres réels}$$

ou

$$x = k \quad \text{avec } k \text{ un nombre réel.}$$

C'est à dire que chaque point $M = (x, y)$ appartenant à cette *droite* a des *coordonnées* $(x, y)$ telles que l' équation est satifaite .

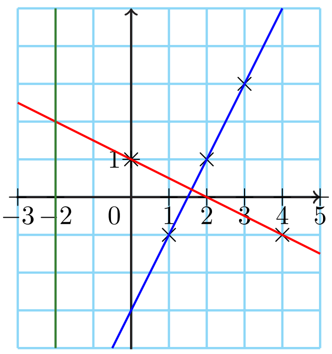
à voir `https://www.youtube.com/watch?v=6s-kQspauaM`

**Proposition 2.** Toutes les droites d'équaions $x = k$ sont *parallèles* à l'axe des ordonnées ; elle sont *verticales* .

**Proposition 3.** On considère une droite $D$ d'équation $y = ax + b$ et une droite $D'$ d'équation $y = a'x + b'$.
Les droites $D$ et $D'$ sont *parallèles* si et seulement si $a = a'$ .

**Exemple 4.**
On considère la droite $d_1$ d'équation $y = 2x - 3$ et un point $P = (x, y)$ sur $d_1$.

1. Si $x = 1$ alors $y =$ $2 \times 1 - 3 = -1$ .
2. Si $x = 2$ alors $y =$ $2 \times 2 - 3 = 1$ .
3. Si $x = 3$ alors $y =$ $2 \times 3 - 3 = 3$ .
4. Placer les différents points et tracer la droite.




On considère la droite $d_2$ d'équation $y = -0,5x + 1$.
Le point de $d_2$ d'abscisse $x = 0$ a pour ordonnée $y =$ $-0,5 \times 0 + 1 = 1$ , celui d'abscisse $x = 4$ a pour ordonnée $y =$ $-0,5 \times 4 + 1 = -1$ . Tracer la droite.
Tracer la droite $d_3$ d'équation $x = -2$.

## 2 Vocabulaire

**Définition 5.** On considère une droite d'équation $y = ax + b$.

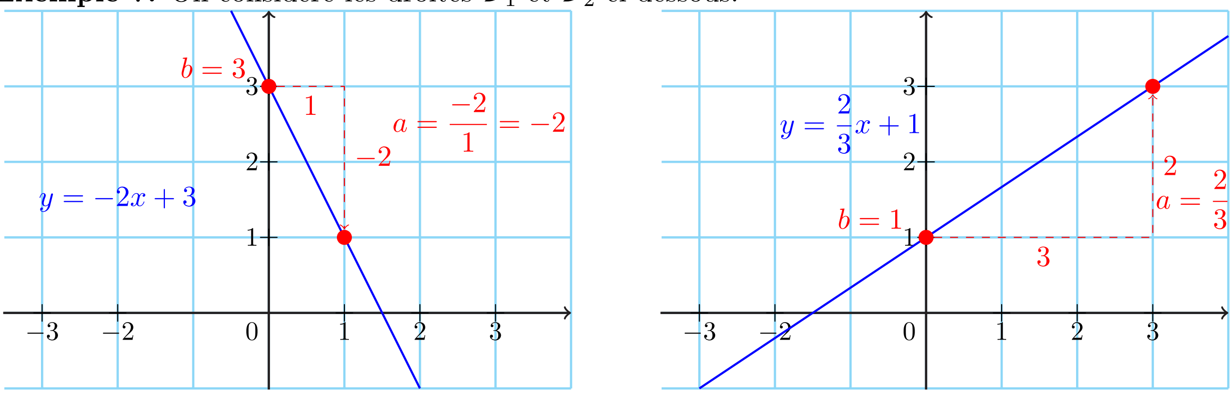
1. $a$ est appelé coeffcient **directeur** . C'est la *pente* de la droite.
2. $b$ est appelé *ordonnée à l'origine* .

**Proposition 6.** On considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax+b$ et deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sur cette droite. On a alors :

1. $\boxed{a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$
2. $b$ est l'ordonnée de l'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe vertical.

`https://www.youtube.com/watch?v=Quk6CPUk3Zs`

**Exemple 7.** On considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ci-dessous.




Dans chacun des cas déterminer l'équation de la droite (il faut trouver $a$, $b$ et écrire l'équation).

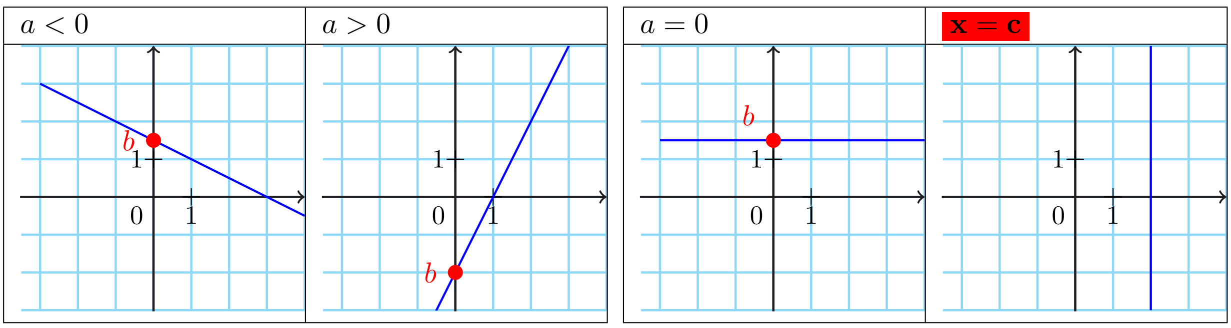
**Exemple 8.** Déterminer l'équation de la droite passant par $A = (0, -3)$ et $B = (1, -1)$.
**Correction :**

La droite n'est pas parallèle à l'axe vertical, son équation est donc de la forme $y = ax+b$. Elle coupe l'axe verticale en $A = (0, -3)$ donc $b = -3$. Son coefficient directeur est donné par $a = \dfrac{(-1)-(-3)}{(1-0)} = \dfrac{2}{1} = 2$.
La droite a pour équation $y = 2x - 3$.

**Exemple 9.** Déterminer l'équation de la droite passant par $A = (-1, 8)$ et $B = (2, -1)$.
**Correction :**

La droite n'est pas parallèle à l'axe vertical, son équation est donc de la forme $y = ax + b$.
Son coefficient directeur est donné par $a = \dfrac{-1-8}{(2-(-1))} = \dfrac{-9}{3} = -3$.
Comme $A$ est sur la droite, on a $8 = -3 \times (-1) + b = 3 + b$, d'où $b = 5$.
La droite a pour équation $y = -3x + 5$.

## 3 Aspects graphiques – (rappel)



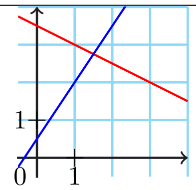
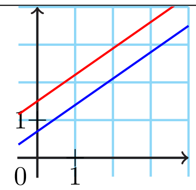
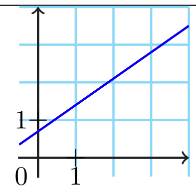
# 4 Système d'équations à deux inconnues

On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} u_1x + v_1y = w_1 \\ u_2x + v_2y = w_2 \end{array}\right.$ où $u_1$, $v_1$, $w_1$, $u_2$, $v_2$ et $w_2$ sont des nombres réels.

**Proposition 10.** Résoudre le système (S) revient à déterminer les coordonnées du point d' *intersection* des *droites* associées à chacune des *équations* .

**Proposition 11** (Méthode : partie 1)**.**

1. Mettre chaque équation sous la forme d'une *équation de droite* (S') $\left\{\begin{array}{l} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{array}\right.$
2. Trois cas se présentent

| droites sécantes | droites parallèles | droites confondues |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $a_1 \neq a_2$ | $a_1 = a_2$ et $b_1 \neq b_2$ | $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ |
| une **unique** solution | **PAS** de solutions | une **infinité** de solutions |

**Proposition 12** (Méthode : Partie 2)**.** Dans le cas où les droites sont sécantes (donc $a_1 \neq a_2$ ) :

1. on écrit "l'égalité des $y$". De $\left\{\begin{array}{l} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{array}\right.$ , on écrit

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2$$

2. on résoud en $x$ :
   On trouve $x = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$.
3. on reporte la valeur de $x$ trouvée pour déterminer le $y$.

**Exemple 13.** Résoudre le système d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 2 \end{array}\right.$

**Correction :**

Soit $(x, y)$ le couple solution cherché. On a alors $2x+1 = -3x+2$. On en déduit que $2x + 3x = 2 - 1$ c'est à dire $5x = 1$.
On a trouvé que $x = \frac{1}{5}$.
On remplace la valeur de $x$ dans la première équation $y = 2 \times \frac{1}{5} + 1 = \frac{7}{5}$.
**Remarque :** on pourrait utiliser la deuxième équation.

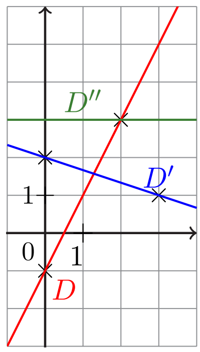
# Exercices :

**Méthode : Tracer une droite à partir de l'équation**

1. Déterminer deux points sur la droite. Pour cela :
   (a) On choisit deux abscisses $x_1$ et $x_2$ ;
   (b) on calcule les deux ordonnées correspondantes : $y_1 = ax_1 + b$ et $y_2 = ax_2 + b$ ;
   (c) **Note :** les nombres $x_1$ et $x_2$ sont choisis pour que les calculs soient faciles.
2. **Placer** les deux points sur un graphique. **Tracer** la droite passant par ces deux points.

`https://www.youtube.com/watch?v=tN7C1HJfocw`

**Exercice 5.1.**
Soit $D$ la droite d'équation $y = 2x - 1$, $D'$ la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 2$ et $D''$ la droite d'équation $y = 3$. Tracer dans un repère les droites $D$, $D'$ et $D''$.



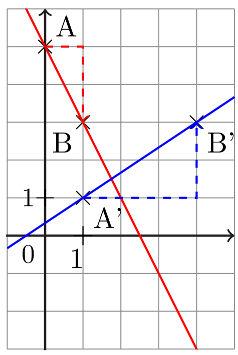

**Correction :**

On considère d'abord la droite $D$.
Pour $x = 0$, on trouve $y = 2 \times 0 - 1 = -1$. Pour $x = 2$, on trouve $y = 2 \times 2 - 1 = 3$.
On considère ensuite la droite $D'$.
Pour $x = 0$, on trouve $y = -\frac{1}{3} \times 0 + 2 = 2$. Pour $x = 3$, on trouve $y = -\frac{1}{3} \times 3 + 2 = 1$.

**Méthode : Tracer une droite à partir d'un point et du coefficient directeur**

1. Placer un point $A$ apparenant à la droite (d'équation $y = ax + b$) dans le repère. Si possible choisir $A = (0, b)$.
2. On avance de 1 vers la droite et de $a$ verticalement (vers le haut si $a > 0$, vers le bas sinon). On place le point $B$ et on trace la droite.
3. **Note :** Il peut être astucieux d'aller de 2, 3 ou 4 vers la droite, on avance alors verticalement de $2a$, $3a$ ou $4a$ suivant le cas.

**Exercice 5.2.**
Soit $D$ la droite d'équation $y = -2x + 5$ et $D'$ la droite d'équation de coefficient directeur $\frac{2}{3}$ passant par $A = (1, 1)$. Tracer dans un repère les droites $D$ et $D'$.




**Correction :**

On considère d'abord la droite $D$.
On place d'abord $A = (0, 5)$ puis on avance de 1 et **descend** de 2
Pour la droite $D'$, on place le point $A' = (1, 1)$ qui est donné. On avance de 3 vers la droite et de $3 \times \frac{2}{3} = 2$ vers le haut

**Méthode : Déterminer l'équation d'une droite passant par deux points**

1. le coefficient directeur $a$ vaut $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
2. On trouve $b$ en résolvant $y_A = ax_A + b$ ou $y_B = ax_B + b$. **Conclure**

**Exercice 5.3.** Déterminer l'équation de la droite passant par $A = (-2, 5)$ et $B = (1, 2)$.

**Correction :**

Le coefficient directeur vaut
$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-5}{1-(-2)} = -1$.
L'équation de la droite est donc de la forme $y = -x + b$.
Comme la droite passe par $B$, on a de plus $2 = -1 + b$ et donc $b = 2 + 1 = 3$.
**La droite $(AB)$ a pour équation $y = -x + 3$.**

**Méthode : Déterminer le point d'intersection de deux droites**

1. On vérifie que les deux droites sont sécantes :$a \neq a'$.
2. On détermine $x$ en résolvant $ax + b = a'x + b'$
3. On détermine $y$ en reportant la valeur de $x$ trouvée ci-dessus dans une des équations. **Conclure**

**Exercice 5.4.** On considère les droites d'équations $y = -5x + 2$ et $y = 3x - 6$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection $I$ des deux droites.

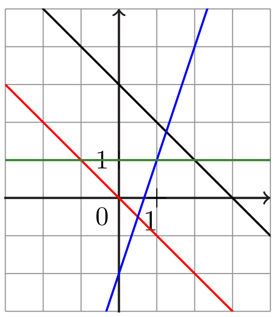
**Correction :**

Les deux droites sont sécantes car leurs coefficients directeurs ($-5$ et $3$) sont différents.
On note $I = (x_I, y_I)$ les coordonnées du point $I$. On a donc $y_I = -5x_I + 2$ et $y_I = 3x_I - 6$. On en déduit que $-5x_I + 2 = 3x_I - 6$, c'est à dire que $2 + 6 = 3x_I + 5x_I$. On a donc $8 = 8x_I$ et $x_I = 1$.
On remplace $x_I$ dans la première équation pour obtenir :
$y_I = -5x_I + 2 = -5 \times 1 + 2 = -5 + 2 = -3$. **Le point $I$ a pour coordonées (1,-3).**

**Exercice 5.5.**

Tracer dans le repère ci-contre les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ d'équations respectives

$$y = -x + 3; \quad y = 3x - 2; \quad y = 1; \quad y = -x$$




1. Les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$ sont-elles sécantes ? Justifier. Lire graphiquement les coordonnées du point d'intersection.
2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $D_4$ sont-elles sécantes ? Justifier.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$.

**Correction :**

1. Les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$ sont sécantes car leurs coefficients directeurs ($3$ et $-1$) sont différents. On lit sur le graphique $I = (0,5; -0,5)$

**Correction :**

2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_4$ sont parallèles non confondues car elles ont le même coefficient directeur $(-1)$ mais pas la même ordonnée à l'origine.

**Correction :**

3. On note $(x, y)$ les coordonnées du point d'intersection. On a $3x - 2 = -x$ et donc $4x = 2$. On en déduit que $x = \frac{1}{2} = 0,5$ et que $y = -x = -0,5$. Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(0,5; -0,5)$.

**Correction :**

4. On note $(x, y)$ les coordonnées du point d'intersection. On a déjà $y = 1$. Comme on a aussi $y = -x$ on en déduit que $-x = 1$ puis que $x = -1$.
Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(-1; 1)$.

On considère maintenant les systèmes $(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} 3x - y - 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$ et $(S_2) : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$

Écrire chaque équation des systèmes ci-dessus sous la forme d'équation (**réduites**) de droite.

**Correction :**

En mettant chaque équation sous la forme $y =$ on voit que :$(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} y = 3x - 2 \\ y = -x \end{array} \right.$

et $(S_2) : \left\{ \begin{array}{l} y = -x + 3 \\ y = -x \end{array} \right.$

À l'aide des questions précédentes résoudre les systèmes $(S_1)$ et $(S_2)$

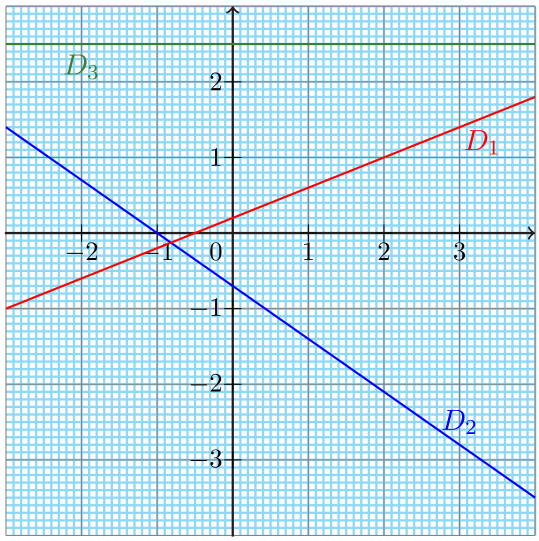
**Correction :**

D'après la question précédente la solution du système $(S_1)$ est donnée par les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$. La solution du système $(S_1)$ est donc $(0,5; -0,5)$.
D'après la question précédente la solution du système $(S_1)$ est donnée par les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_4$ qui ne s'intersectent pas. Il n'y a donc **pas** de solution.

# Exercices :

**Exercice 5.6.**

1. Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites.
2. En déduire l'équation correspondante.
3. Tracer sur le repère la droite $D_4$ qui passe par $(1;1)$ et a pour coefficient directeur $0,5$.
4. Déterminer graphiquement le point d'intersection entre la droite $D_4$ et la droite $D_2$.

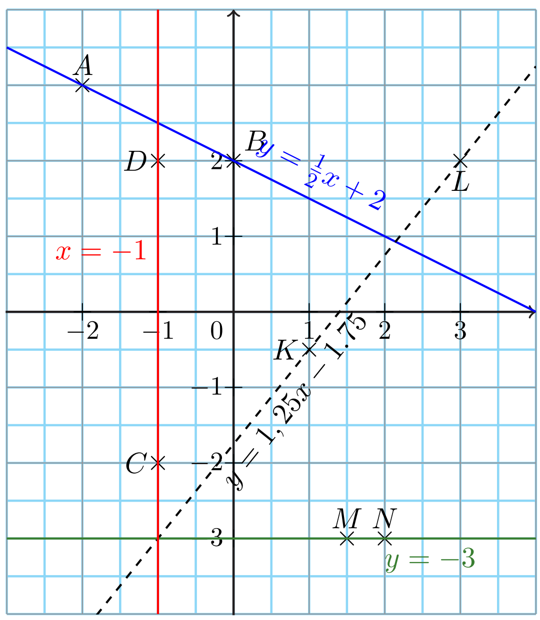



**Correction :**

On lit sur le graphique pour $D_1$ : $b = 0.2$. Pour déterminer le coefficient directeur on utilise les points $A(-3;-1)$ et $B(2;1)$.
On a alors $a = \dfrac{1-(-1)}{2-(-3)} = \dfrac{2}{5}$.
On lit sur le graphique pour $D_2$ : $b = -0.7$. Pour déterminer le coefficient directeur on utilise les points $A(-1;0)$ et $B(0;-0,7)$.
On a alors $a = \dfrac{0.7-(0)}{0-(-1)} = -0.7$.
Graphiquement le point d'intersection entre la droite $D_1$ et la droite $D_2$ est le point de coordonnées $(-1;0)$

**Exercice 5.7.** Dans le plan rapporté à un repère on considère les points $A = (-2;3)$, $B = (0;2)$, $C = (-1;-2)$, $D = (-1;2)$, $K = (1;-0,5)$, $L = (3;2)$, $M = (1,5;-3)$ et $N = (2;-3)$.

1. Placer les points dans le repère ci-contre.
2. Tracer les droites $(AB)$, $(CD)$, $(KL)$ et $(MN)$.
3. Donner l'équation réduite de chaque droite.



**Correction :**

Pour la droite $(KL)$, on calcule $a$ par
$a = \frac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \frac{2-(-0,5)}{3-1}$,
$a = \frac{2,5}{2} = 1,25$
Ensuite on calcule $b$ grâce au point $L$ :
$2 = 1,25 \times 3 + b$. On en déduit que
$b = 2 - 1,25 \times 3 = -1,75$

**Exercice 5.8.** Pour chacun des systèmes suivants, écrire les équations sous forme d'équation réduite de droite et déterminer le nombre de solutions.

$$(S_1) : \begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ -6x + 6y = -13 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} -1,5x + 0,25y = 25 \\ 12x - 2y = -200 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ x - 5y = -1 \end{cases}$$

Donner une éventuelle solution du système $(S_2)$ et une éventuelle solution du système $(S_3)$.

**Correction :**

En isolant les $y$ on obtient d'abord :

$$(S_1') : \begin{cases} 2x - 5 = 2y \\ 6y = 6x - 13 \end{cases} \quad (S_2') : \begin{cases} 0,25y = 1,5x + 25 \\ 12x + 200 = 2y \end{cases} \quad (S_3') : \begin{cases} 5x + 5 = 4y \\ x + 1 = 5y \end{cases}$$

Ensuite on divise chaque équation pour avoir la forme $y =$...

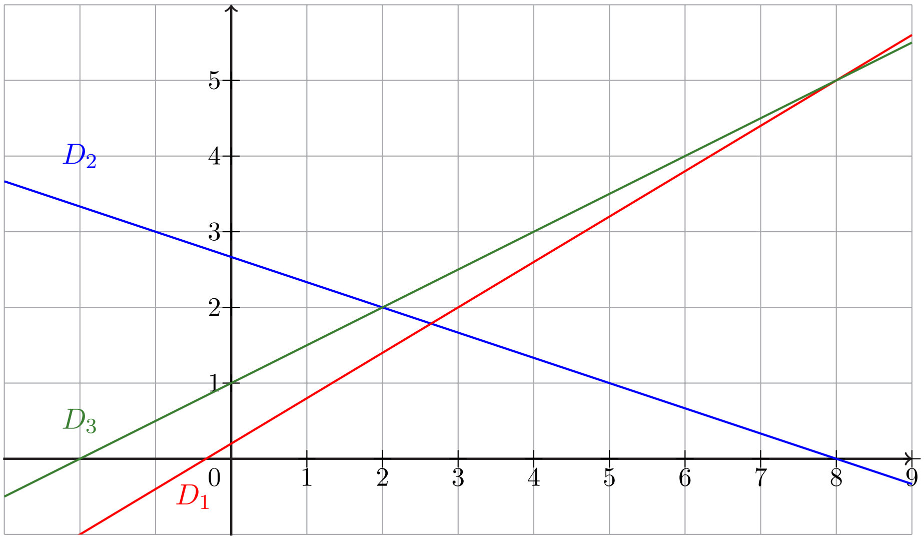
$$(S_1'') : \begin{cases} y = x - 2,5 \\ y = x - \frac{13}{6} \end{cases} \quad (S_2'') : \begin{cases} y = 6x + 100 \\ y = 6x + 100 \end{cases} \quad (S_3'') : \begin{cases} y = 1,25x + 1,25 \\ y = 0,2x + 0,2 \end{cases}$$

Le système $(S_1)$ est équivalent au système $(S_1'')$. Les deux équations du système $(S_1'')$ correspondent à deux droites parallèles non confondues (même coefficient directeur 1 et ordonnées à l'origine différentes). Ces deux droites ne s'intersectent pas et le système $(S_1)$ **n'a pas de solution.**
Le système $(S_2)$ est équivalent au système $(S_2'')$. Les deux équations du système $(S_2'')$ sont les mêmes (deux droites confondues) ; il y a une infinité de solutions (par ex. $(0, 100)$ en est une).
Le système $(S_3)$ est équivalent au système $(S_3'')$. Les deux équations du système $(S_3'')$ correspondent à deux droites sécantes ( coefficient directeur différent). Il y a une unique solution. En notant $(x, y)$ le couple solution, on a
$1,25x + 1,25 = 0,2x + 0,2$ et donc $1,05x = -1,05$ puis $x = -1$. Enfin $y = 0,2 \times (-1) + 0,2 = 0$.
L'unique solution est $(-1, 0)$

# Exercices :

**Exercice 5.9.**

1. Déterminer graphiquement deux points $A_1$ et $B_1$ de la droite $D_1$. En déduire l'équation de $D_1$.
2. Déterminer graphiquement deux points $A_2$ et $B_2$ de la droite $D_2$. En déduire l'équation de $D_2$.
3. Donner l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de $D_3$ ; en déduire l'équation de $D_3$.
4. Déterminer graphiquement le point d'intersection entre la droite $D_1$ et la droite $D_3$.

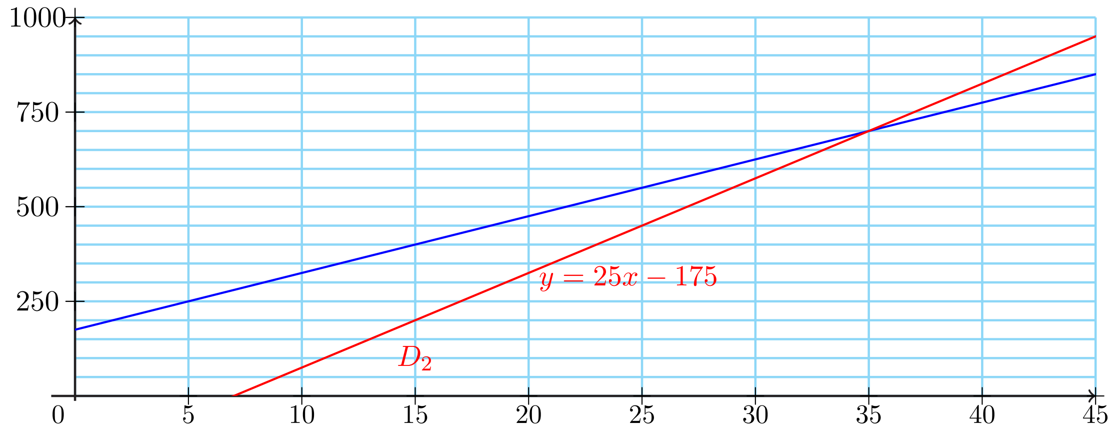



**Correction :**

1. On lit sur le graphique que $A_1 = (3, 2)$ et $B_1 = (8, 5)$ sont sur la droite $D_1$. le coefficient directeur est donc :
   $a = \dfrac{5-2}{8-3} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$.
   Comme $A_1$ est sur la droite, on a $2 = \dfrac{3}{5} \times 3 + b$ et donc
   $b = \dfrac{10}{5} - \dfrac{9}{5} = \dfrac{1}{5}$.
   L'équation de $D_1$ est $y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{1}{5}$.
2. On lit sur le graphique que $A_2 = (-1, 3)$ et $B_2 = (5, 1)$ sont sur la droite $D_2$. le coefficient directeur est donc :
   $a = \dfrac{1-3}{5-(-1)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$.
   Comme $A_2$ est sur la droite, on a $3 = \dfrac{-1}{3} \times (-1) + b$ et donc
   $b = \dfrac{9}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$.
   L'équation de $D_2$ est $y = \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{8}{3}$.
3. On lit sur le graphique l'ordonnée à l'origine de $D_3$ : $b = 1$.
   Lorsque l'on se déplace de 2 vers la droite, on monte de 1 : le coefficient directeur est $a = \dfrac{1}{2}$.
   L'équation de $D_3$ est : $y = \dfrac{1}{2}x + 1$
4. Le point d'intersection entre la droite $D_1$ et la droite $D_3$ est $(8, 5)$.

**Exercice 5.10.** Dans le repère ci-dessous, tracer la droite $D_1$ d'équation $y = 15x + 175$.

1. Tracer la droite $D_1$.
2. Donner l'équation de la droite $D_2$.
3. Calculer le point d'intersection des droites $D_1$ et $D_2$.




**Correction :**

2. Les points $A_2 = (15, 200)$ et $B_2 = (35, 700)$ sont sur la droite $D_2$. Le coefficient directeur est donnée par $a = \dfrac{700 - 200}{35 - 15} = \dfrac{500}{20} = 25$.
Comme $A_2$ est sur la droite : $200 = 15 \times 25 + b$ et donc $b = -175$.
l'équation de la droite est $y = 25x - 175$. Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} y = 15x + 175 \\ y = 25x - 175 \end{cases}$.
On a donc $15x + 175 = 25x - 175$, c'est à dire que $175 + 175 = 25x - 15x = 10x$.
De là on trouve $10x = 350$ et $x = 35$.
En remplaçant $x$ par 35 dans la première équation, on trouve : $y = 15 \times 35 + 175 = 700$

**Exercice 5.11.** Des amis organisent une fête et se partagent les dépenses. On sait que
— si chacun verse 15 euros, alors il manque 175 euros;
— si chacun verse 25 euro alors il y a 175 euros de trop.

Déterminer le nombre $x$ d'invités et le coût total de la soirée :

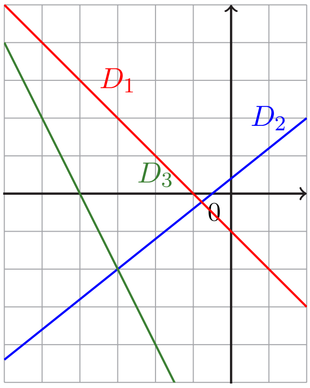
1. On écrira un système d'équations décrivant le problème précédent.
2. On utilisera l'exercice précédent

**Correction :**

D'après l'énoncé : $15 \times x = y - 175$ car il manque 175 euros lorsque chacun paye 15 euro. De la même manière, on a $25 \times x = y + 175$.
Cela revient à résoudre le système $\begin{cases} y = 15x + 175 \\ y = 25x - 175 \end{cases}$.
D'après l'exercice précédent on a $x = 35$ et $y = 20$.

**Exercice 5.12.** Dans le repère ci-dessous, la droite $D_1$ a pour équation $y = -x + 1$ et $D_2$ a pour équation $y = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$.

1. Dans le repère ci-dessous, tracer la droite $D_3$ ayant $-2$ comme coefficient directeur et passant par le point $A = (-4, 0)$.
2. Donner l'équation de $D_3$.
3. Écrire les deux équations du système $\begin{cases} -4x + 5y = 2 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$ sous forme d'équation **réduite** de droites.
4. Donner graphiquement une solution éventuelle du système
5. Vérifier par le calcul que le couple trouvé est bien une solution.
6. Le système $\begin{cases} y = -2x - 8 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ a-t-il une solution ? Pourquoi ? La calculer.




**Correction :**

**2.** $D_3$ passe par $(-4, 0)$ donc $0 = (-2) \times (-4) + b$. Donc $b = -8$ et $D_3$ a pour équation $y = -2x - 8$

**3.** $\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \\ y = -2x - 8 \end{cases}$

**3.** Une solution du système est donnée par l'intersection de $D_2$ et $D_3$. On lit sur le graphique $S = (-3, -2)$

**4.** On a d'une part $-4 \times (-3) + 5 \times (-2) = 12 - 10 = 2$ et le couple vérifie la première équation.
Par ailleurs $2 \times (-3) + (-2) = -6 - 2 = -8$ et le couple vérifie la seconde équation.

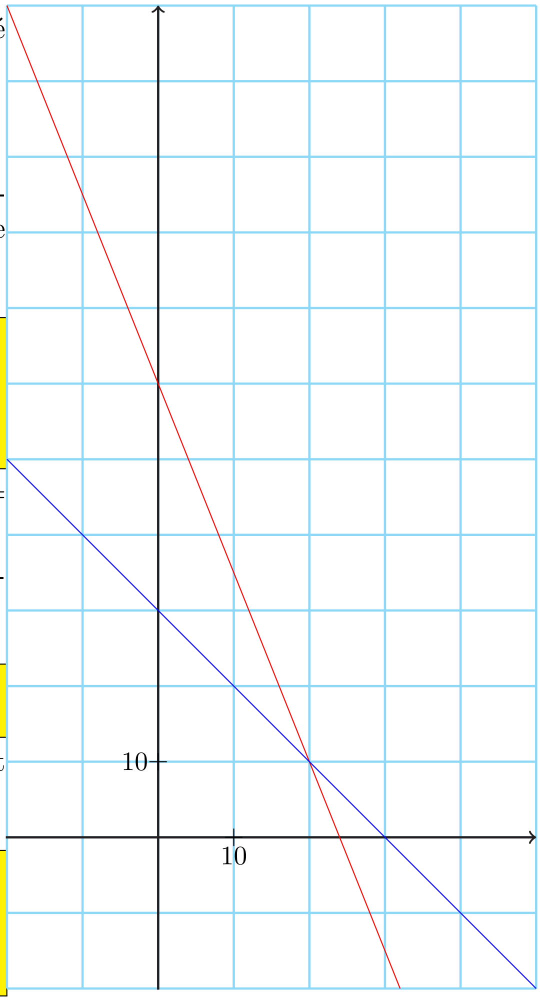
**5.** Le système $\begin{cases} y = -2x - 8 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ a une unique solution car les droites correspondantes sont sécantes (coefficient directeur différent. Solution $S = (-7, 6)$.

# Comme au Devoir 5

**Exercice 5.13.**

**Partie A**
Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm pour 10.

On considère le système (S) : $\begin{cases} 5x + 2y = 120 \\ x + y = 30 \end{cases}$




1. Écrire chaque équation du système précédent comme une équation réduite de droite de la forme $y = \cdots$.
   **Correction :**
   La première équation s'écrit : $y = \frac{1}{2}(120 - 5x) = -2,5x + 60$
   La seconde équation s'écrit sous la forme $y = 30 - x$
2. Tracer les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = -2,5x + 60$ et $y = -x + 30$.
3. Déterminer graphiquement le point d'intersection des deux droites.
   **Correction :**
   On lit sur le graphique : $x = 20$ et $y = 10$
4. Vérifier par le calcul que ce couple est bien solution du système.
   **Correction :**
   Pour $x = 20$ et $y = 10$, on calcule $5x + 2y = 5 \times 20 + 2 \times 10 = 100 + 20 = 120$. On calcule de même $x + y = 20 + 10 = 30$.

**Partie B** Dans une classe de 1ère de 30 élèves, 50% des filles et 20% des garçons sont demi-pensionnaires ce qui correspond à 12 élèves.
Déterminer le nombre $x$ de filles et le nombre $y$ de garçons (on utilisera pour cela partie A après avoir montré que le problème se ramène au système (S)).

**Correction :**
On cherche $x$ et $y$ tel que $x + y = 30$ car il y a 30 élèves dans la classe. Par ailleurs, comme il y a 12 élève demi-pensionnaire on doit avoir
$12 = \dfrac{50}{100}x + \dfrac{20}{100}y = 0,5x + 0,2y$. en multipliant cette dernière équation par 10 on obtient
$120 = 5x + 2y$. Les nombres $x$ et $y$ sont solutions du système (S). D'après la partie A, on a $x = 20$ filles et $y = 10$ garçons.

**Exercice 5.14.** Cet exercice est un questionnaire à choix multiples **(QCM)**.
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Entourer sur votre copie la réponse choisie et rayer les autres. **Aucune justification n'est demandée**.

1. Les droites d'équations $\mathcal{D}_1 : y = 0,5x - 1$ et $\mathcal{D}_2 : y = 0,5x + 1$ sont

   **a.** Parallèles non confondues **b.** Sécantes **c.** Confondues

   **Correction :**
   **a.** Parallèles non confondues

2. Les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation $y = 2x + 1$ et $y = -x + 1$ sont

   **a.** $(1, 0)$ **b.** $(0, 1)$ **c.** $(1, 1)$

   **Correction :**
   **b.** $(0, 1)$

3. Les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation $y = 2x - 1$ et $y = x + 1$ sont

   **a.** $(3, 2)$ **b.** $(2, 1)$ **c.** $(2, 3)$

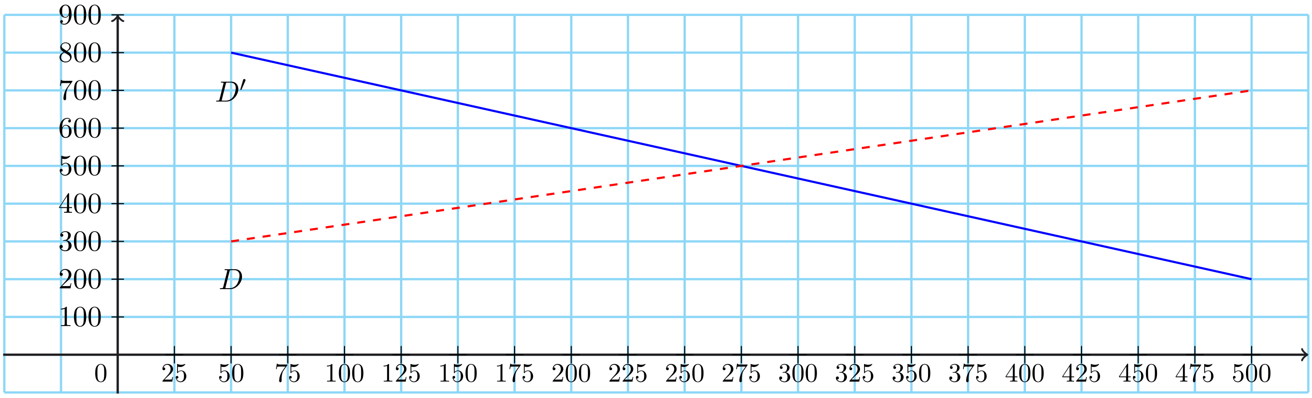
   **Correction :**
   **c.** $(2, 3)$

4. On admet que le système d'équations $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ x - 4y = 13 \end{cases}$ admet une unique solution. Il s'agit de

   **a.** $(3, -1)$ **b.** $(1, -3)$ **c.** $(1, 3)$

   **Correction :**
   **b.** $(1, -3)$

**Exercice 5.15.** Le graphique suivant représente l'offre (en pointillé rouge) et la demande (en bleu, droite pleine), pour un produit en fonction du prix à l'unité de ce produit (en euros).




1. Déterminer par lecture graphique les coordonnées de deux points $A$ et $B$ de la droite $D$.
   **Correction :**
   On lit par exemple $A = (50, 800)$ et $B = (500, 200)$.
2. En déduire l'équation de cette droite.
   **Correction :**

Le coefficient directeur est donné par $a = \dfrac{200-800}{500-50} = -\dfrac{4}{3}$.
On trouve l'ordonnée à l'origine en utilisant $800 = -\dfrac{4}{3} \times 50 + b$ soit $b = 800 + \dfrac{4}{3} \times 50 = \frac{2600}{3} \approx 866,667$
La droite a pour équation $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2600}{3}$.

3. Déterminer par lecture graphique les coordonnées de deux points $A'$ et $B'$ de la droite $D'$.
**Correction :**
On lit par exemple $A = (50, 300)$ et $B = (500, 700)$.

4. En déduire l'équation de cette droite.
**Correction :**
Le coefficient directeur est donné par $a = \dfrac{700-300}{500-50} = \dfrac{8}{9}$.
On trouve l'ordonnée à l'origine en utilisant $300 = \dfrac{8}{9} \times 50 + b$ soit $b = 300 - \dfrac{8}{9} \times 50 = \frac{2300}{9} \approx 255,556$.
La droite a pour équation $y = \frac{8}{9}x + \frac{2300}{9}$.

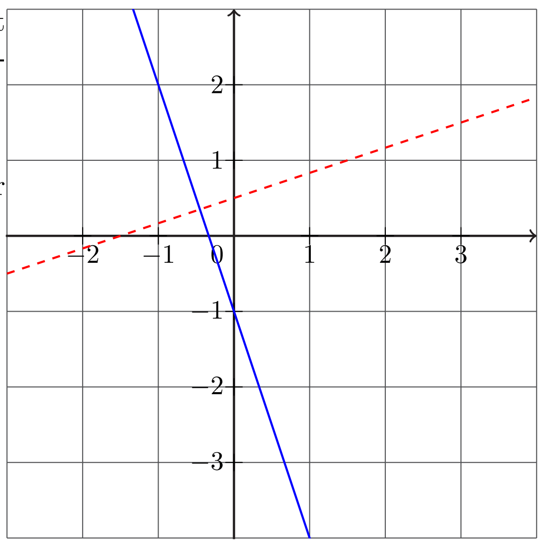
5. Déterminer par lecture graphique les coordonnées du point d'équilibre (quand l'offre est égale à la demande).
**Correction :**
D'après le graphique, le point d'intersection est $(275, 500)$

6. Vérifier par le calcul le résultat obtenu.
**Correction :**
On vérifie que le point $(275, 500)$ est bien sur chacune des droites. Pour cela on calcule pour la droite $D$ : $-\frac{4}{3} \times 275 + \frac{2600}{3} = 500$ et pour la droite $D'$ : $\frac{8}{9} \times 275 + \frac{2300}{9} = 500$.

7. Lire graphiquement les prix pour lesquels l'offre est inférieure à la demande.
**Correction :**
L'offre est inférieur à la demande pour les prix sont inférieurs à 275 euros

**Exercice 5.16.**

1. Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites.
2. En déduire l'équation correspondante.
3. Tracer sur le repère la droite qui passe par $(-1; -2)$ et a pour coefficient directeur 2



**Correction :**

On lit sur le graphique pour la droite $D_1$ (pleine) $b = -1$ et $a = -3$.
On lit sur le graphique pour la droite $D_2$ (pointillée) $b = 0.5$ et $a = \frac{1}{3}$ en utilisant les points $A = (0; 0,5)$ et $B = (3; 1,5)$.

# Chapitre 6
# **Dérivation**

23/01/2017

# Cours :

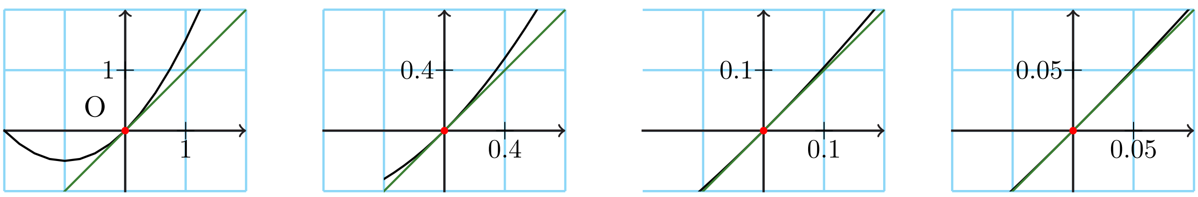
## 1 Tangentes

**Définition 1.** On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

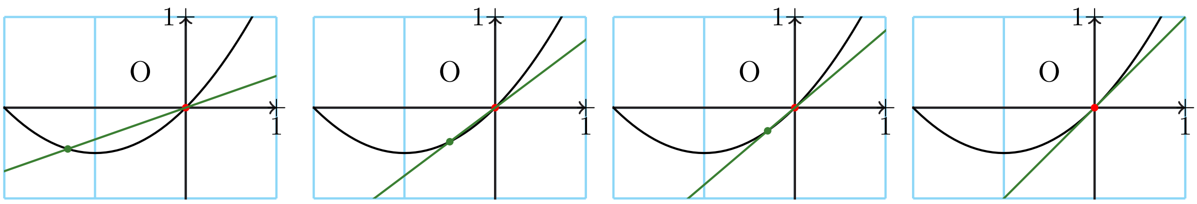
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(x, f(x))$ est la droite qui, autour du point $(x, f(x))$ :

— "touche le plus gentillement", qui *"effleure"* la courbe au point $(x, f(x))$.

— C'est la droite de meilleure *approximation* de la courbe au point $(x, f(x))$




*Remarque* 6. On peut aussi penser à la tangente comme la limite de droites sécantes à $\mathcal{C}_f$.



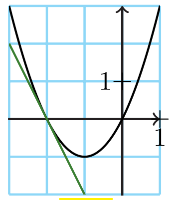

## 2 Nombre dérivé

**Définition 2.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

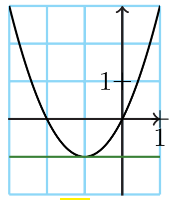
Si la courbe $\mathcal{C}$ admet en un point $(a; f(a))$ une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées ( *non verticale* ), on appelle *nombre dérivé* en $a$ le **coefficient directeur** de la *tangente* à $\mathcal{C}$ en $(a, f(a))$.

on le note $f'(a)$ .

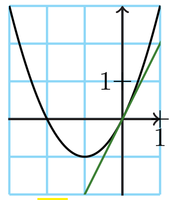
**Exemple 3.** On considères la courbe représentative de $x \mapsto x^2 + 2x$ en trois points :




$f'($ $-2$ $) =$ $-2$ .




$f'($ $-1$ $) =$ $0$ .

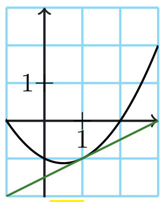



$f'($ $0$ $) =$ $2$ .

**Proposition 4.** Soit $f$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Si la tangente à $\mathcal{C}$ en $(a, f(a))$ n'est par verticale, elle a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Exemple 5.**




On lit sur le graphique :$f(1) =$ $-1$ et $f'($ $1$ $) =$ $\frac{1}{2}$ . On en déduit l'équation de la tangeante :

y= $\frac{1}{2} \times (x - 1) - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

## 3 Fonction dérivée

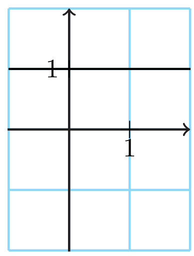
**Définition 6.** La fonction *dérivée* d'une fonction $f$ est la fonction qui a tout réel $x$ *associe* le nombre $f'(x)$ .

Cette fonction est notée $f'$

*Remarque* 7. Lorsqu'une fonction admet une fonction dérivée, on dit qu'elle est *dérivable*

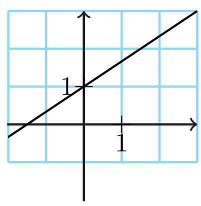
**Proposition 7.** Une fonction constante $f(x) = a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$

**Exemple 8.**
Pour $f(x) =$ $1$ :
La tangente en *n'importe quel point* est la droite elle-même.
Le *coeffcient directeur* de la tangente est toujours nul.
Donc $f'(x) = 0$ pour tout $x$.



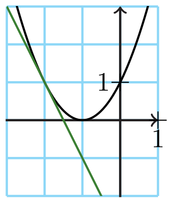

**Proposition 9.** Une fonction affine $f(x) = ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivé $f'(x) = a$

**Exemple 10.**
Pour $f(x) =$ $\frac{2}{3}x + 1$ :
La tangente en *n'importe quel point* est la droite elle-même.
Le *coeffcient directeur* de la tangente est toujours $\frac{2}{3}$ .
Donc $f'(x) = \frac{2}{3}$ pour tout $x$.

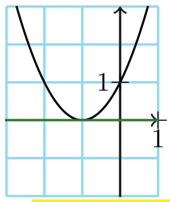


**Proposition 11.** Une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 2ax + b$

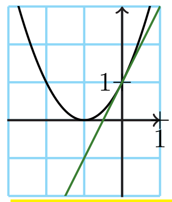
**Exemple 12.** Pour la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 1$, la dérivée vaut $f'(x) = 2x + 2$, on calcule :




$f'(-2) = 2 \times (-2) + 2 = -2$.




$f'(-1) = 2 \times (-1) + 2 = 0$.




$f'(0) = 2 \times 0 + 2 = 2$.

## 4 Lien avec le sens de variation

**Theorème 13.** $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
- Si, pour tout réel $x$ de $I$, $f'(x) > 0$ alors $f$ est strictement *croissante* sur $I$.
- Si, pour tout réel $x$ de $I$, $f'(x) < 0$ alors $f$ est strictement *décroissante* sur $I$.
- Si, pour tout réel $x$ de $I$, $f'(x) = 0$ alors $f$ est *constante* sur $I$.

*Remarque* 8. On utilisera en général cette propriété à l'aide d'un tableau :

| $x$ | $a$ | | $b$ |
|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | + | |
| Variations de $f$ | f(a) | $\nearrow$ | f(b) |

| $x$ | $a$ | | $b$ |
|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | - | |
| Variations de $f$ | f(a) | $\searrow$ | f(b) |

## 5 Fonctions polynomes de degré 3

**Définition 14.** La fonction *cube* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

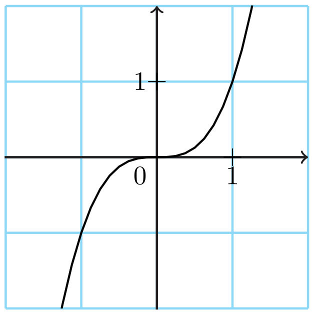
**Proposition 15.**

1. La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ est *dérivable* sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$.
2. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$.

3. Elle admet donc le tableau de variation suivant

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | $f(0)=0$ | $+\infty$ |

**Proposition 16.** La représentation graphique de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine




**Remarque :** Avec une calculatrice, on *utilise* la touche $\boxed{f(x)}$ (en haut à gauche) ; on rentre la fonction $x^3$ ,c'est à dire

$\boxed{\text{x}}$ puis $\boxed{\hat{}}$ puis $\boxed{3}$ ;

enfin la touche $\boxed{\text{graphe}}$ (haut à droite)

**Définition 17.** On appelle *fonction polynôme* du troisième degré toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels avec $a \neq 0$ .

**Exemple 18.**

— $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$ est un polynôme du troisième degré avec

$a =$ *4*, $b =$ *-3*, $c =$ *1*, $d =$ *2*.

— Montrer que $g(x) = x(x-1)(x+2)$ est un polynôme du troisième degré.

**Correction :**

On développe $g$ :
$g(x) = x(x-1)(x+2) = x(x^2+2x-x-2) = x(x^2+x-2) = x^3+x^2-2x.$

On a donc $a =$ *1*, $b =$ *1*, $c =$ *-2*, $d =$ *0*.

**Remarque :** Un polynôme du troisième degré s'appelle parfois simplement un *polynôme de degré* 3.

**Méthode :** Pour connaître les variations d'un polynôme de degré 3, on calcule d'abord sa fonction dérivée à l'aide de la formule ci-dessous

**Proposition 19.** Une fonction polynôme de degré 3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est déribable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3ax^3 + 2bx + c$$

**Rappel :**

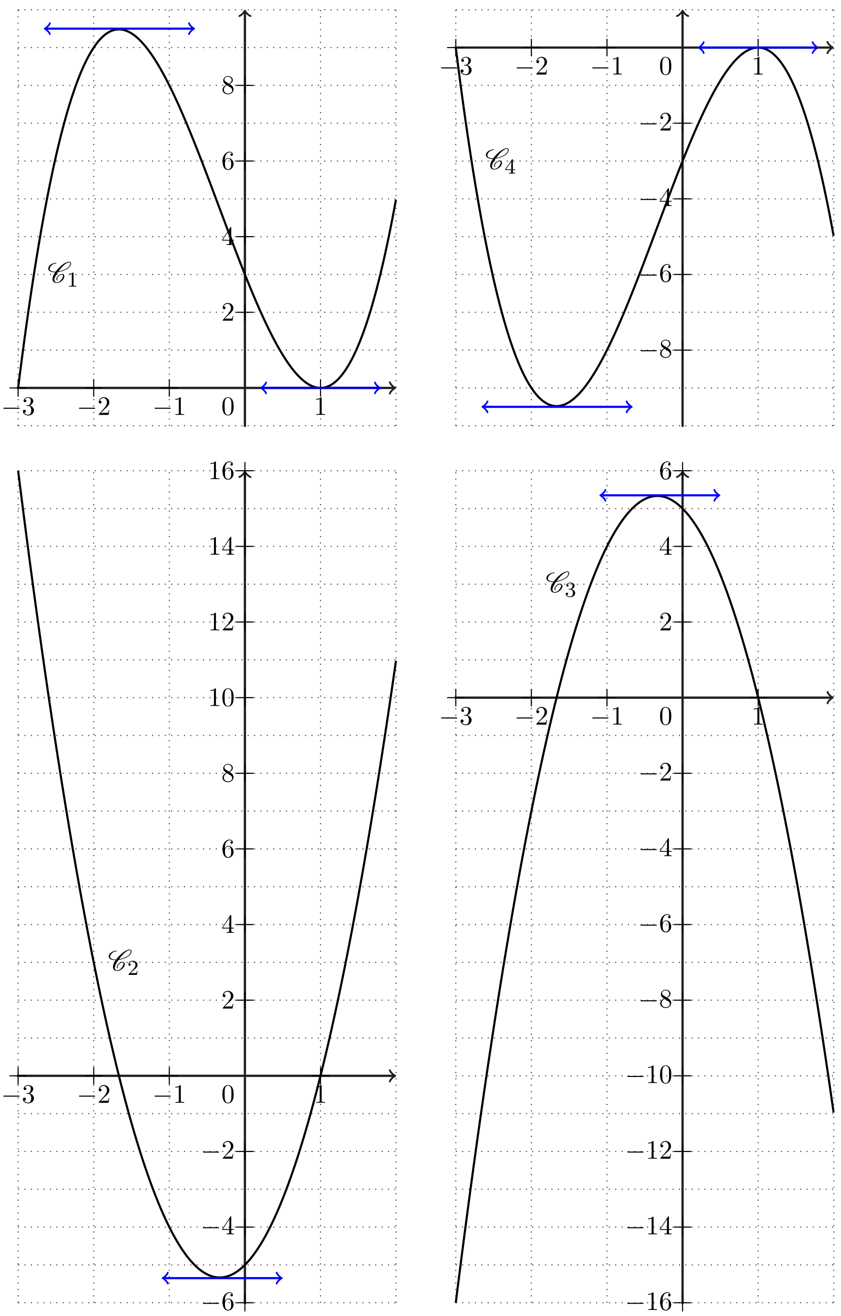
$$f(x) = ax^{2} + bx + c \qquad f(x) = ax^{3} + bx^{2} + cx + d$$

$$f'(x) = 2ax + b \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

# Exercices :

**Exercice 6.1.** Quatre fonctions $f_1, f_2, f_3$ et $f_4$ définies et dérivables sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, sont représentées respectivement par les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous.

On admet que $f_1\left(-\dfrac{5}{3}\right) \approx 9,5$, $f_2\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 0$, $f_3\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 0$ et $f_4\left(-\dfrac{5}{3}\right) \approx -9,5$.




1. Par lecture graphique, sans justifier :
   (a) Donner le tableau de **variation** de la fonction $f_1$.

   **Méthode :** Tableau avec des flèches : croissante (la courbe monte)– décroissante (la courbe descend)
   Colorier les parties correspondantes de deux couleurs différentes

**Correction :**

Dressons le tableau de variation de la fonction $f_1$.

| $x$ | $-3$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f_1$ | $0$ | $\nearrow$ | $\approx 9,5$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $5$ |

(b) Donner le tableau de **signes** de la fonction $f_2$.

**Méthode :** Tableau avec des signes : + (courbe au-dessus de l'axe horizontal) ou - (courbe au-dessous de l'axe horizontal)
Colorier les parties correspondantes de deux couleurs différentes

**Correction :**

Donnons le tableau de signes de la fonction $f_2$.

| $x$ | $-3$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f_2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(c) Donner le signe de $f_3'(-1)$, $f_3'$ étant la dérivée de la fonction $f_3$.

**Méthode :** $f'(x)$ : coefficient directeur (pente) de la tangeante. $f' > 0$ la courbe (ou la tangeante monte) – $f' < 0$ la courbe (ou la tangeante descend)
Tracer ("vaguement") la tangente

**Correction :**

Le signe de $f_3'(-1)$ est positif.

(d) Donner l'image de 2 par la fonction $f_4$.

**Correction :**

$f_4(2) = -5$.

2. Dans cette question, on considère la fonction $g$ définie sur $[-3\ ;\ 2]$ par

$$g(x) = (x-1)^2(x+3).$$

(a) Vérifier que $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

**Méthode :** On développe $(x-1)^2(x+3)$

**Correction :**

Vérifions que $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
On calcule :

$$\begin{aligned} g(x) =& (x-1)^2(x+3) = (x^2 - 2x + 1)(x+3) \\ =& x^3 - 2x^2 + x + 3x^2 - 6x + 3 = x^3 + x^2 - 5x + 3. \end{aligned}$$

On a donc bien $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

(b) Calculer $g'(x)$, $g'$ étant la dérivée de la fonction $g$.

**Méthode :** Pour $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,on a $g'(x) = 3ax^3 + 2bx + c$

**Correction :**

$g'$ étant la dérivée de la fonction $g$, déterminons $g'(x)$. $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

(c) Résoudre l'équation $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

**Méthode :** Ici on a $ax^2 + bx + c$. On calcule $\Delta = (b)^2 - 4 \times a \times c$ : puis

| $\Delta < 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|
| Pas de racine (solution) | $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |

Étudier le signe de $g'$ sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$. En déduire le tableau de variation de la fonction $g$.

**Méthode :**

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g$ | signe de $a$ | 0 | | 0 | signe de $a$ |

**Correction :**

Résolvons l'équation $3x^2 + 2x - 5 = 0$. Pour ce faire, calculons $\Delta$.
$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 4 + 60 = 64$. $\Delta > 0$, il existe donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{-2-8}{6} = -\dfrac{5}{3}$ $x_2 = \dfrac{-2+8}{6} = 1$. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\dfrac{5}{3}\ ;\ 1\right\}$.
Étudions le signe de $g'$ sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$ ainsi que les variations de $g$.

| $x$ | $-3$ | | $-\dfrac{5}{3}$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| Variations de $f_1$ | 0 | $\nearrow$ | $\approx 9,5$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 5 |

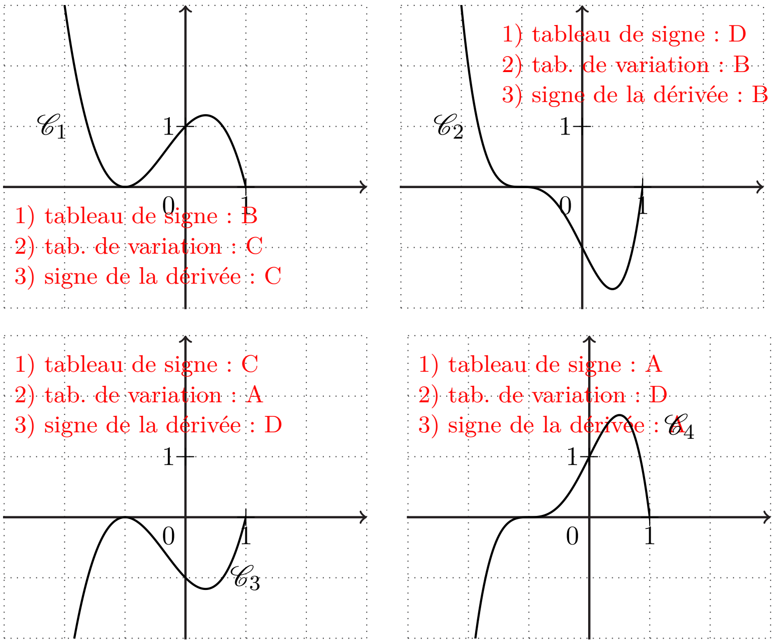
(d) Sachant que la fonction $g$ est l'une des quatre fonctions $f_1, f_2, f_3$ ou $f_4$ représentées ci-dessus, quelle est cette fonction ? Justifier la réponse.

**Correction :**

La fonction $g$ est la fonction $f_1$ représentée ci-dessus, car elles ont même sens de variation, leurs dérivées s'annulent deux fois ce qui exclut $f_2$ et $f_3$.
$g$ est d'abord croissante, ce qui exclut $f_4$.

# Exercices :

### Exercice 6.2.




Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$ ci-dessus représentent quatre fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$ définies et dérivables sur $[-2\ ;\ 1]$.

1. On donne ci-dessous les tableaux de signes de ces fonctions.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe | | - | 0 | + | 0 |

Tableau A

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe | | + | 0 | + | 0 |

Tableau B

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe | | - | 0 | - | 0 |

Tableau C

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe | | + | 0 | - | 0 |

Tableau D

Associer à chaque fonction son tableau de signes :

| Fonction | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Tableau de signes | B | D | C | A |

2. On donne ci-dessous les tableaux de variations de ces fonctions.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| Variations | ↗ | ↘ | ↗ | |

Tableau A

| $x$ | $-2$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| Variations | ↘ | ↗ | |

Tableau B

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| Variations | ↘ | ↗ | ↘ | |

Tableau C

| $x$ | $-2$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| Variations | ↗ | ↘ | |

Tableau D

Associer à chaque fonction son tableau de signe :

| Fonction | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Tableau de signes | C | B | A | D |

3. On donne ci-dessous les tableaux de signes des dérivées de ces fonctions.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de la dérivée | | + | 0 | + | 0 | - | |

Tableau A

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de la dérivée | | - | 0 | - | 0 | + | |

Tableau B

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de la dérivée | | - | 0 | + | 0 | - | |

Tableau C

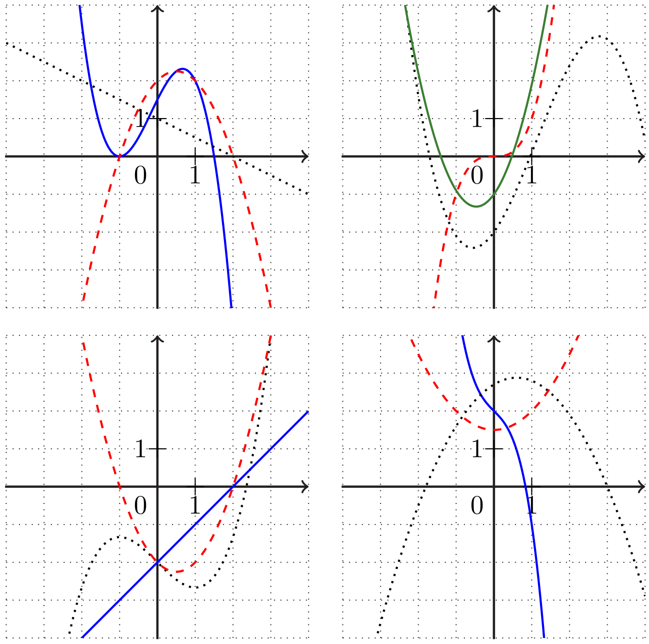
| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de la dérivée | | + | 0 | - | 0 | + | |

Tableau D

Compléter le tableau suivant à l'aide de la lettre a, b, c ou d qui convient :

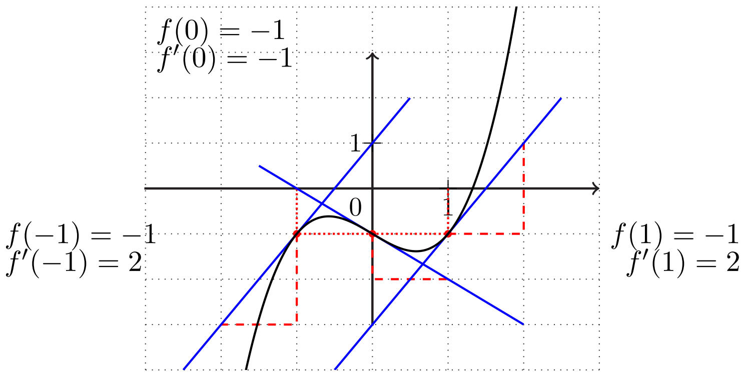
| Fonction | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Tableau des signes des dérivées | C | B | D | A |

**Exercice 6.3.** Sur les graphique suivant figures des tracés de courbes représentatives de fonctions polynôme de degrés 1, 2 ou 3.



Pour chaque graphique, déterminer le degrée de chaque polynôme.

**Exercice 6.4.** La courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[-2,2]$ est donné sur le graphique suivant. Les tangentes aux points d'abscisses $-1$, $0$ et $1$ sont aussi représentées.




1. Déterminer graphiquement $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ ainsi que $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer l'équation réduite de droite de chaque tangente

   **Méthode :** équation de la tangente en $(a, f(a))$ est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

   **Correction :**

   Tangente en $(-1,-1)$ : $y = 2(x-(-1)) - 1 = 2x + 1$
   Tangente en $(0,-1)$ : $y = -(x-0) - 1 = -x - 1$
   Tangente en $(1,-1)$ : $y = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$
   Rem. : On peut ici directement lire l'ordonnée à l'origine (le $b$)

# Rappel :

**Méthode :**

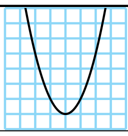
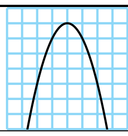
## Rappels **Polynôme du 2nd degré**

$f$ est un trinôme (polynôme) du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^2 + bx + c$

**À savoir par cœur :**

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

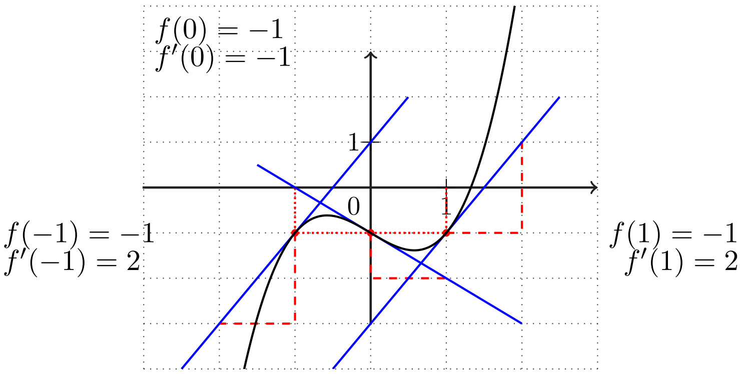
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_0 = \frac{-b}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

| | **a < 0** | **a > 0** |
|---|---|---|
| Variation de $f$ | $x$: $-\infty$ ; $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ; $+\infty$<br>$f$: ↗ Max ↘ | $x$: $-\infty$ ; $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ; $+\infty$<br>$f$: ↘ Min ↗ |
| aspect graphique |  |  |

| | **$\Delta < 0$** | **$\Delta = 0$** | **$\Delta > 0$** |
|---|---|---|---|
| Racines de $f$ | Pas de racines | $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{-b}{2a}$ | $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et<br>$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| Factori-sation | Pas de factorisation | $f(x) = a(x-x_0)^2$ | $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ |
| Signe de $f$ | **a > 0**<br>$x$: $-\infty$ ; $+\infty$<br>$f$: $+$ | **a > 0**<br>$x$: $-\infty$ ; $x_0$ ; $+\infty$<br>$f$: $+$ 0 $+$ | **a > 0**<br>$x$: $-\infty$ ; $x_1$ ; $x_2$ ; $+\infty$<br>$f$: $+$ 0 $-$ 0 $+$ |
| Signe de $f$ | **a < 0**<br>$x$: $-\infty$ ; $+\infty$<br>$f$: $-$ | **a < 0**<br>$x$: $-\infty$ ; $x_0$ ; $+\infty$<br>$f$: $-$ 0 $-$ | **a < 0**<br>$x$: $-\infty$ ; $x_1$ ; $x_2$ ; $+\infty$<br>$f$: $-$ 0 $+$ 0 $-$ |

# Exercices :

**Exercice 6.5.** La courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[-2, 2]$ est donné sur le graphique suivant. Les tangentes aux points d'abscisses $-1$, $0$ et $1$ sont aussi représentées.




1. Déterminer graphiquement $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ ainsi que $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer l'équation réduite de droite de chaque tangente
   **Méthode :** équation de la tangente en $(a, f(a))$ est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   **Correction :**
   Tangente en $(-1, -1)$ : $y = 2(x-(-1)) - 1 = 2x + 1$
   Tangente en $(0, -1)$ : $y = -(x-0) - 1 = -x - 1$
   Tangente en $(1, -1)$ : $y = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$
   Rem. : On peut ici directement lire l'ordonnée à l'origine (le $b$)

**Exercice 6.6.** On considère la fonction $g$, définie sur $[-2\ ;\ 1]$ par :

$$g(x) = (1-x) \times (x+1)^2.$$

1. Vérifier que $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.
   **Correction :**
   $g(x) = (1-x) \times (x+1)^2 = g(x) = (1-x)\left(x^2 + 2x + 1\right) = x^2 + 2x + 1 - x^3 - 2x^2 - x = -x^3 - x^2 + x + 1$.
2. Déterminer la dérivée $g'$ de $g$.
   **Correction :**
   $g'(x) = -3x^2 - 2x + 1$
3. Vérifier que $g'(x) = (x+1)(1-3x)$.
   **Correction :**
   $(x+1)(1-3x) = x - 3x^2 + 1 - 3x = -3x^2 - 2x + 1 = g'(x)$.
   On a bien $g'(x) = (x+1)(1-3x)$.
4. Étudier le signe de $g'$ sur $[-2\ ;\ 1]$.
   En déduire le tableau de variations de $g$.

   **Correction :**

$g'(x)$ s'annule pour $x=-1$ et pour $x=\dfrac{1}{3}$. On peut donc dresser un tableau de signes pour obtenir le signe de la dérivée. $g'$ est un polynôme du 2nd degré avec 2 racines et $a<0$. $g'(x)=-3x^2-2x+1=(x+1)(1-3x)$ : $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{1}{3}$

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{32}{27}$ | $\searrow$ | $0$ |

On calcule $g(-2)=3,\quad g(-1)=0,\ g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}$ et $g(1)=0$

**Exercice 6.7.** Pour chaque $f$ calculer $f'$ la fonction dérivée.

**Méthode :**

| fonction | $f(x)=a$ | $f(x)=ax+b$ | $f(x)=ax^2+bx+c$ | $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ |
|---|---|---|---|---|
| dérivée | $f'(x)=0$ | $f'(x)=a$ | $f'(x)=2ax+b$ | $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ |

1. $f(x)=-2x^2+3x-1$

   **Correction :**

   $f'(x)=2\times(-2)\times x+3=-4x+3$

2. $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-3x^2-1$

   **Correction :**

   $f'(x)=3\times\dfrac{4}{3}x^2-2\times 3x+0=4x^2-6x$

**Exercice 6.8. Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).** Aucune justification n'est demandée.

On donne le tableau de variations d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-10\ ;\ 14]$.

| $x$ | $-10$ | | $-3$ | | $5$ | | $14$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $2$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $-1$ |

1. On a :
   A) $f$ positive sur $[5\,;\,14]$ B) $f$ positive sur $[-10\ ;\ -3]$ C) $f$ négative sur $[-10\ ;\ 5]$

   Réponse B
2. On considère l'équation $f(x) = 0$. Sur l'intervalle $[-10\ ;\ 14]$
   A) elle n'admet aucune solution B) elle admet une unique solution C) on ne peut pas répondre

   Réponse B
3. On cherche à comparer $f(-1)$ et $f(1)$ :
   A) $f(-1) > f(1)$ B) $f(-1) < f(1)$ C) on ne peut pas répondre

   Réponse A) (la fonction est décroissante)
4. La courbe représentative de la fonction $f$ admet au point d'abscisse $-3$
   A) une tangente horizontale B) une tangente dont le coefficient directeur est négatif C) une tangente dont le coefficient directeur est positif

   Réponse A
5. Une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $-10$ est :
   A) $y = -10x + 2$ B) $y = x + 2$ C) $y = x + 12$

   Réponse C
6. Une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 5 est :
   A) $y = -4$ B) $x = -4$ C) $y = 0$

   Réponse A

# Exercices :

**Exercice 6.9.** On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 2{,}5]$.

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

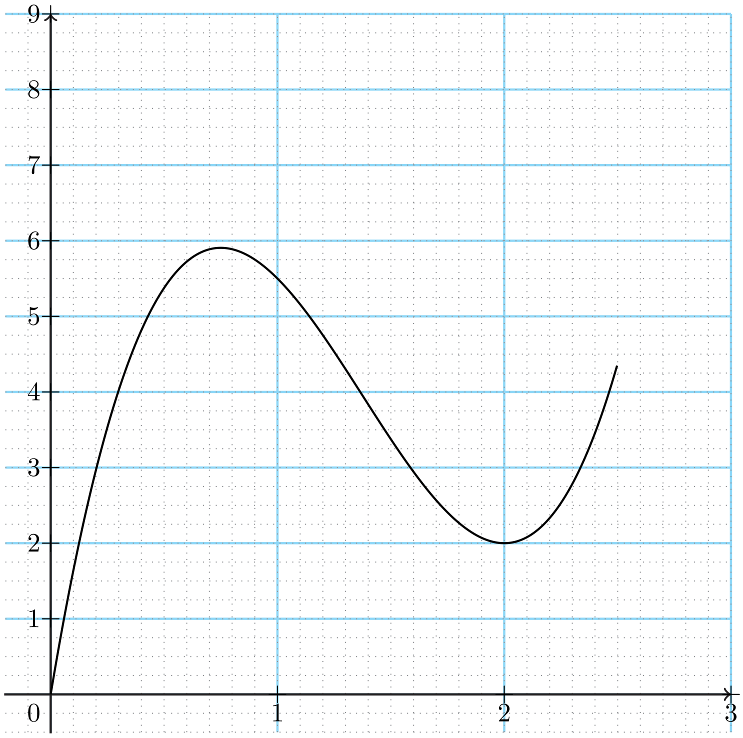
On donne **ci-dessous**, la courbe représentative de la fonction $f$, appelée $\mathcal{C}$, dans un repère orthogonal. La courbe $\mathcal{C}$ possède les propriétés suivantes :

— la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1\ ;\ 5{,}5)$ ;

— la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $B(2\ ;\ 2)$ ;

— la tangente en $B$ à la courbe $\mathcal{C}$ est horizontale ;

— la tangente en $A$ à la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $T(0\ ;\ 8{,}5)$.




1. Placer les points $A$, $B$ et $T$ et tracer les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ en $A$ et $B$.
2. Déterminer $f(1)$, $f(2)$ et $f'(1)$.
3. Donner par lecture graphique une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 3$.
4. Justifier que $f'(2) = 0$. Donner par lecture graphique une valeur approchée de la deuxième solution de l'équation $f'(x) = 0$.

**Exercice 6.10.** La fonction $f$ dont on a étudier la courbe $\mathcal{C}$ à l'exercice précédent est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2{,}5]$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 16{,}5x^2 + 18x.$$

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant à l'aide de la calculatrice.

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**Correction :**

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 5,375 | 5,5 | 3,375 | 2 | 4,375 |

2. (a) Calculer $f'(x)$.

**Correction :**
$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 16,5 \times 2x + 18 = 12x^2 - 33x + 18$

(b) Montrer que : $f'(x) = (12x - 24)(x - 0{,}75)$.

**Correction :**
$(12x-24)(x-0,75) = 12x^2 - 24x - 12 \times 0,75x + 24 \times 0,75 = 12x^2 - 33x + 18 = f'(x)$

(c) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2{,}5]$ à l'aide d'un tableau de signe.

**Correction :**

| $x$ | 0 | | 0.75 | | 2 | | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | $-$ | 0 | + | |
| Variations de $f$ | 0 | $\nearrow$ | $\simeq 5.91$ | $\searrow$ | 2 | $\nearrow$ | 4.375 |

3. En déduire le tableau de variations de $f$.

**Exercice 6.11. Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).** Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction $f$ définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = -x^3 + 2x + 1$. La courbe représentative de $f$ dans un repère est notée $\mathcal{C}$.

1. Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $-1$ a pour ordonnée

A) 0 ; B) 2 ; C) 3 D) 4

Réponse A

2. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-1$ vaut

A) on ne peut pas répondre B) 5 C) $-1$ D) 0

Réponse C : car $f'(x) = -x^2 + 2$

3. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-1$ est

A) $y = -x + 1$ B) $y = -x - 1$ C) $y = x - 1$ D) $y = 0$

Réponse B) (coefficient directeur $-1$ et passe par $(-1; 0)$)

4. La courbe représentative de la fonction $f$ admet au point d'abscisse 0

   A) une tangente horizontale B) une tangente dont le coefficient directeur est négatif C) une tangente dont le coefficient directeur est positif

   Réponse C

5. $f'(1)$ vaut

   A) 0 B) 1 C) 5 D) $-1$

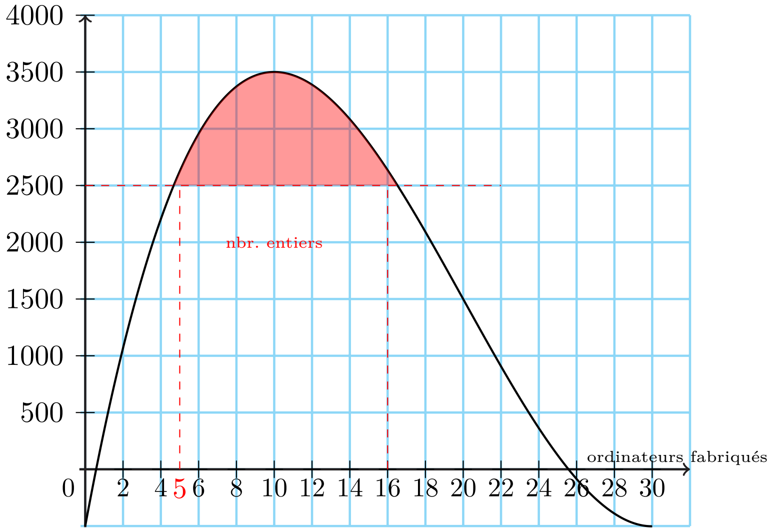
   Réponse D

# Exercices :

œ

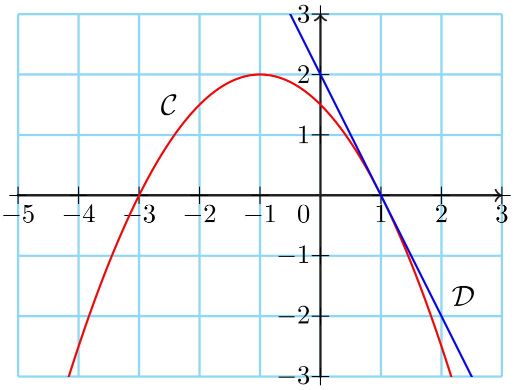
**Exercice 6.12.** Une entreprise fabrique et vend des ordinateurs.

La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous représente l'évolution du bénéfice en fonction du nombre d'ordinateurs fabriqués et vendus en une journée suivant le modèle choisi par l'entreprise.




1. Par lecture graphique, déterminer combien l'entreprise doit fabriquer et vendre d'ordinateurs en une journée si elle veut un bénéfice d'au moins 2 500 €.
   **Correction :**
   Les solutions devant être entières, l'entreprise doit fabriquer et vendre entre 5 et 16 ordinateurs par jour.
2. Une grande surface veut acheter des ordinateurs. Elle propose au choix deux contrats à cette entreprise :
   — contrat A : acheter 300 ordinateurs à fabriquer en dix jours ;
   — contrat B : acheter 100 ordinateurs à fabriquer en cinq jours.
   Quel contrat l'entreprise a-t-elle intérêt à choisir ? (Justifier votre réponse).
   **Correction :**
   L'entreprise a intérêt à choisir le contrat B. En effet si elle choisit le contrat A, cela l'obligera à fabriquer trente ordinateurs par jour et perdra par jour 500 euros, tandis qu'avec, le contrat B, elle fabriquera 20 ordinateurs par jour et ainsi elle gagnera 1 500 euros par jour.

**Exercice 6.13.** La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $g$ définie sur $[-4\ ;\ 2]$ et la droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.




1. L'équation $g(x) = 0$ a pour solution(s) :
   A. 1,5 B. $-1$ C. $-3$ et 1

   **Correction :**
   Réponse : C abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses

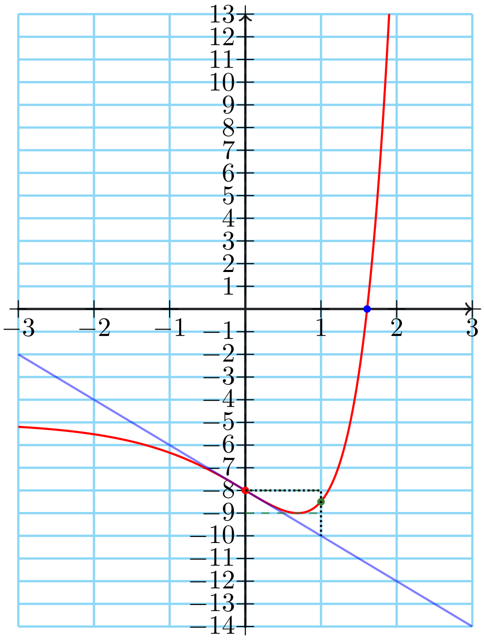
2. L'inéquation $g(x) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :
   A. $[-4\ ;\ -1]$ B. $[-3\ ;\ 1]$ C. $[0\ ;\ 2]$

   **Correction :**
   Réponse B : intervalle pour lequel les points de la courbe sont situés sur ou au dessus de l'axe des abscisses

3. On note $g'$ la fonction dérivée de $g$. On a :
   A. $g'(1) = -2$ B. $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$ C. $g'(1) = 2$

   **Correction :**
   Reponse A : $g'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de $f$. La droite passe par $(1\,;\,0)$ et $(0\,;\,2)$

**Exercice 6.14.** Le plan est muni d'un repère.
On donne ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$, qui représente une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.
A et B sont les points de coordonnées respectives $\mathrm{A}(-2\ ;\ -4)$ et $\mathrm{B}(0\ ;\ -8)$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.




1. Déterminer $f(0)$.
   **Correction :**
   On lit sur le graphique $f(0) = -8$
2. Donner un encadrement de $f(1)$ par deux entiers consécutifs.
   **Correction :**
   On a $-9 \leqslant f(1) \leqslant -8$
3. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ ? Justifier.
   **Correction :**
   L'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une solution sur l'intervalle $[-3; 4]$ car la courbe ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses
4. Que vaut $f'(0)$ ? Justifier.
   **Correction :**
   On a $f'(0) = -2$ car $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en 0.

# Exercices :

**Exercice 6.15.** Pour chaque $f$ calculer $f'$ la fonction dérivée.

**Méthode :**

| fonction | $f(x)=a$ | $f(x)=ax+b$ | $f(x)=ax^2+bx+c$ | $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ |
|---|---|---|---|---|
| dérivée | $f'(x)=0$ | $f'(x)=a$ | $f'(x)=2ax+b$ | $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ |

1. $f(x)=\dfrac{13}{25}x+\pi$

   **Correction :**

   $f'(x)=\dfrac{13}{25}$

2. $f(x)=-2x^2-1$

   **Correction :**

   $f'(x)=-2\times 2x=-4x$

3. $f(x)=x^3+1,5x^2-10x+5$

   **Correction :**

   $f'(x)=3x^2+2\times 1,5x-10=3x^2+3x-10$

4. $f(x)=-5x^3+4x^2-x+20$

   **Correction :**

   $f'(x)=-15x^2+8x-1$

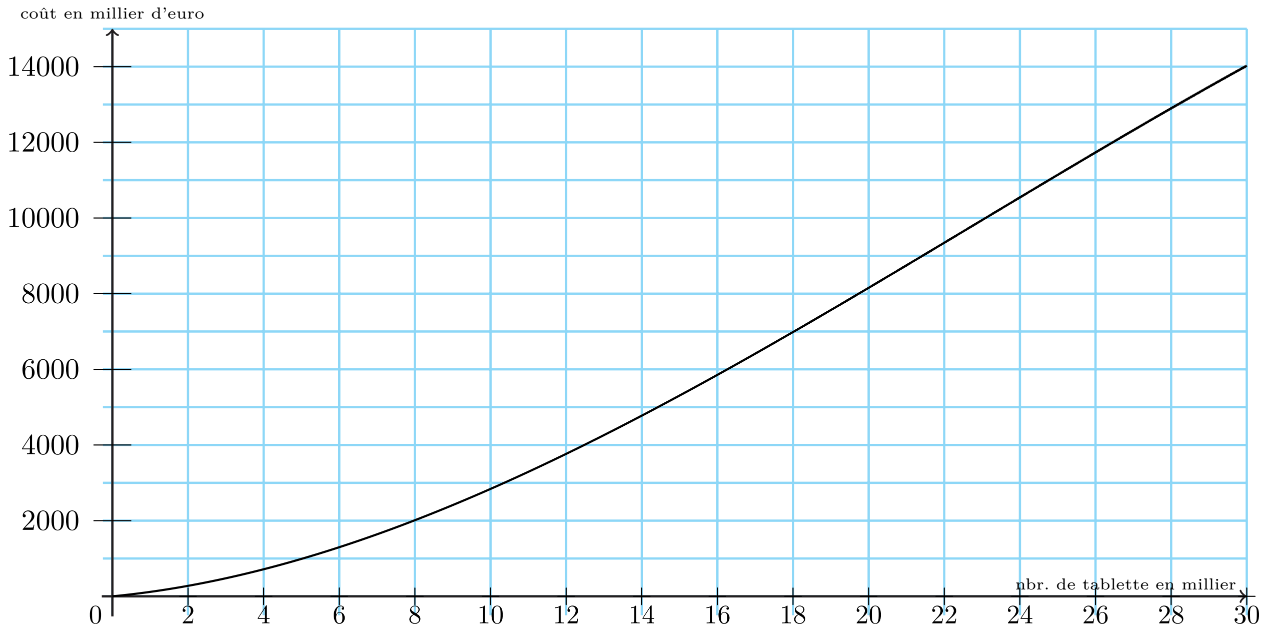
**Exercice 6.16.** Une entreprise produit des tablettes tactiles avec un maximum de production de 30 000 unités par mois.

Soit $x$ le nombre de milliers de tablettes produites.

Le coût de production en milliers d'euros est modélisé par la fonction $C$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par : $C(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+22x^2+96x$.

Chaque tablette est vendue 480 euros et on suppose que l'entreprise écoule toute sa production mensuelle. On souhaite étudier la rentabilité de cette entreprise.

La représentation graphique de la fonction $C$ est donnée ci-dessus.



**Partie A** Lecture graphique

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût de production en milliers d'euros de 10 milliers de tablettes.
   **Correction :**
   Avec la précision permise par le graphique, le coût de production en milliers d'euros de 10 milliers de tablettes est d'environ 2 800 milliers d'euros. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 10.
2. Déterminer, par lecture graphique, pour combien de tablettes produites, le coût sera supérieur à 8 000 milliers d'euros.
   **Correction :**
   Avec la précision permise par le graphique, le coût sera supérieur à 8 000 milliers d'euros pour un nombre de tablettes produites comprises entre 20 et 30. L'intervalle est déterminé à partir de l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 8\,000$.
3. La fonction $R$ définie par $R(x) = 480x$ représente la recette en milliers d'euros pour $x$ milliers de tablettes produites.
   Sa courbe représentative est tracée dans le repère.

**Partie B** Étude du bénéfice

1. Montrer que le bénéfice de l'entreprise sera alors donné par la fonction $B$ définie sur l'intervalle $[0\,;\ 30]$ par :
$$B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + 384x.$$
   **Correction :**
   Calculons le bénéfice de l'entreprise. Le bénéfice étant la différence entre les recettes et les coûts, nous obtenons donc
   $B(x) = R(x) - C(x) = 480x - \left(-\frac{1}{3}x^3 + 22x^2 + 96x\right) = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + (480 - 96)x = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + 384x.$
   Le bénéfice de l'entreprise est bien donné par la fonction $B$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par :
   $B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + 384x.$
2. On note $B'$ la fonction dérivée de la fonction $B$. Calculer $B'(x)$.
   **Correction :**
   $B'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) - 22(2x) + 384 = x^2 - 44x + 384.$
3. Résoudre l'équation du second degré $x^2 - 44x + 384 = 0$.
   **Correction :**

Résolvons l'équation du second degré $x^2 - 44x + 384 = 0$.
Calculons le discriminant $\Delta$. $\Delta = (-44)^2 - 4 \times 1 \times 384 = 400 = 20^2$.
$\Delta$ étant positif, le trinôme admet deux racines
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{44-20}{2} = 12$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{44+20}{2} = 32$
L'ensemble solution de l'équation est $\{12 \ ; \ 32\}$.
Nous pouvons alors écrire $x^2 - 44x + 384 = (x-12)(x-32)$.

4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,30]$. Dresser le tableau de variation de la fonction $B$.

**Correction :**

Déterminons le signe de $B'(x) = (x-12)(x-32)$ sur l'intervalle $[0\,;\,30]$.

| $x$ | 0 | | 12 | | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-12$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x-32$ | | $-$ | | $-$ | |
| $B'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

Dressons maintenant le tableau de variation de $B$ sur $[0\,;\,30]$.

| $x$ | 0 | | 12 | | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $B'$ | | $+$ | 0 | - | |
| Variations de $B$ | 0 | ↗ | 2016 | ↘ | 720 |

5. Donner la production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice.

**Correction :**

La production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal est de 12 000 tablettes par mois. La valeur de ce bénéfice s'élèverait alors à 2 016 milliers d'euros.

# Exercices :

**Exercice 6.17.** Un artisan fabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine. On suppose que tout objet fabriqué est vendu.

Le coût de production de $x$ dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction $f$, définie sur l'intervalle $[0\,;\;7]$. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.

1. (a) Par lecture graphique, donner le coût de production de 50 objets.
   **Correction :**
   Le coût de fabrication par lecture graphique est 3,8 milliers soit 3 800 euros : on lit l'ordonnée du point d'abscisse 5.

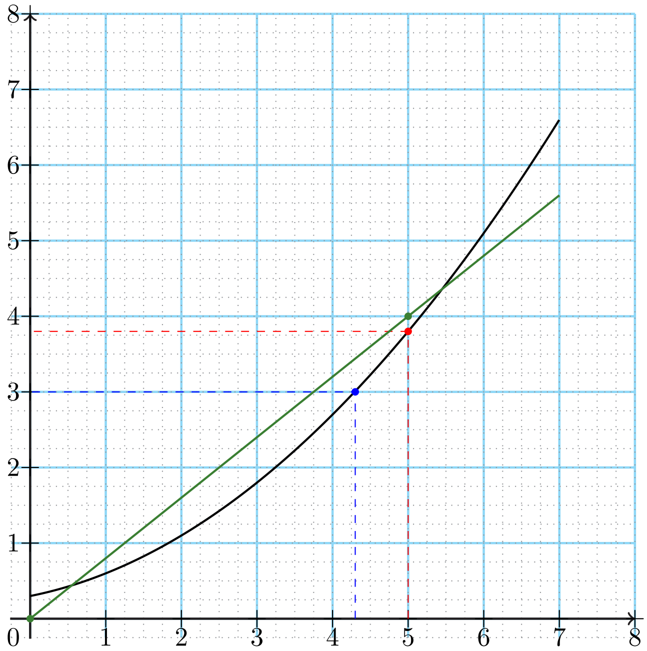
   (b) Par lecture graphique, donner le nombre d'objets produits pour un coût de 3 000 euros.
   **Correction :**
   Le nombre d'objets fabriqués pour un coût de 3 000 euros est 43 on lit l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 3 000 on trouve 4,3 (en dizaine)

2. Chaque objet est vendu 80 euros. On note $g(x)$ la recette obtenue par la vente de $x$ dizaines d'objets, en milliers d'euros.

   (a) Justifier que $g(x) = 0,8x$.
   **Correction :**
   Si chaque objet est vendu 80 euros, une dizaine d'objets sera vendue 10 fois plus soit 800 euros donc 0,8 millier d'euros et $x$ dizaines, $x$ fois plus donc $\boxed{g(x) = 0,8x}$

   (b) Tracer dans le repère de l'annexe la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,8x$.
   **Correction :**
   On choisit et calcul deux points de la droite : $(0;0)$ et le point $A(5\ ;\ 0,8 \times 5)$, c'est à dire $A(5\ ;\ 4)$

   (c) Par lecture graphique, déterminer à quel intervalle doit appartenir $x$ pour que l'artisan réalise un bénéfice.
   **Correction :**
   Pour que l'artisan réalise un bénéfice, il faut que la courbe représentative de $f$ (celle des coûts) soit en-dessous de la courbe représentative de $g$ (celle des recettes) on lit [0,5 ; 5,5].


0
1
2
3
4
5
6
7
8
1
2
3
4
5
6
7
8

**Exercice 6.18.** On admet que la fonction $f$ de l'exercice précédent est définie, pour $x$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, par

$$f(x) = 0,1x^2 + 0,2x + 0,3.$$

Le bénéfice réalisé par la production et la vente de $x$ dizaines d'objets en milliers d'euros, est modélisé par une fonction $B$ définie sur l'intervalle $[0\,;\ 7]$.

1. Montrer que $B(x) = -0,1x^2 + 0,6x - 0,3$.
**Correction :**
le bénéfice étant la recette moins les coûts donc $B(x) = g(x) - f(x)$
$$B(x) = 0,8x - (0,1x^2 + 0,2x + 0,3) = -0,1x^2 + 0,6x - 0,3$$
2. Calculer la dérivée $B'$ de la fonction $B$.
**Correction :**
Dérivons la fonction $B$. Comme la dérivé de $ax^2 + bx + c$ est $2ax + b$ on a :
$$B'(x) = -2 \times 0,1 \times x + 0,6 = -0,2x + 0,6$$
3. Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est-il maximum ?
**Correction :**
Il s'agit de comprendre les **variations** de $B$ ! :
Option 1 – variation du trinôme
Option 2 – Dérivé et tableau de signe **Option 1 : Variation du trinôme :** La fonction $B$ est un polynôme du second degré ($a = -0,1$, $b = 0,6$, $c = -0,3$.
Elle admet un maximum ($a = -0,1 < 0$) pour $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(0,6)}{-0,2} = 3$.
**Option 2 : Dérivée :** La dérivé de $B$ vaut $B'(x) = -0,2x + 0,6$, elle s'annule pour $-0,2x = -0,6$ ; c'est a dire en $x = \dfrac{-0,6}{-0,2} = 3$.
On a donc

| $x$ | 0 | | 3 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $B'$ (option 2) | | + | 0 | - | |
| Variations de $B$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Le bénéfice est maximum pour 3 dizaine d'objets, soit 30 objets

**Exercice 6.19.** Une entreprise, qui fabrique et vend des ordinateurs sur commande, modélise le bénéfice en euros pour $x$ ordinateurs fabriqués et vendus en une journée, par la fonction :

$$f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x - 500.$$

L'entreprise ne pouvant construire plus de 30 ordinateurs par jour, on aura $0 \leqslant x \leqslant 30$.

1. Calculer le bénéfice pour 4 puis pour 10 ordinateurs.
**Correction :**
$f(4) = 4^3 - 60 \times 4^2 + 900 \times 4 - 500 = 2\,204$, $\quad f(10) = 3\,500$.
Le bénéfice pour 4 ordinateurs est de 2 204 euros et pour 10 ordinateurs de 3 500 euros.

2. Calculer $f'(x)$, où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.
**Correction :**
Calculons $f'(x)$, où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.
$f'(x) = 3x^2 - 60(2x) + 900 = 3x^2 - 120x + 900 = 3(x^2 - 40x + 300)$.

3. Dresser, après avoir étudié le signe de $f'$, le tableau de variation de $f$.
**Correction :**
Avant d'étudier le signe de $f'(x) = 3x^2 - 120x + 900 = 3(x^2 - 40x + 300)$, trouvons les racines.
$\Delta = 40^2 - 4 \times 300 = 400$ $\quad \Delta > 0$ le trinôme admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{40 - \sqrt{400}}{2} = 10 \quad x_2 = \dfrac{40 + 20}{2} = 30$.
(d'où par conséquent $f'(x) = 3(x - 10)(x - 30)$).

| $x$ | 0 | | 10 | | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $B'$ | | + | 0 | - | 0 |
| Variations de $B$ | | ↗ | | ↘ | |

4. En déduire combien d'ordinateurs l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour pour avoir un bénéfice maximal. Donner ce bénéfice.
**Correction :**
Pour avoir un bénéfice maximal, l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour 10 ordinateurs. Le bénéfice s'élèvera alors à 3 500 euros.

# Exercices :

**Exercice 6.20.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 7x + 6$.

1. $f(-1)$ est égal à **a.** 2 **b.** $-4$ **c.** 10

   **Correction :**

   Réponse b. : on remplace $x$ par $-1$ et on calcule.

2. Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$, on a

   **a.** $f'(x) = -6x + 7$ **b.** $f'(x) = -6x + 13$ **c.** $f'(x) = -2x + 7$

   **Correction :**

   Réponse a. : Comme $f(x) = ax^2 + bx + c$, on utilise la formule $f'(x) = 2 \times ax + b$.

3. Sachant que $f'(-1) = 13$, une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $-1$ est :

   **a.** $y = 13x + 9$ **b.** $y = 13x - 1$ **c.** $y = -x + 13$

   **Correction :**

   Réponse a. : L'équation est donnée par $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = 13(x + 1) + (-4) = 13x + 9$

4. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 vaut

   **a.** 13 **b.** 7 **c.** 6

   **Correction :**

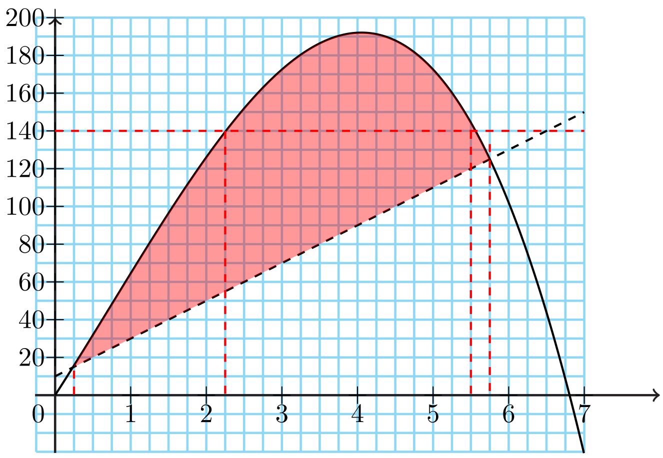
   Réponse b. : $f'(0) = -6 \times 0 + 7 = 7$

**Exercice 6.21.** Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de produits fabriqués exprimé en centaines d'unités.

On admet que la fabrication est comprise entre 0 et 700 unités.

Les recettes et les coûts sont exprimés en milliers d'euros.



### Partie A lecture graphique

Répondre aux questions suivantes en vous aidant du graphique.

1. Combien faut-il fabriquer de produits pour avoir une recette égale à 140 000 euros ?
   **Correction :**
   Graphiquement, on trouve que pour avoir une recette de 140 000 €, il faut fabriquer environ 2,25 centaines d'objets donc **225 objets** ou environ 5,5 centaines, soit environ **550 objets**.
2. Combien de produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice positif ou nul ?
   **Correction :**
   Le bénéfice est positif ou nul tant que la recette est supérieure ou égale aux coûts ; donc les abscisses (les "$x$") pour lesquels la courbe des recettes est au-dessus de la courbe des coûts.
   On trouve que $x$ doit être compris approximativement entre 0,25 et 5,75 ; il faut donc fabriquer **entre 25 et 575 objets**.

### Partie B étude du bénéfice

On modélise :

- les recettes par la fonction $R$ définie sur $[0\,;\,7]$ par
$$R(x) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x,$$
- les coûts par la fonction $C$ définie sur $[0\,;\,7]$ par
$$C(x) = 20x + 10.$$

1. Calculer la recette et le coût pour 300 produits fabriqués.
   **Correction :**
   300 produits fabriqués correspondent à $x = 3$.
   $R(3) = 172,5$ et $C(3) = 70$.
   La recette correspondant à 300 objets est de **172,5 milliers d'euros** et le coût est de **70 milliers d'euros**.
   En déduire le bénéfice correspondant.
   **Correction :**
   Le bénéfice correspondant est donc de **102,5 milliers d'euros**.
2. On note $B$ la fonction bénéfice.
   Donner l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.
   **Correction :**
   Pour tout $x$, on a :
   $B(x) = R(x) - C(x) = \left(-2x^3 + 4,5x^2 + 62x\right) - (20x + 10) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x - 20x - 10 =$
   $B(x) = \boxed{-2x^3 + 4,5x^2 + 42x - 10}$.
3. Vérifier que $B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$ où $B'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $B$.
   **Correction :**
   $B'(x) = -2 \times 3x^2 + 4,5 \times 2x + 42 = \boxed{-6x^2 + 9x + 42}$.

4. Étudier le signe de $B'(x)$. Donner le tableau de variations de $B$.
**Correction :**
$B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$ est un polynôme du second degré.
Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = -6$, $b = 9$ et $c = 42$.
$\Delta = 9^2 - 4 \times (-6) \times 42 = 1\,089 = 33^2$.
Les deux solutions de l'équation $B(x) = 0$ sont
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 + 33}{-12} = -2$
$x_2 = \dfrac{-b + -\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 - 33}{-12} = \dfrac{42}{12} = \dfrac{7}{2} = 3,5.$
On en déduit le signe de $B'(x)$ $(a = -6 < 0)$ et les variations de $B$ . $(x_1 = -2$, $x_2 = 3.5)$

| $x$ | 0 | | 3.5 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $B'$ | | + | 0 | - | |
| Variations de $B$ | $-10$ | ↗ | 106.375 | ↘ | $-181.5$ |

5. En déduire la valeur du bénéfice maximal ainsi que le nombre de produits à fabriquer pour l'obtenir.
**Correction :**
Le bénéfice est maximal pour **350 objets fabriqués** et vaut **106375 euros.**

# Comme au Devoir 6

**Exercice 6.22.** $f$ est une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 30x - 72$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère et $f'$ la fonction dérivée de $f$.

$a =$ , $b =$ , $c =$

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel $x$.
**Correction :**
$f'(x) = -6x + 30$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
**Correction :**
On a $f'(x) \geqslant 0$ pour $-6x + 30 \geqslant 0$ c'est à dire pour $-6x \geqslant -30$. On trouve $x \leqslant \dfrac{-30}{-6} = 5$

| $x$ | $-\infty$ | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-6x+30$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

3. Établir le tableau de signe de $f'$ et le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**Correction :**

| $x$ | $-\infty$ | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-6x+30$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| Var. de $f(x)$ | | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | |

4. La fonction $f$ admet-elle un minimum ou un maximum ? Si oui pour quelle valeur de $x$ ?
**Correction :**
La fonction admet un maximum pour $x = 5$ qui vaut $f(5) = 3$

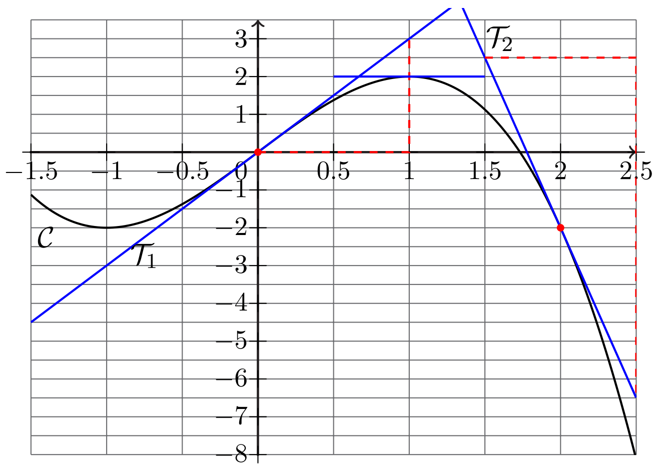
5. On note $D_1$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4. Calculer $f(4)$ et $f'(4)$.
**Correction :**
On calcule $f(4) = -3 \times 4^2 + 30 \times 4 - 72 = 0$.
$f'(4) = -6 \times 4 + 30 = 6$.
Donner l'équation de $D_1$
**Correction :**
L'équation de $D_1$ est donnée par
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 6(x-4) + 0 = 6x - 24$

6. On note $D_2$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 7. Calculer $f(7)$ et $f'(7)$.
**Correction :**
On calcule $f(7) = -3 \times 7^2 + 30 \times 7 - 72 = -9$.
$f'(4) = -6 \times 7 + 30 = -12$.
Donner l'équation de $D_1$
**Correction :**
L'équation de $D_2$ est donnée par
$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) = -12(x-7)-9 = -12x-12\times(-7)-9 = -12x+75$.

**Exercice 6.23.** On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-1{,}5\ ;\ 2.5]$. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$. On donne ci-dessous la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction $f$ dans un repère du plan.

La courbe $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(1\ ;\ 2)$.

La droite $T_1$ est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. La droite $T_2$ est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2. La tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



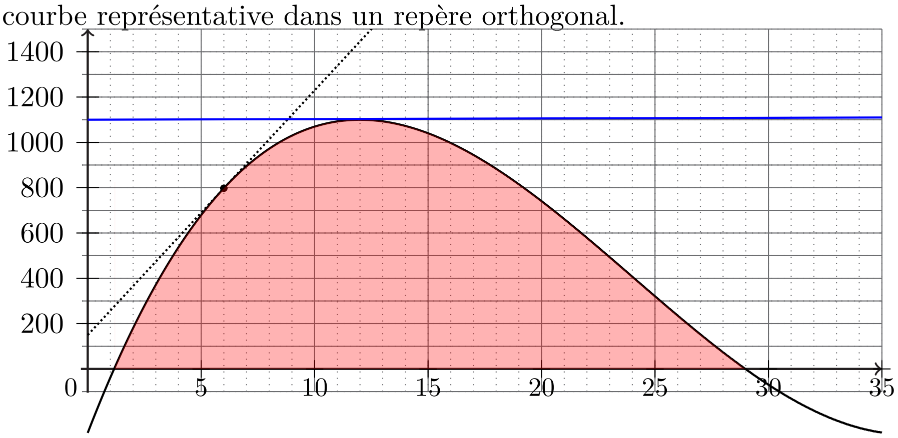

Aucune justification n'est demandée. À l'aide du graphique déterminer :

1. $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ : $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f(2) = -2$
2. $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ : $f'(0) = 3$, $f(1) = 3$ et $f(2) = -9$
3. Tracer la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

**Exercice 6.24.** Une entreprise produit chaque semaine $x$ litres d'huile essentielle. Elle peut produire jusqu'à 36 litres par semaine. Pour $x$ litres produits et vendus, le bénéfice hebdomadaire en euro est donné par

$$B(x) = 0,2x^3 - 14,4x^2 + 259,2x + 295,2 \qquad (1 \leqslant x \leqslant 35)$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



**Correction :**

On calcule $B'(6) = 0,6 \times 6^2 - 28,8 \times 6 + 259,2 = 108$

**Partie A** À partir du graphique, répondre au questions suivantes (on laissera apparent les traits de construction).

1. Combien l'entreprise doit-elle produire de litre d'huile pour gagner de l'argent ?
**Correction :**
L'entreprise doit produire entre 1.2 (ou 2) et 29 litres d'huile par semaine pour gagner de l'argent
2. Pour quelle quantité d'huile le bénéfice semble-t-il maximal ?
**Correction :**
Le bénéfice semble maximal pour 12 litre d'huile

**Partie B**

1. Calculer $B'(x)$, où $B'$ désigne la fonction dérivée de $B$.
**Correction :**
On a $B'(x) = 0,2 \times 3x^2 - 14,4 \times 2x + 259,2 = 0,6x^2 - 28,8x + 259,2$.
2. Résoudre l'equation $B'(x) = 0$.
**Correction :**
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.
$\Delta = (-28,8)^2 - 4 \times 0,6 \times 259,2 = 207,36 > 0$. Il y a donc deux solutions. On a $\sqrt{207,36} = 14.4$. Les solutions sont
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{28.8 - 14.4}{1.2} = 12$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{28.8 + 14.4}{1.2} = 36$
3. En déduire le tableau de signe de $B'$ et le tableau de variation de $B$ sur l'intervalle $[2, 14]$
**Correction :**

| $x$ | 2 | | 12 | | 35 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $B'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| Var. de $B(x)$ | | | | | |

4. Calculer le nombre dérivé de $B$ en 6. Tracer la tangente à $\mathcal{C}$ dans le repère précédent.
**Correction :**
On calcule $B'(6) = 0,6 \times 6^2 - 28,8 \times 6 + 259,2 = 108$

**Rappels :**

**Exercice 1 :** $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

| $x$ | $-\infty$ | $-b/2a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2ax+b$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| Var. de $f(x)$ | | | |

Equation de la tangente au point d'abscisse $x_0$ : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**Exercice 2 :** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Pour $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ on a

$$\Delta = b_2^2 - 4a_2c_2 ,$$

Quand $\Delta$ est ... :

$x_1 = \dfrac{-b_2 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}$ et $x_2 = \dfrac{-b_2 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | 0 | 0 | |
| Var. de $f(x)$ | | | | |

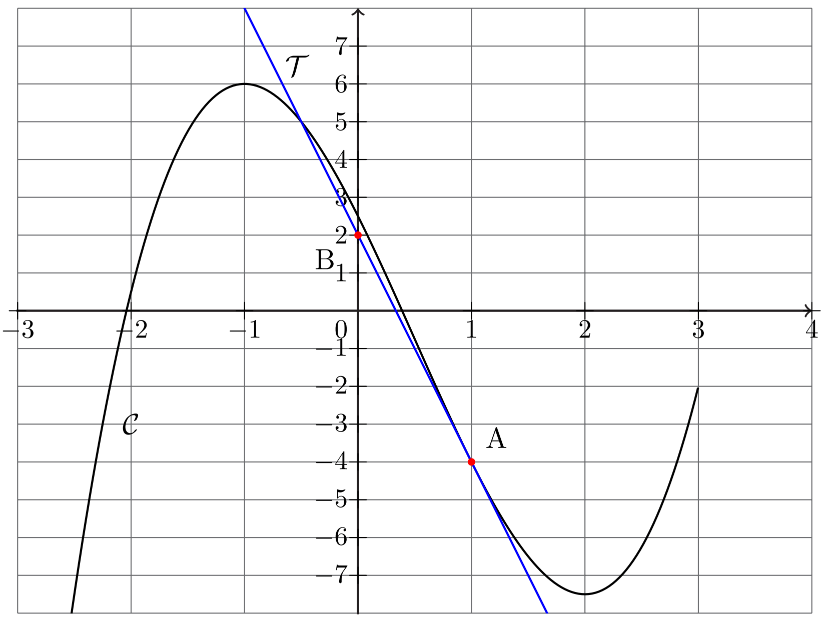
# Comme au Devoir 6

**Exercice 6.25.**

On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-2{,}5 ; 3]$. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$. On donne ci-dessous la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction $f$ dans un repère du plan.

La courbe $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(1 ; -4)$. La droite $T$ est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point $A$ et passe par le point $B(0 ; 2)$.

*Les parties I et II sont indépendantes*




**Partie I**

**Cette partie est un questionnaire à choix multiples (QCM).**

Dans cette partie, pour chaque question, trois réponses sont proposées, **une seule est correcte**.

Aucune justification n'est demandée.

1. a. $f'(1) = -4$ b. $f(1) = 4$ c. $f'(1) = -6$

   **Correction :**

   $f'(1) = -6$

2. L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle :

   a. $[-2{,}5 ; 3]$ b. $[-1 ; 3]$ c. $[1 ; 3]$

   **Correction :**

   $[-1 ; 3]$

3. Sur l'intervalle $[-2{,}5 ; 3]$, l'équation $f'(x) = 0$

   a. admet une seule solution b. admet deux solutions c. n'admet pas de solution.

   **Correction :**

   Admet deux solutions

4. On a :

a. $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[-2{,}5\ ;\ 0]$ b. $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$ c. $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$

**Correction :**

$f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$

**Partie II**

La fonction $f$ dont on connait la courbe $(\mathcal{C})$ est définie sur l'intervalle $[-2{,}5\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2{,}5.$$

1. Calculer $f(-1)$.
**Correction :**
$f(-1) = (-1)^3 - 1{,}5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2{,}5 = -1 - 1,5 + 6 + 2,5 = 6$. (lisible sur le graphique)

2. Calculer $f'(x)$.
**Correction :**
$f'(x) = 3x^2 - 2 \times 1,5x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$.

3. Vérifier que $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$.
**Correction :**
On développe $3(x+1)(x-2) = (3x+3)(x-2) = 3x^2 - 6x + 3x - 6 = 3x^2 - 3x - 6 = f'(x)$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2{,}5\ ;\ 3]$ à l'aide d'un tableau de signes.
**Correction :**
**Rédaction 1 :**Comme $3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du produit $(x+1)(x-2)$ dont on peut trouver le signe grâce à un tableau de signes :

| $x$ | $-2,5$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-2)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

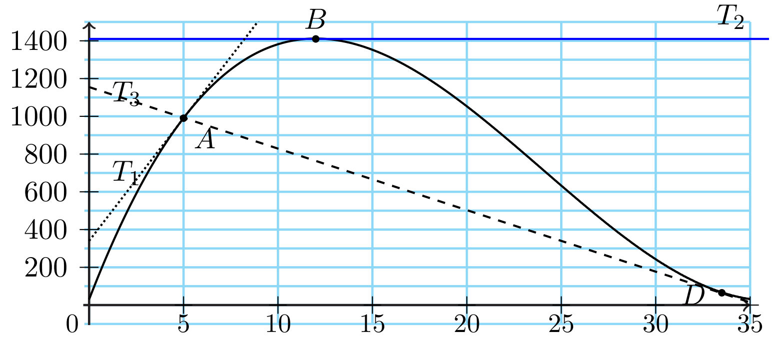
**Rédaction 2 :** $f'$ est un trinôme du second degré ayant deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. Comme $a = 3 > 0$ on a

| $x$ | $-2,5$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

5. En déduire le tableau de variation complet de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-2{,}5\ :\ 3]$.
**Correction :**
Le signe de la dérivée donne la variation de $f$.
On calcule $f(-2,5) = -7,5$ ; $f(-1) = 6$ ; $f(2) = -7,5$ et $f(3) = -2$.
D'où le tableau de variations :

| $x$ | $-2,5$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-7.5$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $-7$ | $\nearrow$ | $-2$ |

**Exercice 6.26.** La courbe $C$ ci-dessous est la représentation d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\;\; 36]$.




A est le point de la courbe $C$ d'abscisse 5, B celui d'abscisse 12 et D celui d'abscisse $33,5$.
$T_1$ est la tangente à la courbe $C$ au point A, $T_2$ celle au point B et $T_3$ celle au point D.

1. L'image de 12 par la fonction $f$ est environ

   **a.** 0 **b.** 760 **c.** 1 410 **d.** 1 900

   **Correction :**

   Réponse c. : 1410

2. $f'(5)$ est environ égal à

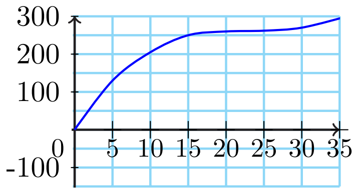
   **a.** $-30$ **b.** 125 **c.** $-125$ **d.** 1,25

   **Correction :**

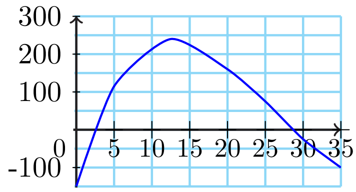
   Réponse b. : 125

3. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction dérivée de $f$. Laquelle ?

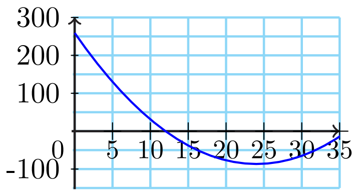
   **a.** Courbe A



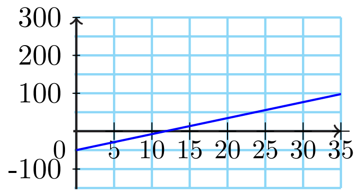

   **b.** Courbe B




   **c.** Courbe C




   **d.** Courbe D




   **Correction :**

   Réponse c.

4. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,36]$ par $g(x) = 0,2x^3 - 14,4x^2 + 259,2x + 295,2$.. La fonction dérivée $g'$ de $g$ sur $[0\,;\,36]$ est définie par :

   **a.** $g'(x) = 0,5x2 - 28,8x + 259,2$ **b.** $g'(x) = 0,6x^2 - 28,8x + 259,2$

   **c.** $g'(x) = 0,6x^2 - 28,8x + 554,4$ **d.** $g'(x) = 0,2x^2 - 144x + 554,4$

**Correction :**

Réponse b. : $g'(x) = 0,6x^2 - 28,8x + 259,2$

5. Le maximum de $g$ sur $[0\,;\,36]$ est :

   **a.** 295,2 **b.** 1 677,6 **c.** 12 **d.** 36

**Correction :**

Réponse b. : 1677,6

# Chapitre 7
# **Probabilités I**
16/03/2017

# Cours :

## 1 Rappels : Vocabulaire

**Définition 1.** Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on peut prévoir les résultats possibles, appelés éventualités ou issues , mais dont on ignore lequel sera réalisé avant que l'expérience soit faite.

L' *univers* associé à une expérience aléatoire, souvent noté $\Omega$ (ou $E$ ), est l'ensemble de toutes les éventualités.

**Exemple 2.** On lance un dé cubique à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Définition 3.** Un *événement* est une partie de l'univers .

Un *événement élémentaire* est un événement formé d'une unique issue . L'ensemble vide est un événement jamais réalisé, c'est l'événement *impossible* .

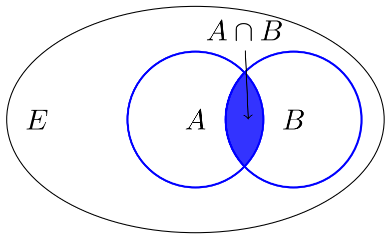
L'univers est toujours réalisé, c'est l'événement *certain* .

**Exemple 4.** l'événement $A$ "obtenir le 6" est un événement élémentaire, $B =$ *{2, 4, 6}* est l'événement "obtenir un nombre pair".

"obtenir le 7" est *impossible* et "obtenir un nombre inférieur ou égal à 6" est *certain* .

**Définition 5** (intersection)**.**

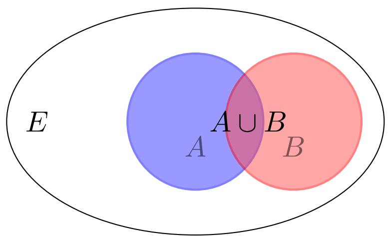
L' intersection de $A$ et $B$, notée $A \cap B$ , est constitué des issues commune à $A$ et $B$ ; qui sont *à la fois* dans $A$ et dans $B$.




*Remarque* 9.
- Lorsque $A$ et $B$ n'ont **aucunes** issues communnes , on dits qu'ils sont *disjoints.* ou *incompatible* Dans ce cas, on note : $A \cap B = \emptyset$ .
- On note $p(A \cap B)$ la probabilité de l'événement $A \cap B$.

**Définition 6** (Définition de l'union)**.**

L' union (ou la *réunion* ) de $A$ et $B$, notée $A \cup B$ , est constitué éléments appartenant à au moins une des parties $A$ et $B$.




**Exemple 7.** si $K = \{3, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$ alors $K \cup B =$ *{2, 3, 4, 6}* et $K \cap B =$ *{6}*.

**Définition 8.** Si $A$ est un événement de l'univers $\Omega$, l'événement *contraire de* $A$, noté $\overline{A}$ , est l'événement constitué de toutes les éventualités *qui ne sont pas* dans $A$.

**Exemple 9.** Exemple : si $B = \{2, 4, 6\}$ alors $\overline{B} =$ *{1, 3, 5}*

## 2 Rappels : Probabilité d'un événement

**Définition 10.**

- On définit une probabilité $p$ sur un univers $\Omega$ en associant à chaque issue $x_i$ de $\Omega$ un nombre compris entre 0 et 1 appelé probabilité de $x_i$, et noté $p(x_i)$, tel que $p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n) = 1$
- La probabilité d'un événement $A$ est la somme des probabilités des *issues* (ou *événements élémenta* ) de $A$.
- La probabilité de l'événement *certain* est 1 : $p(\Omega) = 1$ ;
- La probabilité de l'événement *impossible* est 0 : $p(\emptyset) = 0$ ;

**Exemple 11.** On lance un dé (non truqué) à 6 face. On considère l'événement $B = \{2, 4, 6\}$.

Alors $p(B) = p(\ \{2\}\ ) + p(\ \{4\}\ ) + p(\ \{6\}\ ) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

**Proposition 12.** La probabilité de l'événement $\overline{A}$ est donnée par :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

**Proposition 13.** La probabilité de l'événement $A \cup B$ est donnée par :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

cas particulier : Lorsque $A$ et $B$ sont *disjoints* , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

## 3 Rappel : Équiprobabilité

**Définition 14.** Soit une expérience aléatoire et $\Omega$ l'univers associé à cette expérience aléatoire.

On dit qu'il y a *équiprobabilité* si, et seulement si, tous les événements élémentaires ont la même *probabilité* .

**Exemple 15.** Parmi les expérience équiprobable on connait :

**Proposition 16.** Quand les événements élémentaires sont équiprobables la probabilité d'un événement $A$ est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas réalisant } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

# Exercices :

**Exercice 7.1.** Une urne contient 100 boules indiscernables au toucher.

— 25 boules sont rouges et numérotées 1 et 15 boules sont rouges et numérotées 2 ;
— 20 boules sont vertes et numérotées 2 ;
— 20 boules sont bleues et numérotées 1 ;
— 10 boules sont jaunes et numérotées 1 et 10 boules sont jaunes et numérotées 2.

On tire une boule au hasard dans l'urne et on considère les évènements suivants :

— **A : "la boule tirée est rouge"** ;
— **B : "la boule tirée porte le numéro 2"**.

1. Déterminer la probabilité des évènements $A$,$\bar{A}$ et $B$.
   **Correction :**
   On a équiprobabilité et il y a $25+15=40$ boules rouges. Donc
   $p(A) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{40}{100} = 0,4$
   $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6.$
   Il y a encore équiprobabilité et $15+20+10=45$ boules "2" :
   $p(B) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{45}{100} = 0,45$
2. Décrire par une phrase l'évènement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.
   **Correction :**
   L'évenement $A \cap B$ : "la boule tirée est rouge et numérotée 2".
   On a équiprobabilité et il y a 15 boules rouges et numérotée 2. Donc
   $p(A \cap B) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{15}{100} = 0,15$
3. Décrire par une phrase l'évènement $A \cup B$ et calculer sa probabilité.
   **Correction :**
   L'évenement $A \cup B$ : "la boule tirée est rouge ou elle est numérotée 2".
   On a
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,45 - 0,15 = 0,7$

**Exercice 7.2.** Une entreprise dispose de deux ateliers, notés $A_1$ et $A_2$, dans lesquels sont fabriqués deux modèles de chaussures (SPORT et VILLE). On considère une production totale de 5 000 paires de chaussures. 80% des paires de chaussures sont fabriquées par l'atelier $A_1$ et le reste par l'atelier $A_2$. 70% des paires de chaussures fabriquées par l'atelier $A_1$ sont du modèle VILLE. 20% des chaussures fabriquées par l'atelier $A_2$ sont du modèle VILLE.

1. Compléter le tableau suivant :

| | Nombre de paires SPORT | Nombre de paires VILLE | Total |
|---|---|---|---|
| Nombres de paires provenant de $A_1$ | 1200 | 2800 | 4000 |
| Nombre de paires provenant de $A_2$ | 800 | 200 | 1000 |
| Total | | | 5 000 |

   **Correction :**
   L'atelier $A_1$ produit $5000 \times \frac{80}{100} = 5000$ paires. L'atelier $A_2$ produit donc 1000 paire dont $1000 \times frac20100 = 200$ paires VILLE.

On prend au hasard une paires chaussure dans la production de **l'entreprise**. On admet l'équiprobabilité des choix (des paires de chaussures). On considère les évènements suivants :
— $A$ : "la paire vient de l'atelier $A_1$" et
— $B$ : "la paire est du modèle VILLE"

2. Déterminer la probabilité de l'évènement $A$ , puis celle de l'évènement $\bar{A}$.
**Correction :**
On a équiprobabilité. Donc, à l'aide du tableau
$p(A) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{4000}{5000} = 0,8$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6.$

3. Décrire par une phrase les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$.
**Correction :**
$A \cap B$ : la paire vient de l'atelier $A_1$ et est du modèle VILLE. $A \cup B$ : la paire vient de l'atelier $A_1$ **ou** elle est du modèle VILLE.

4. Calculer les probabilités des évènements $A \cap B$ et $A \cup B$.
**Correction :**
Il y a équiprobabilité. On a avec l'aide du tableau
$p(A \cap B) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{2800}{5000} = 0,56$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,8 + 0,6 - 0,56 = 0,84$ car $p(B) = \frac{3000}{5000} = 0,6$

5. On prend au hasard une paire de chaussures VILLE (avec equiprobabilités des choix). Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'atelier $A_1$.
**Correction :**
On a équiprobabilité dans la situation : cas favorable "paire VILLE produite par $A_1$" et cas possible "paire VILLE".
Donc, à l'aide du tableau
$p(A) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{2800}{3000} \approx 0,93$

# Exercices :

**Exercice 7.3.** Une agence de location de voitures dispose de deux types de véhicules : utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise. Parmi 750 clients, 300 ont loué un véhicule utilitaire et 450 on loué un modèle de luxe. On sait de plus que :

— 30% des clients ayant loué un véhicule utilitaire ont a choisi l'option d'assurance sans franchise ;

— 40% des clients ayant loué un véhicule de luxe ont a choisi l'option d'assurance sans franchise.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

— $L$ : " le client a loué un véhicule de luxe"

— $U$ : "le client a loué un véhicule utilitaire".

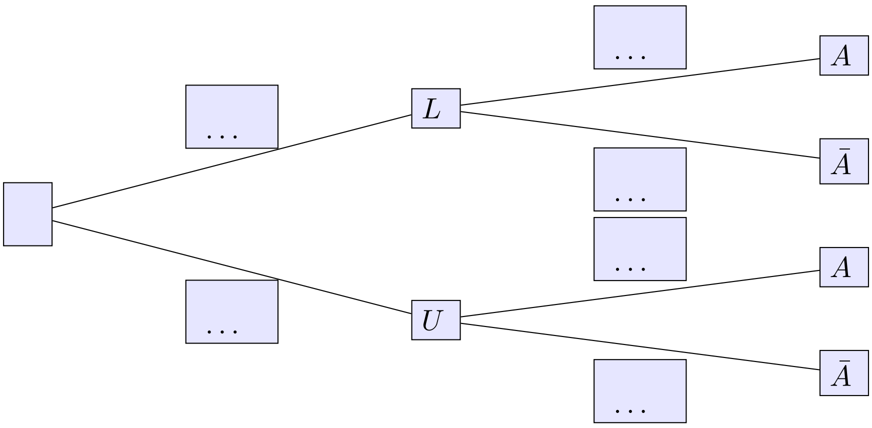
— $A$ : "le client a choisi l'option d'assurance sans franchise".

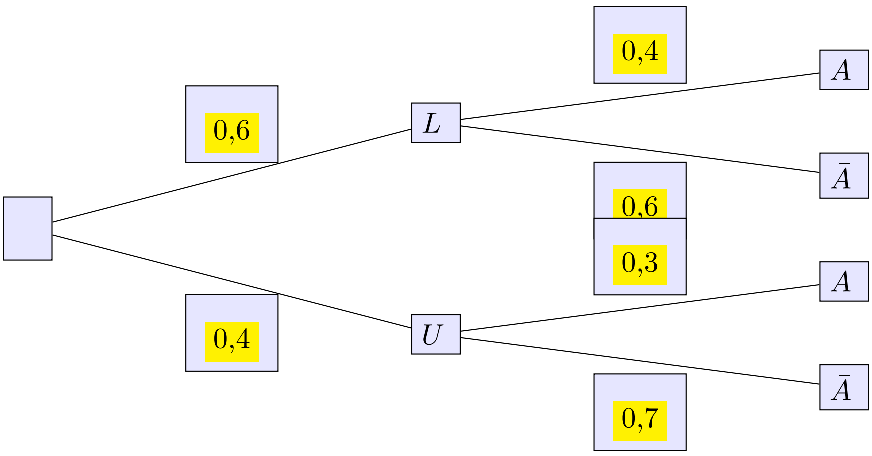
1. Calculer $p(L)$ et $p(U)$.

**Correction :**

On a équiprobabilité. $p(L) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{450}{750} = 0,6$
On a par ailleur $U = \overline{L}$ et $p(U) = 1 - p(L) = 0,4$ (on peut aussi calculer directement).

2. Compléter sur cette feuille l'arbre de probabilités ci-dessous :




3. En utilisant l'arbre, calculer $p(L \cap A)$ et $p(U \cap A)$.

**Correction :**

On multiplie les probabilités en suivant les branche de l'arbre :
$p(L \cap A) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$ et
$p(L \cap A) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$ et

4. En déduire $p(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.
**Correction :**
On additionne les probabilités correspondant à différents chemins
$p(A) = 0,24 + 0,12 = 0,36$. Le client à pris une assurance avec une probabilité de $0,36$ ; avec 36% de chance le client a pris une assurance.

**Exercice 7.4.** Une urne contient 15 jetons rouges et 5 jetons bleus. 20% des jetons rouges sont gagnants et 40% des jetons bleus sont gagnants. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne. On note :
— R l'évènement : « Le jeton est rouge ».
— B l'évènement : « Le jeton est bleu ».
— G l'évènement : « Le jeton est gagnant ».

1. Combien de jetons rouge sont-ils gagnants ? Combien de jetons bleu le sont-ils ?
**Correction :**
Il y a $15 \times \frac{20}{100} = 3$ jetons rouges gagnants.
Il y a $5 \times \frac{40}{100} = 2$ jetons bleu gagnants.
2. Déterminer $p(B)$ et $P(B \cap R)$.
**Correction :**
On a équiprobabilité et il y a $15 + 5 = 20$ boules au total. Donc
$p(B) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{5}{20} = 0,25$.
L'événement $B \cap R$ signifie que l'on tire un jeton qui est rouge ET bleu ; c'est impossible et $p(R \cap B) = 0$
3. Déterminer $p(R \cap G)$ et $p(B \cap G)$
**Correction :**
On a toujours équiprobabilité. Donc
$p(R \cap G) = \dfrac{\text{nbr. cas favorables}}{\text{nbr. cas total}} = \dfrac{3}{20} = 0,15$, d'après 1). De même, $p(B \cap G) = \frac{2}{20} = 0,1$.
4. Quelle est la probabilité que le jeton soit gagant ?
**Correction :**
Un jeton gagnant est un jeton de couleur rouge ou bleu. On a donc $p(G) = p(R \cap G) + p(B \cap G) = 0,15 + 0,1 = 0,25$.

# Cours :

à voir
https://www.youtube.com/watch?v=VV1iraX-w3U
https://www.youtube.com/watch?v=0JQabHtm1Vo

## 4 Schéma de Bernoulli

**Exemple 17.** On lance un dé *équilibré* à 6 faces numéroté de 1 à 6. Soit $S$ l'événement obtenir un 6. On répète trois l'expérience ci-dessus.

On répète donc une expérience aléatoire à 2 issues :

— $S$ ("obtenir un 6") avec $p = p(S) = \dfrac{1}{6}$

— $\overline{S}$ ("obtenir 1,2,3,4 ou 5") avec $q = p(\overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

On modélise cela par un arbre pondéré : les *issues* sont sur les *"noeud"* (ou extrémité des branches) et les *probabilités* correspondantes est inscrite sur les branches .

Cette expérience est répétée trois fois de manière indépendante donc l'arbre aura trois « niveaux » . Faites l'arbre correspondant :

**Définition 18.** Soit $E$ une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une, notée $S$, est appelée *"succès"* , l'autre, notée $\overline{S}$ , appelée *"échec"* .

On note $p$ la probabilité de $S$ et *$q$ celle de $\overline{S}$* avec $p = 1 - q$ .

Le fait de répéter $n$ fois l'expérience $E$ dans des conditions indépendantes, constitue un schéma de Bernoulli de *paramètres* $n$ et $p$ .

**Proposition 19.** Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

**Exemple 20.** Avec l'expérience ci-dessus, $p(S\overline{S}S) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{216}$

**Exemple 21.** Toujours avec l'expérience précédente, calculer, $p$("3 fois le 6"), $p$(" ne pas obtenir 6") et $p$("une seule fois le 6")

**Correction :**

$p$("3 fois le 6")$= p(SSS) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{216}$

$p$("ne pas obtenir 6")$= p(\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{125}{216}$

$p$("une seule fois le 6")$= p(S\overline{S}\,\overline{S}) + p(\overline{S}S\overline{S}) + p(\overline{S}\,\overline{S}S)$

$p$("une seule fois le 6")$= \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{75}{216} = \dfrac{25}{72}$

## 5 Variable aléatoire et loi binomiale

**Définition 22.** Soit un *schéma de Bernoulli* constitué de $n$ expériences et soit $X$ le nombre de succès obtenu.

— On dit que $X$ est la *variable aléatoire* associé à ce schéma.

— Si $k$ est un entier naturel compris entre 0 et $n$, l'évènement *"on a obtenu $k$ succès"* est noté $\{X = k\}$ et la probabilité de cet évènement est notée $p(X = k)$ .

— Si $k$ est un entier naturel compris entre 0 et $n$, l'évènement *"on a obtenu au plus k succès"* est noté $\{X \leqslant k\}$ et la probabilité de cet évènement est notée $p(X \leqslant k)$ .

**Définition 23.** On dit que la *variable aléatoire X* suit la loi binomiale de paramètre $n$ et $p$, notée $B(n, p)$ .

**Exemple 24.** On reprend l'exemple précédent. La *variable aléatoire* $X$ associée au nombre de succès "obtenir un 6" suit la loi $B(3, \frac{1}{6})$ . A l'aide de l'arbre ou en le recopiant completer le tableau suivant :

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | | | | |

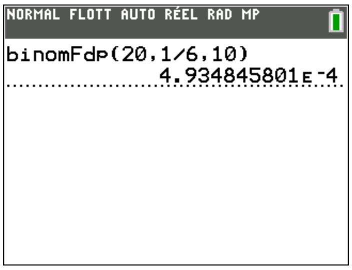
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | | | | |

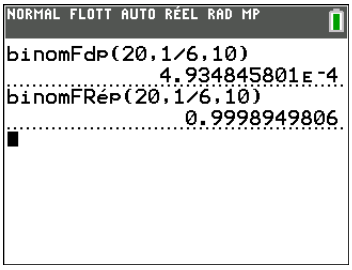
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

## 6 Utilisation de la calculatrice

On lance un dé non truqué 20 fois de suite et on s'intéresse au nombre d'obtention de la face numérotée 6.

1. Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.
   **Correction :**
   On a une épreuve de Bernoulli, dont le succès est : « obtenir un 6 » de probabilité $p = \frac{1}{6}$.
   Cette épreuve est répétée 20 fois de manière identique et indépendante donc c'est un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui indique le nombre de 6 obtenus suit la loi binomiale $B(20, \frac{1}{6})$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 10 fois le 6. On utilise : touche Distr puis choix binomFpd(n,p,x)
   **Correction :**
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 10 fois le 6. On utilise : touche Distr puis choix binomFRép(n,p,x)
   **Correction :**

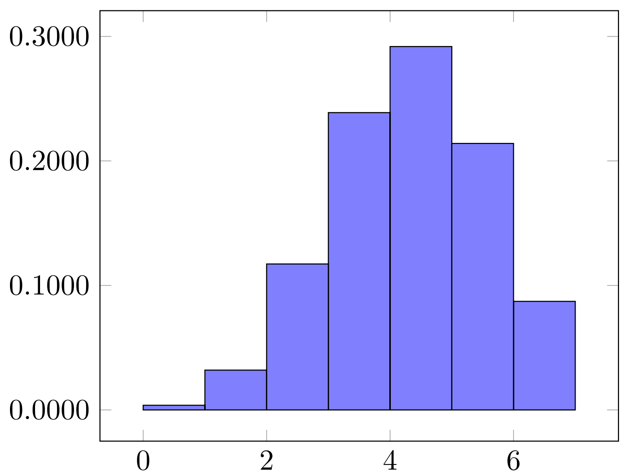
## 7 Représentation Graphique

On représente graphiquement la loi binomiale par un diagramme en bâtons ; les valeurs possibles $k$ de la variable aléatoire $X$ sont placées en abscisse *(horizontal)* et les probabilités sont placées en ordonnées ( *vertical* )

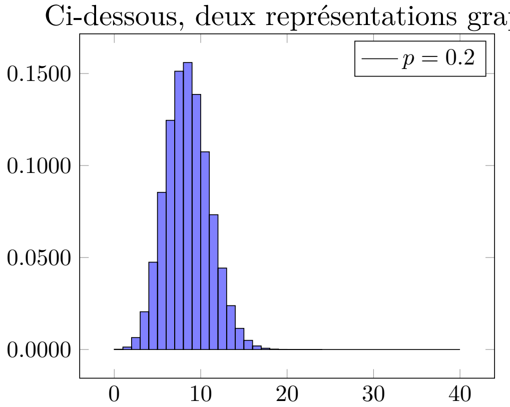
**Exemple 25.** La variable aléatoire X suit la loi binomiale B(7,0.55). Le tableau suivant donne les valeurs décimales arrondies à 0,001 près de $p(X = k)$.

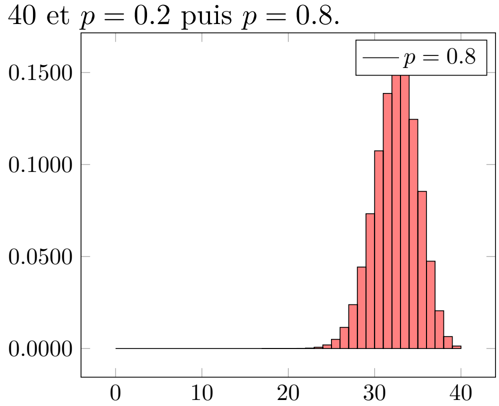
| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | | | | | | | | |
| $p(X = k)$ | 0.004 | 0.032 | 0.117 | 0.239 | 0.292 | 0.214 | 0.087 | 0.015 |

Loi binomiale : $n = 7$, $p = 0.55$




Ci-dessous, deux représentations graphiques pour $n = 40$ et $p = 0.2$ puis $p = 0.8$.




## 8 Espérance mathématique

**Proposition 26** (Espérance de la loi binomiale)**.** On appelle *espérance* de la variable aléatoire $X$ le nombre : $E(X) = np$

**Exemple 27.** En reprenant l'exemple du dé pour 20 lancer, calculer l'espérance associée :
**Correction :**

$E(X) = 20 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3} \approx 3,33$ En répétant un grand nombre de fois 20 lancé de dés, on obtient en moyenne *3,33* “face 6” pour *20* lancés.

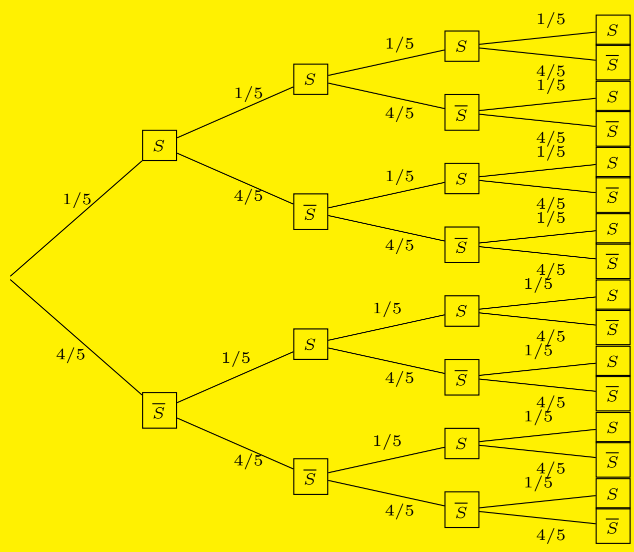
# Exercices :

à voir
`https://www.youtube.com/watch?v=7k4ZYdfWEY8`

**Exercice 7.5.** Un QCM est composé de 4 questions indépendantes les unes des autres. Pour chaque question 5 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

On répond au hasard à chaque question et on s'intéresse aux nombre de réponses exactes obtenues à la fin du QCM.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli
**Correction :**
On répète pour chaque question (4 fois), de manière indépendante (les question le sont), une experience aléatoire ayant deux issues : "Succès" lorsque la réponse est correct ($p = \frac{1}{5}$) ou "Échec" lorsque la réponse est incorrecte.
C'est un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{1}{5}$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré
**Correction :**



3. Calculer la probabilité d'obtenir 4 réponses exactes.
**Correction :**
Obtenir 4 réponses exactes correspond à un unique "chemin dans l'arbre" : $SSSS$ et donc à la probabilité $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$

4. Calculer la probabilité d'obtenir uniquement la troisème réponse exacte.
**Correction :**
Obtenir uniquement la troisième réponse exacte correspond à un unique "chemin dans l'arbre" : $\overline{S}\,\overline{S}S\overline{S}$ et donc à la probabilité
$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{625} \approx 0,1024$

5. Calculer la probabilité d'obtenirdeux réponses exactes.
   **Correction :**
   Obtenir deux réponses exactes correspond a plusieurs chemin dans l'arbre ( 6 pour être exact). Ils ont tous la même probabilité. La probabilité d'obtenir 2 réponses exacte est donc de
   $6 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{625} \approx 0,1536$
   **Autre rédaction :** La variable aléatoire $X$ donnant le nombre de réponses exactes suit la loi binomiale $B(4, 1/5)$ car on est dans un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 4$ $p = 1/5$). La probabilité d'obtenir 2 réponse exacte est donc grâce à la calculatrice
   $p(X = 2) = 0,1536$

**Exercice 7.6.** Une urne contient dix boules (3 rouge et 5 vertes) numéroté de 1 à 10. On prends 15 fois une boule au hasard et avec remise. On s'intéresse au nombre de fois on l'où obtient une boule avec un numéro pair.

1. Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire $X$ qui suit une loi binomiale.
   **Correction :**
   On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de fois où l'on obtient un numéro pair.
   On répète 15 fois une expérience aléatoire ayant deux issues, "Succès" : le numéro tiré est pair (probabilité $5/10 = 0.5$) et "Échec" : le numéro tiré est impair (probabilité $5/10 = 0.5$). C'est donc bien un schema de Bernoulli et $X$ suit la loi binomiale
2. Déterminer la probabilité qu'on tire au moins 10 boules avec un numéro pair.
   **Correction :**
   Pas de calculette, pas de solution.
   Avec une calculette utilisez "binomFRép"

**Exercice 7.7.** Pour le concert de fin d'année du conservatoire, l'auditorium dispose de 400 places réservées aux parents d'élèves. On s'intéresse au nombre $X$ de parents d'élèves assistant au concert de fin d'année dans l'auditorium.

On estime à $0,75$ la probabilité que chacun des 500 parents d'élèves assiste au concert. On admet que $X$ suit la loi binomiale de paramètres 500 et $0,75$.

1. Calculer l'espérance de$X$.
   **Correction :**
   $X$ suivant une loi binomiale de paramètres $(n, p)$ où $n = 500$ et $p = 0{,}75$, l'espérance de $X$ est $np$.
   $E(X) = 500 \times 0{,}75 = 375$.
2. Déterminer la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant. On arrondira le résultat au millième.
   **Correction :**
   Déterminons la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant.
   Pour que le nombre de places soit suffisant, il suffit qu'au plus 400 parents viennent.
   $p(X \leqslant 400) = 0{,}996$ *arrondie au millième.*

**Exercice 7.8.** Marcel est un joueur de pétanque . La probabilité qu'il touche une boule visée est de 0.7. Il s'entraine neuf fois de suite, les essais successif sont indépendants et on s'intéresse au nombre de boule touchée lors de ces neuf essais. On note $X$ la variable aléatoire correspondant à cette situation

1. Vérifier que la variable $X$ suit la loi binomiale.

   **Correction :**

   On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 9$ $p = 0.7$ dont le "Succès" est la boule visée est touché (probabilité 0.7) et l' "Échec" est la boule visée n'est pas touchée (probabilité $0,3$).
   $X$ suit donc bien la loi binomiale.

2. Compléter le tableau suivant

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | | | | | |

| $k$ | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | | | | | |

   **Correction :**

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | 0,000 02 | 0,000 41 | 0,003 86 | 0,021 00 | 0,073 51 |

| $k$ | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | 0,171 53 | 0,266 83 | 0,266 83 | 0,155 65 | 0,040 35 |

3. Calculer $p(X \leqslant 1)$, $p(X < 2)$ et $p(X > 6)$

   **Correction :**

   $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}000\,43$.
   $p(X < 2) = p(X \leqslant 1) = 0{,}000\,43$
   $p(X > 6) = 1 - p(X \leqslant 6) = 1 - 0{,}270\,33 = 0{,}729\,67$

4. Calculer la probabilité de "Moins de trois boules touchée" puis celle de "Au moins sept boules sont touchée" .

   **Correction :**

   "Moins de trois boules touchée" est l'événement $\{X \leqslant 3\}$. On a alors :
   $p(X \leqslant 3) = p(X < 2) + p(X = 2) + p(X = 3) = 02\,529$
   "Au moins sept boules sont touchée" est l'événement $\{X \geqslant 7\}$. On a alors :
   $p(X \geqslant 7) = p(X > 6) = 0{,}729\,67$

# Exercices :

**Exercice 7.9.** On lance un dé non truqué 30 fois de suite. On s'intéresse au apparition de la face numéroté "3".

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.
   **Correction :**
   L'expérience "lancer un dé non truqué" à ici deux issues possibles : Succès "obtenir la face 3" (probabilité $p = \frac{1}{6}$ et Échec "ontenir une autre face" (probabilité $q = 1 - p = \frac{5}{6}$).
   Cette expérience est répété 30 fois de façon indépendante (un lancé n' a pas d'influence sur les autre).
   Cette situation correspond à un Schéma de Bernoulli
2. On note $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de "3" obtenu. Vérifier que $X$ suit la loi binomiale.
   **Correction :**
   La variable $X$ compte bien le nombre de Succès d'un schéma de Bernoulli, elle suit donc bien la loi binomiale.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer la probabilité d'obtenir 8 fois la face "3" à 0,1% près
   **Correction :**
   On trouve $p(X = 8) = 0,063$
4. À l'aide de la calculatrice déterminer la probabilité d'obtenir au plus 8 fois la face "3" à 0,1% près
   **Correction :**
   On trouve $p(X \leqslant 8) = 0,98$

**Exercice 7.10.** Une urne contient 70 boules dont 20 boules bleues, 25 boules rouges et 25 boules vertes. On tire vingt fois au hasard et avec remise une boule. On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de boule blueues obtenues.

1. Vérifier que la variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale.
   **Correction :**
   L'expérience aléatoire on tire une boule a ici deux issues possibles : Succès "obtenir une boule bleue" (probabilité $\frac{20}{70} = 2/7$ par équiprobabilité) et Échec "obtenir une boule qui n'est pas bleu (rouge ou verte donc)" avec probabilité $q = 1 - p = \frac{5}{7}$
   On **répète 20 fois** cette expérience aléatoire de façon **indépedante**. C'est bien un **schéma de Bernoulli** et $X$ compte le **nombre de succès**. $X$ suit bien la loi binomiale.
2. Détemerner $p(X = 10)$ puis $p(X \leqslant 10)$.
   **Correction :**
   On trouve $p(X = 10) = 0,023154$ et $p(X \leqslant 10) \approx 0,988285$

**Exercice 7.11.** Dand la population active d'un pays, la proportion de chomeurs est de 20% (données OCDE). On prélève au hasard un échantillon de 20 personnes dans la population active ; la population du pays est suffisament importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 individus.

1. Montrer que la variable aléatoire $X$ comptant le nombre de chomeur de l'échantillon suit la loi binomiale.

**Correction :**

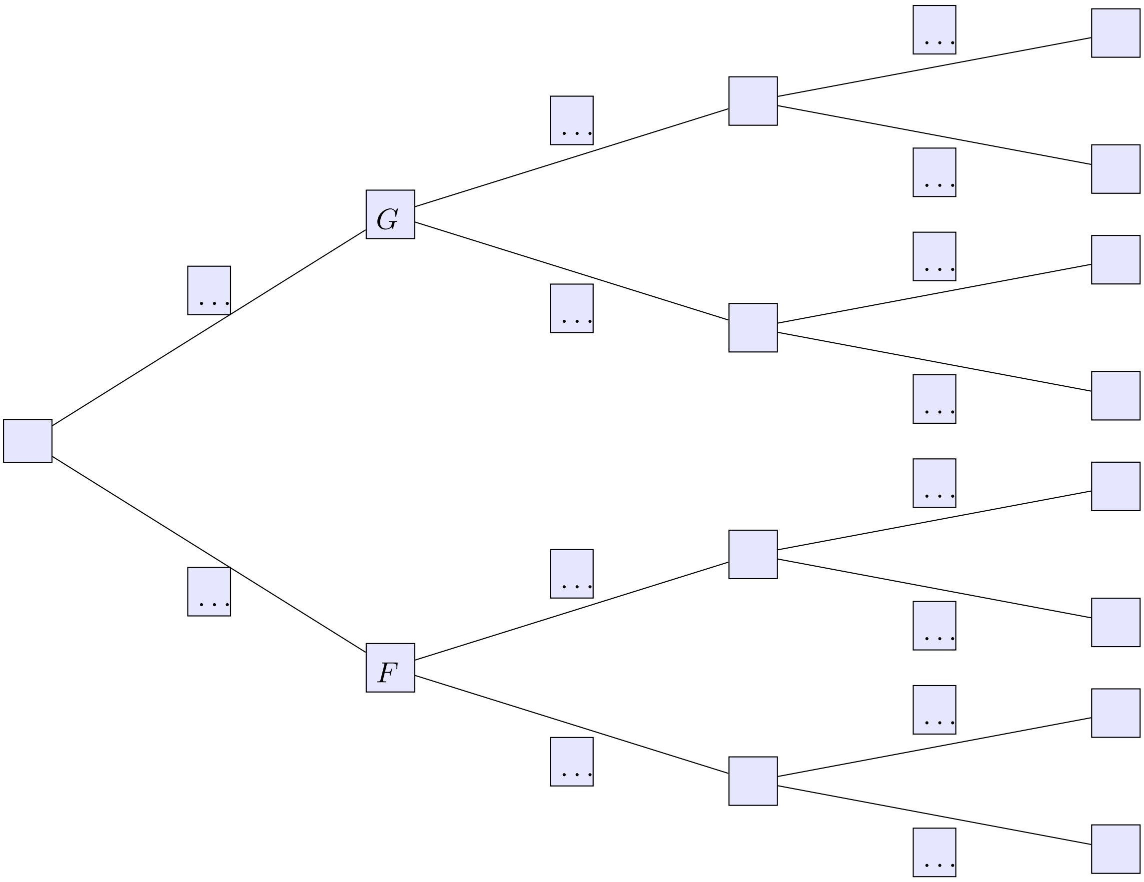
L'expérience aléatoire on "prélève" un individu a ici deux issues possibles : Succès "c'est un chomeur" (probabilité $\frac{20}{100} = 0,2$ par équiprobabilité) et Échec "ce n'est pas un chomeur)" avec probabilité $q = 1 - p = 0.8$
On **répète 20 fois** cette expérience aléatoire de façon **indépedante** car on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. C'est bien un **schéma de Bernoulli** et $X$ compte le **nombre de succès**. $X$ suit bien la loi binomiale.

2. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que 1 est le plus petit nombre entier $a$ tel que $P(X \leqslant a) < 0,025$
**Correction :**
On a grâce à la calculatrice : $P(X \leqslant 0) \approx 0,011 < 0,025$ et $p(X \leqslant 1) \approx 0,069 > 0,025$
3. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que 8 est le plus petit nombre entier $b$ tel que $P(X \leqslant b) > 0,975$
**Correction :**
On a grâce à la calculatrice : $P(X \leqslant 7) \approx 0,967 < 0,975$ et $p(X \leqslant 8) \approx 0,990 > 0,975$
4. Interpréter ces résultats.
**Correction :**
Dans l'échantillon, il y au moins $0,975 - 0,025 = 0,95 = 95\%$ de change d'avoir entre 1 et 8 chomeur, la fréquence $f$ de chomeur est donc entre $1/20 = 0,05$ et $8/20 = 0,4$
5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X$ et interpréter le résultat.
**Correction :**
L'espérance de $X$ vaut $E(X) = n \times p = 20 \times 0.2 = 4$. Interprétation : si l'on regarde un grand nombre d'échantillon, il y a en moyenne 4 chomeurs (remarque $4 = 20\%$ de 20 personne).

**Exercice 7.12.** Dans la famille Dupond, il nait plus de fille que de garçon. La grand-mère prétend qu'il y a 1 chance sur 4 d'avoir un garçon. Un membre de la famille souhaite avoir 3 enfants.

1. Montrer que "cette expérience" correspond à un schéma de Bernoulli.
**Correction :**
L'expérience aléatoire avoir un enfant a deux issues possibles : Succès "Félicitations ! c'est un garçon" (probabilité $\frac{1}{4} = 0,25$) et Échec "Félicitations ! c'est une fille" avec probabilité $q = 1 - p \approx 0,75$
On **répète 3 fois** cette expérience aléatoire de façon **indépedante** car les différentes naissances n'ont pas d'impact sur les suivantes. C'est bien un **schéma de Bernoulli**.
2. Compléter l'arbre pondérez ci-dessous.
3. Quel est la probabilté d'avoir trois filles ?
**Correction :**
C'est l'évement $FFF$. Grâce à l'arbre, on trouve $p(FFF) = O,75^3 = 0,421875$
4. Quel est la probabilité d'avoir au moins 1 garçon ?
**Correction :**
Avoir un garçon (sur 3 enfant) c'est le contraire d'avoir 3 fille. La probabilité est donc $1 - p(FFF) = 0,578125$.

5. Determinez l'espérance de la variable aléatoire comptant le nombre de garçons et interpréter.
   **Correction :**
   On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de garçon qui suit la loi binomiale. Son espérance est de $E(X) = n \times p = 3 \times 0,25 = 0,75$. Sur un grand nombre de génération, les couple de cette famille avec 3 enfants ont en moyenne $0,75$ garçon (sur 4 couple il y a 3 garcons sur 12 enfants).



# Exercices :

**Exercice 7.13.** Albert est un marin participant à une course à la voile en solitaire. Son bateau est très rapide, mais fragile en cas de tempête.

Les prévisions météo permettent d'estimer que, durant la course, la probabilité qu'une tempête survienne est égale à 0,05.

En cas de tempête, on estime que la probabilité qu'Albert soit vainqueur de la course est de 0,02.

En revanche, si aucune tempête ne survient, la probabilité de victoire d'Albert est de 0,8.

Pour tout événement E, on note $\overline{\mathrm{E}}$ l'événement contraire de E.

On considère les événements :

— T : « une tempête survient pendant la course »

— V : « Albert est vainqueur de la course ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, construire un arbre de probabilité représentant la situation énoncée.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Une tempête survient et Albert est vainqueur de la course » ?
   **Correction :**
   La probabilité de l'évènement : « Une tempête survient et Albert est vainqueur de la course » est $p(T \cap V) = 0,02 \times 0,05 = 0,001$ ; $p(T \cap V) = 0,001$
3. Montrer que la probabilité qu'Albert remporte la course est égale à 0,761.
   **Correction :**
   $V = (V \cap T) \cup (V \cap \overline{T})$ (réunion d'événements incompatibles).
   Par conséquent : $p(V) = p(V \cap T) + p(V \cap \overline{T}) = 0,001 + 0,8 \times 0,95 = 0,001 + 0,76 = 0,761$.
   La probabilité qu'Albert remporte la course est 0,761.
4. Décrire par une phrase et calculer la probabilité de l'événement $T \cup V$
   **Correction :**
   Vous devez faire seul : **Indice :**On utilise la formule $p(T \cup V) = p(T) + p(V) - p(T \cap V)$

**Exercice 7.14.** Pour le concert de fin d'année du conservatoire, l'auditorium dispose de 400 places réservées aux parents d'élèves. On s'intéresse au nombre $X$ de parents d'élèves assistant au concert de fin d'année dans l'auditorium.

On estime à $0,75$ la probabilité que chacun des 500 parents d'élèves assiste au concert. On admet que $X$ suit la loi binomiale de paramètres 500 et $0,75$.

1. Calculer l'espérance de$X$.
   **Correction :**
   $X$ suivant une loi binomiale de paramètres $(n,p)$ où $n = 500$ et $p = 0{,}75$, l'espérance de $X$ est $np$.
   $E(X) = 500 \times 0{,}75 = 375$.
2. Déterminer la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant. On arrondira le résultat au millième.
   **Correction :**

Déterminons la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant.
Pour que le nombre de places soit suffisant, il suffit qu'au plus 400 parents viennent.
$p(X \leqslant 400) = 0{,}996$ *arrondie au millième.*

**Exercice 7.15.** Marcel est un joueur de pétanque . La probabilité qu'il touche une boule visée est de 0.7. Il s'entraine neuf fois de suite, les essais successif sont indépendants et on s'intéresse au nombre de boule touchée lors de ces neuf essais. On note $X$ la variable aléatoire correspondant à cette situation

1. Vérifier que la variable $X$ suit la loi binomiale.
   **Correction :**
   On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 9$ $p = 0.7$ dont le "Succès" est la boule visée est touché (probabilité 0.7) et l' "Échec" est la boule visée n'est pas touchée (probabilité $0,3$).
   $X$ suit donc bien la loi binomiale.
2. Compléter le tableau suivant

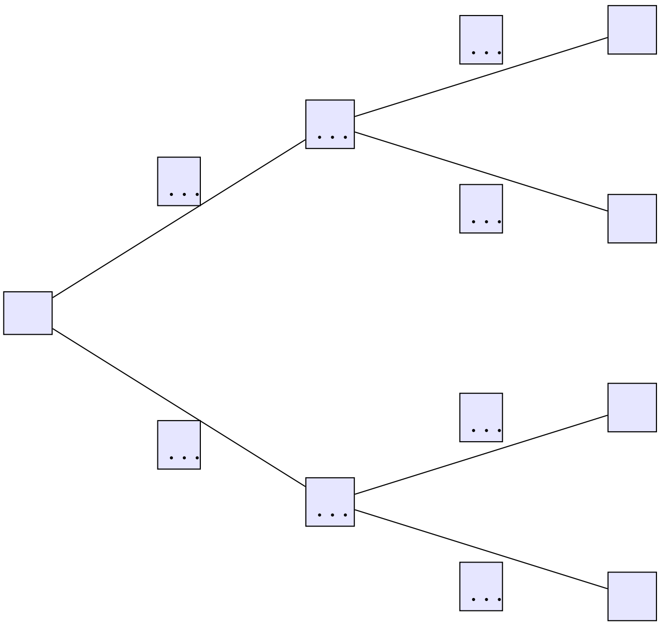
| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | | | | | |

| $k$ | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | | | | | |

   **Correction :**

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | 0,000 02 | 0,000 41 | 0,003 86 | 0,021 00 | 0,073 51 |
| $k$ | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| $p(X = k)$ | 0,171 53 | 0,266 83 | 0,266 83 | 0,155 65 | 0,040 35 |

3. Calculer $p(X \leqslant 1)$, $p(X < 2)$ et $p(X > 6)$
   **Correction :**
   $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}000\,43$.
   $p(X < 2) = p(X \leqslant 1) = 0{,}000\,43$
   $p(X > 6) = 1 - p(X \leqslant 6) = 1 - 0{,}270\,33 = 0{,}729\,67$
4. Calculer la probabilité de "Moins de trois boules touchées" puis celle de "Au moins sept boules sont touchées" .
   **Correction :**
   "Moins de trois boules touchées" est l'événement $\{X \leqslant 3\}$. On a alors :
   $p(X \leqslant 3) = p(X < 2) + p(X = 2) + p(X = 3) = 0{,}252\,9$
   "Au moins sept boules sont touchée" est l'événement $\{X \geqslant 7\}$. On a alors :
   $p(X \geqslant 7) = p(X > 6) = 0{,}729\,67$



# Comme au Devoir 7

**Exercice 7.16. Partie A** Dans un petit village, la mairie a organisé une fête locale : un certain nombre d'entrées gratuites ont été distribuées aux habitants et des stands ont été installés pour la vente de produits locaux.

Les organisateurs estiment que 40 % des visiteurs de la fête ont eu une entrée gratuite, les autres ont payé leur entrée.

De plus, parmi les visiteurs ayant une entrée gratuite, 45 % ont effectué un achat dans un des stands. Parmi ceux ayant payé leur entrée, 60 % n'ont rien acheté.

On interroge au hasard un des visiteurs de la fête à la fin de la journée.

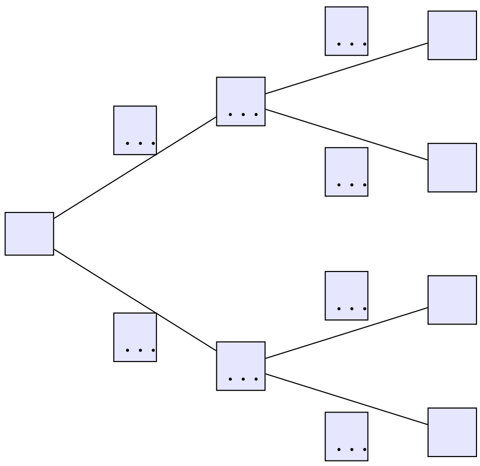
On note

$G$ l'évènement : « le visiteur a eu une entrée gratuite »,

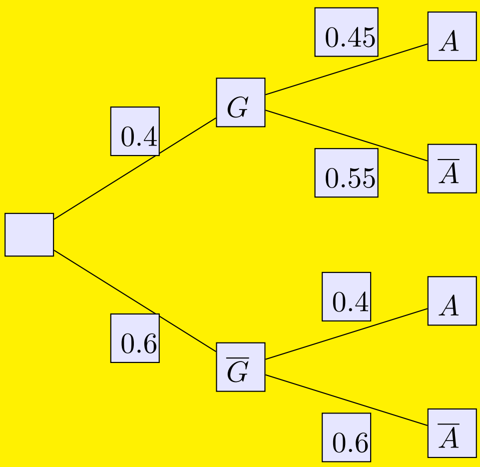
$A$ l'évènement : « le visiteur a effectué un achat ».

On notera $\overline{G}$ l'évènement contraire de $G$ et $\overline{A}$ l'évènement contraire de $A$.

1. Compléter sur votre copie l'arbre de probabilité ci-dessous :




**Correction :**




2. Décrire par une phrase l'événement $G \cap A$

**Correction :**

$G \cap A$ est l''événement « le visiteur a eu une entrée gratuite s et a effectué un achat ».

3. Calculer la probabilité de l'évènement $G \cap A$ puis celle de l'évenement $\overline{G} \cap A$.C
**Correction :**
on a $p(G \cap A) = 0.4 \times 0.45 = 0.18$
L'évènement $\overline{G} \cap A$ est : « le visiteur a payé son entrée et a effectué un achat ».
Sa probabilité est
$p\left(\overline{G} \cap A\right) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$

4. Montrer que la probabilité que le visiteur ait effectué un achat est 0,42.
**Correction :**
$A = (A \cap G) \cup (A \cap \overline{G})$ (réunion d'évènements incompatibles).
On en déduit :
$p(A) = p(A \cap G) + p\left(A \cap \overline{G}\right) = 0,18 + 0,24 = 0,42.$

5. Définir par une phrase l'événement $\overline{G} \cup A$ et calculer sa probabilité.
**Correction :**
$\overline{G} \cup A$ : le visiteur a payé son entrée ou a effectué un achat. On a $p(\overline{G} \cup A) = p(\overline{G}) + p(A) - p(\overline{G} \cap A) = 0.6 + 0.42 - 0.24 = 0.78$

**Partie B**

*Dans cette partie, on arrondira les résultats à* $0,01$ *près*

On rappelle que la probabilité qu'un visiteur ait effectué un achat vaut $0,42$.
On interroge un groupe de 15 visiteurs.
Dans cette question, on suppose que la réponse d'un visiteur est indépendante de celle des autres visiteurs. Soit $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de ces visiteurs ayant effectué un achat. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand, on considère que $X$ suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
**Correction :**
X suit une loi binomiale de paramètres (15 ; 0,42).

2. Calculer alors la probabilité que le nombre de visiteurs ayant effectué un achat soit égal à 10.
**Correction :**
On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues.
Si on note $X$ le nombre de visiteurs ayant effectué un achat, $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,42$.
On calcule alors la probabilité que $X$ soit égal à 10 à la calculatrice.
On trouve : $p(X = 10) \approx 0,03$.

**Exercice 7.17.** Un cabinet de comptable produit un grand nombre de facture. On admets que 3 % des factures sont érronés. On prélève au hasard 20 factures. Le nombre total de factures est suffisament important pour assimiler cet échantillon à un tirage avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire donnant pour tout échantillon le nombre de factures érronées.

1. Justifier que $X$ suit une loie binomiale dont on donnera les paramètres
**Correction :**
La variable compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli : on tire 20 fois de façon indépendantes une facture, il n'y a que 2 issues (SUCCÈS la facture est érronée $p = 0.03$ ou ÉCHEC la facture est correcte.
Les paramètres de la loi binomiale de la variable $X$ sont $p = 0.3$ et $n = 20$

2. Calculer la probabilité qu'aucune facture ne soit érronée.
   **Correction :**
   On calcule avec la calculatrice $p(X=0)=0,544$
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 2 facture érronées dans l'échantillons.
   **Correction :**
   On calcule avec la calculatrice $p(X\leqslant 2)=0,979$
4. Donner l'espérance de $X$ et interpréter.
   **Correction :**
   L'espérance de $X$ est donnée par $E(X)=n\times p=20\times 0.03=0.6$. En tirant un grand nmbre de fois 20 facture, il y a en moyenne 0.6 facture erronée, C'est à dire en moyenne un peu plus d'une 1 facture érronée tous les deux paquets de 20 factures.

**Exercice 7.18.** Une urne contient 250 boules indiscernables au toucher.
- 40 boules sont rouges et numérotées 1 et 20 boules sont rouges et numérotées 2 ;
- 40 boules sont vertes et numérotées 3 ;
- 25 boules sont bleues et numérotées 3 ;
- 50 boules sont jaunes et numérotées 4 et 75 boules sont jaunes et numérotées 2.

On tire une boule au hasard dans l'urne et on considère les évènements suivants :
- **A : "la boule tirée est rouge"** ;
- **B : "la boule tirée porte le numéro 2"**.

1. Déterminer la probabilité des évènements $A$ et $\overline{A}$.
   **Correction :**
   Il y a 60 boules rouges. Par équiprobabilté, on a :
   $p(A)=\frac{60}{250}=\frac{6}{25}=0.24$. Ensuite on trouve $p(\overline{A})=1-0.24=0.76$
2. Décrire par une phrase l'évènement $A\cap B$ et calculer sa probabilité.
   **Correction :**
   $A\cap B$ : "la boule tirée est rouge et numéroté 2".
   Il y a 20 boules rouges numérotées 2, par équiprobabilités, on a
   $p(A\cap B)=\frac{20}{250}=\frac{2}{25}=0.08$.
3. Décrire par une phrase l'évènement $A\cup B$ et calculer sa probabilité.
   **Correction :**
   $A\cup B$ : "la boule tirée est rouge ou elle est numérotée 2. Comme il y a $25+75=100$ boules numérotées 2, $p(B)=\frac{100}{250}=0.4$.
   On trouve donc $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0.24+0.4-0.08=0.56$
4. On tire une boule 5 fois avec remise. On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges obtenues. Justifier que $X$ suit la loi binomiale de paramètre $n=5$ $p=0.24$.
   **Correction :**
   On **répète de manière indépendante** (tirage avec remise) 5 fois une expérience aléatoire ayant deux issues : SUCCÈS "la boule est rouge" ($p=0.24$) et ÉCHEC "la boule tirée n'est pas rouge". La variable $X$ compte donc le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, elle suit donc la loi binomial et paramètre $n=5$, $p=0.24$
5. Déterminer $p(X=3)$ et $p(X\leqslant 2)$
   **Correction :**
   Avec la calculatrice : "binomFdp" pour $p(X=3)$ et "binomFrep" pour $p(X\leqslant 2)$.

**Rappels :**

$p(A) \in [0,1]$ $\quad$ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ $\quad$ $p(A \cup B) = p(?) + p(?) - ??$

**Bernoulli** : Répétition – ? ? – 2 issues
**Loi binomiale** : compte le nombre de ? ? d'un ? ?

"binomFdp" pour $p(X = k)$ – "binomFrep" pour $p(X \leqslant k)$.

# Pour préparer le Devoir 7

**Devoir maison Facultatif**
Pour le 29/05/2017

**Exercice 7.19. Partie A**

Un sondage a été effectué auprès de vacanciers sur leurs pratiques sportives pendant leurs congés.

Ce sondage révèle que 35 % des vacanciers fréquentent une salle de sport pendant leurs congés et parmi ceux-ci, 50 % pratiquent la natation.

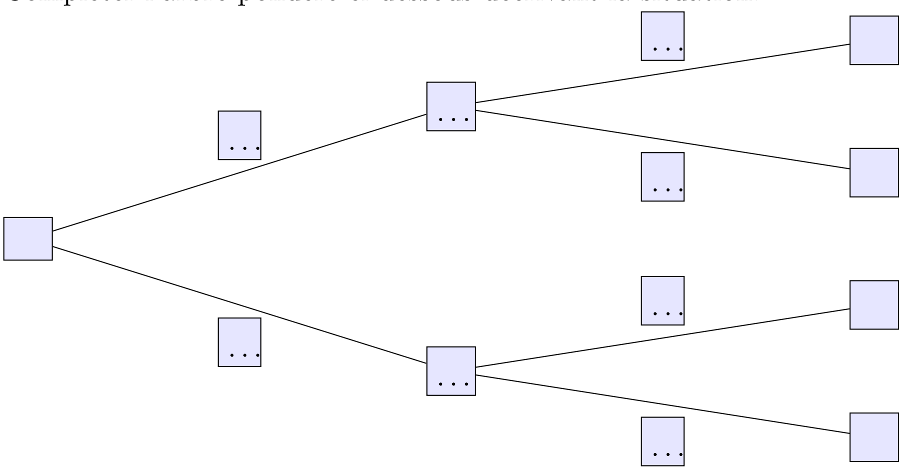
Parmi les vacanciers qui ne fréquentent pas une salle de sport, 56 % pratiquent la natation.

On choisit un vacancier au hasard. On considère les évènements suivants :

$S$ : « le vacancier choisi fréquente une salle de sport »

$N$ : « le vacancier choisi pratique la natation ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.



2. Définir par une phrase l'évènement $S \cap N$.

   **Méthode :** $\cap$ est comme "**et**"

3. Calculer la probabilité de l'évènement $S \cap N$ puis celle de l'évenement $\overline{S} \cap N$.

   **Méthode :** En suivant les branches de l'arbre, on multiplie les probabilités

4. Montrer que la probabilité qu'un vacancier pratique la natation est de $0,539$.

   **Méthode :** On ajoute les probabilités des chemins avec "natation"

5. Définir par une phrase l'événement $p(S \cup N)$ et calculer sa probabilité.

   **Méthode :** Il y a la formule du cours $->$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

**Partie B** On rappelle que $p(N) = 0,539$

On arrondira les résultats à $10^{-4}$ près.

On interroge successivement et de façon indépendante quatre vacanciers pris au hasard (et on assimile cette expérience à un tirage avec remise). Soit $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de ces vacanciers pratiquant la natation pendant leurs congés. Le nombre de vacanciers étant suffisamment grand, on considère que $X$ suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
2. Calculer la probabilité que deux vacanciers exactement pratiquent la natation pendant leurs congés. On arrondira le résultat à $10^{-4}$ près.

   **Méthode :** On utilisera sa calculatrice.

**Exercice 7.20.** Une entreprise produit un grand nombre de vases. On admet que 5 % des vases ont un défaut. On choisit au hasard un échantillon de 100 vases. La production est suffisament importante pour assimiler cet échantillon à un tirage avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire donnant pour tout échantillon le nombre de vases ayant un défaut.

1. Justifier que l'on peut associer à cette situation un schéma de Bernouilli.
2. Justifier que $X$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Calculer la probabilité d'obtenir 5 vases défectueux dans l'échantillon.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 3 vases défectueux dans l'échantillon.
5. Donner l'espérance de $X$.

**Exercice 7.21.** Une urne contient 100 boules indiscernables au toucher.

— 20 boules sont rouges et numérotées 1 et 10 boules sont rouges et numérotées 2 ;
— 15 boules sont vertes et numérotées 3 ;
— 30 boules sont bleues et numérotées 3 ;
— 15 boules sont jaunes et numérotées 4 et 10 boules sont jaunes et numérotées 2.

On tire une boule au hasard dans l'urne et on considère les évènements suivants :

— **A : "la boule tirée est rouge"** ;
— **B : "la boule tirée porte le numéro 2"**.

1. Déterminer la probabilité des évènements $A$ et $\bar{A}$.
2. Décrire par une phrase l'évènement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire par une phrase l'évènement $A \cup B$ et calculer sa probabilité.
4. On tire une boule 5 fois avec remise. On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges obtenues. Justifier que $X$ suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ $p = 0.3$.
5. Déterminer $p(X = 3)$ et $p(X \leqslant 2)$

# Chapitre 8
# Satistiques
21/04/2017

# Cours :

## 1 Contexte

Les valeurs d'une *série statistique* sont souvent réparties autour d'une valeur centrale :
— ce peut être la valeur *moyenne*
— ou ce peut être la valeur *médiane* .

**Remarque :** Ces deux valeurs sont *en général* **différentes** .

D'autres *indicateurs* sont nécessaires pour évaluer la dispersion autour de cette valeur centrale. On utilise principalement deux *indicateurs de dispersion* :
— l' *écart interquartile* , associé à la médiane ;
— l' *écart type* , associé à la moyenne .

On considère une série satistitique $x_1, \dots x_N$.

**Définition 1.** l' effectif d'une valeur est le *nombre de données* (ou d'individus) correspondant à cette valeur.

La *fréquence* d'une valeur est sa proportion dans l'effectif total :

$$\boxed{\text{fréquence} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}}$$

**Exemple 2.** Dans un village, 18 foyers n'ont pas d'enfants, 14 foyers ont 1 enfant, 8 foyers ont 2 enfants, 7 foyers ont 3 enfants et 3 foyers ont 4 enfants.

Déterminer le nombre total de foyer.

**Correction :**

Il y a $18 + 14 + 8 + 7 + 3 = 50$ foyers

Remplir le tableau suivant

| Nmb. d'enfants | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| effectifs | | | | | |
| fréquence | | | | | |

| Nmb. d'enfants | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| effectifs | 18 | 14 | 8 | 7 | 3 |
| fréquence | 0.36 | 0.28 | 0.16 | 0.14 | 0.06 |

## 2 Mediane, quartile, décile

**Définition 3** (Rappel : la médiane)**.** Soit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ une série statitisque *quantitative* (numérique) de $N$ valeur rangées par ordre croissant.

On appelle **médiane** de la série est notée $Me$ et définie par
— la valeur " *du milieu* ", c'est a dire de rang $\frac{N+1}{2}$ si $N$ est impair : $x_{\frac{N+1}{2}}$

— la moyenne des valeur de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ si $N$ est pair : $\frac{x_{N/2}+x_{N/2+1}}{2}$

*Remarque* 10. La *médiane* $Me$ est telle que 50% au moins des valeurs de la série sont *plus petites ou égales* à $Me$.

La médiane n'est pas forcément une *valeur de la série* lorsque $N$ est pair.

C'est une caractéristique de *position.*

**Définition 4** (Quartile)**.**

— On appelle premier quartile d'une série statistique, notée $Q_1$ , la *plus petite valeur* de la série telle que *25% au moins* des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $Q_1$.

— On appelle troisième quartile d'une série statistique, notée $Q_3$ , la *plus petite valeur* de la série telle que *75% au moins* des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $Q_3$.

**Définition 5** (Écart interquartile)**.** On appelle écart interquartile la valeur

$Q_3 - Q_1$ .

C'est une caractéristique de *dispersion.*

**Exemple 6.** On considère la série suivante

| Valeur | 13 | 15 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 6 | 5 | 1 | 3 | 4 |
| Effectifs cumulés | 6 | 11 | 12 | 15 | 19 |

Déterminer la médiane.

**Correction :**

L'effectif total vaut 19 est impair. On doit avoir 9 valeurs avant $Me$ et 9 valeurs après. Donc $Me = 15$.

Déterminer l'écart interquartile de cette série.

**Correction :**

$\frac{19}{4} = 4.75$, donc $Q_1$ est la 5ème valeur. $Q_1 = 13$.
$\frac{19\times3}{4} = 14.25$, donc $Q_3$ est la 15ème valeur. $Q_3 = 18$.

**Exemple 7.** On considère la série suivante

| Valeur | 13 | 15 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 4 | 6 | 2 | 3 | 5 |
| Effectifs cumulés | 4 | 10 | 12 | 15 | 20 |

Déterminer la médiane.

**Correction :**

L'effectif total vaut 20 est pair. On doit avoir 10 valeurs avant $Me$ et 10 valeurs après. La médiane $Me$ est donc la moyenne entre la 10ème et la 11ème valeur : $Me = \frac{15+16}{2} = 15.5$

Déterminer l'écart interquartile de cette série.

**Correction :**

$\frac{20}{4} = 5$, donc $Q_1$ est la 5ème valeur. $Q_1 = 15$.
$\frac{19\times3}{4} = 15$, donc $Q_3$ est la 15ème valeur. $Q_3 = 18$.

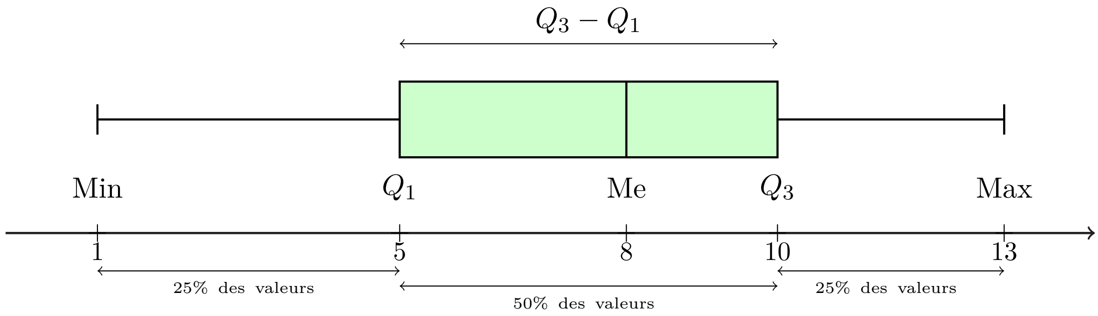
**Définition 8** (Décile)**.** Les *déciles* d'un ensemble de valeurs sont chacune *des neuf valeurs* qui divisent les données triées en dix parties égales .

Le *premier décile* $D_1$ est la *plus petite valeur* telle que *10% au moins* des valeurs de la série soient plus petites ou égale à $D_1$.

Le *neuvième décile* $D_9$ est la *plus petite valeur* telle que *90% au moins* des valeurs de la série soient plus petites ou égale à $D_9$.

## 3 Diagramme en boite

Le *diagramme en boite* représente, avec les quartiles , la médiane et la répartition des valeurs de la série ( *l'étendue* ; max et min) :




Ce diagramme peut être aussi appelé *« boite à moustaches »* ou *« boite à pattes »* .

## 4 Moyenne et écart type

**Définition 9** (Moyenne (pondérée))**.** On considère une série statistitique résumée par le tableau

| valeur | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_N$ |
|---|---|---|---|---|
| effectif | $n_1$ | $n_2$ | $\cdots$ | $n_N$ |
| fréquence | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_N$ |

La moyenne de la série, noté $\overline{x}$ , est *définie* par

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_Nx_N}{n_1 + n_2 + \cdots + n_N} \qquad \left( = \frac{\text{somme des produits de chaque valeur par son effectif}}{\text{effectif total}} \right)$$

La *moyenne* est aussi donnée par $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_Nx_N$

*Remarque* 11. Dans le cas où les valeurs de la série sont regroupées *par classes* , on calcule la moyenne en prenant pour valeur le *milieu de chaque classe* .

La moyenne ne donne pas d'indication sur la *dispersion* de la série
La variance d'une série est moyenne des carrés des écart à la moyenne

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_N(x_N - \overline{x})^2}{n_1 + \cdots + n_N}$$

**Idée :** $V$ "informe" sur le carré de la *distance* entre chaque valeur et la *valeur moyenne*
.

**Définition 10** ( Écart type )**.** L'écart type, noté $\sigma$ (se lit *sigma* ) est définie par $\sigma = \sqrt{V}$.

L'écart type est *une mesure* la dispersion de la série.
Il se calcule à la calculatrice avec les fonctions statistiques :
à savoir : `https://www.youtube.com/watch?v=JPTDZtSrd2o`

# Exercices :

**Exercice 8.1.** La série satistique suivante indique la répartition de 38 élèves selon le nombre de frères et soeurs.

| nbr. de frères et soeurs | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| nbr. d'élèves | 5 | 10 | 13 | 8 | 1 | 1 |
| effectifs cummulés | | | | | | |
| fréqences | | | | | | |

1. Completer le tableau ci-dessus.

   **Correction :**

   | nbr. de frères et soeurs | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
   |---|---|---|---|---|---|---|
   | nbr. d'élèves | 5 | 10 | 13 | 8 | 1 | 1 |
   | effectifs cummulés | 5 | 15 | 28 | 36 | 37 | 38 |
   | fréqences | 0.13 | 0.26 | 0.34 | 0.21 | 0.03 | 0.03 |

2. Calculer la médiane, le premier et le troisième quartile

   **Correction :**

   Il y a 38 valeurs. 38 est pair et $\frac{38}{2} = 19$. La médianne est donc la moyenne de la 19ème et de la 20ème valeur. On trouve $Me = \frac{2+2}{2} = 2$.
   Pour le premier quartile $38/4 = 9,5$. $Q_1$ est donc la 10ème valeur, soit $Q_1 = 1$
   Pour le troisième quartile $3 \times 38/4 = 28,5$. $Q_3$ est donc la 29ème valeur, soit $Q_3 = 3$

3. Donner l'écart interquartile ainsi que l'intervalle interquartile. Interpréter ce dernier résultat.

   **Correction :**

   L'intervalle interquartille vaut $[Q_1; Q_3] = [1; 3]$, au moins la moitié des élèves ont entre 1 et 3 frère ou soeur.
   L'écart interquartile est donné par $Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = 2$.

**Exercice 8.2.** Déterminer à la calculatrice : la moyenne, l'écart type, le 1er et le 3ème quartile et la médianne médiane de la série statistique suivante :

| Classe de valeur | [0 ;10[ | [10 ;15[ | [15 ;30[ | [30 ;40[ | [40 ;80[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 26 | 28 | 22 | 6 |

**Méthode :** Tout d'abord remplacer les classes de valeur par la moyenne correspondante :

| Classe de valeur | ... | 12,5 | ... | ... | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 26 | 28 | 22 | 6 |

Puis utiliser la calculatrice :
`https://www.youtube.com/watch?v=JPTDZtSrd2o`

**Correction :**

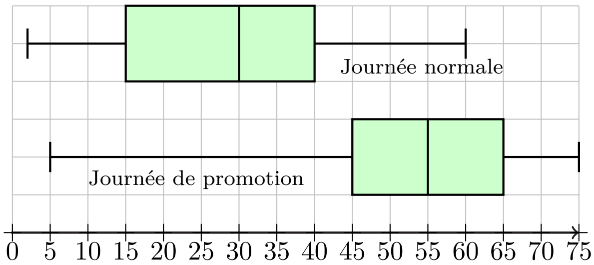
| Classe de valeur | 5 | 12, 5 | 22.5 | 35 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 26 | 28 | 22 | 6 |

`https://www.youtube.com/watch?v=JPTDZtSrd2o` On trouve

$$\overline{x} \approx 22.8, \quad \sigma \approx 13.9, \quad Q_1 = 12.5, \quad Me = 22.5, \quad Q_3 = 35$$

**Exercice 8.3.** Pour une journée de promotion d'un grand magasin, un prospectus affiche "Journée de promotions exceptionnelles ! L'occasion de dépenser moins".

Les diagrammes en boites ci-dessous représentent les montant en euros (arrondis à l'unité) des acchats effectués lors de la journée de promotion et lors d'une journée "normale"




1. Pour chaque journée, donner la médianne des achats ainsi que l'écart interquartile.
   **Correction :**
   Journée normale : $Me = 30$, $Q_1 = 15$ et $Q_3 = 40$ d'où un écart interquartille de $40 - 15 = 25$.
   Journée de promotion : $Me = 55$, $Q_1 = 45$ et $Q_3 = 65$ d'où un écart interquartille de $65 - 45 = 20$.
2. Que pensez-vous de la publicité parlant de "dépenser moins" ?

**Exercice 8.4.**
On a interroger 171 lycéen sur le nombre de CD acheté lors des 6 dernier mois.

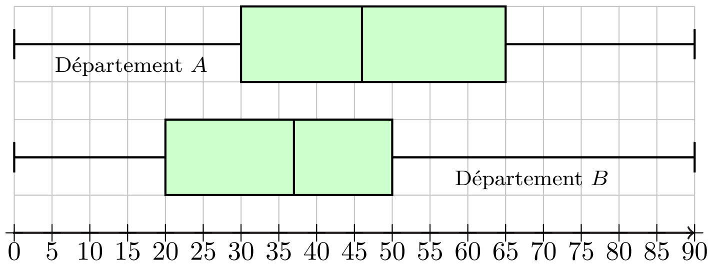
| Nbr. de CD | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 29 | 34 | 38 | 32 | 12 | 14 | 9 | 3 |

1. Determiner la médiane ainsi que le premier et troisième quartile.
   **Correction :**
   il y a 171 (impaire) valeur donc la médiane est la 86ème c'est à dire $Me = 3$ $(29 + 34 = 63$ et $29 + 34 + 38 = 101$.
   On trouve aussi $Q_1 = 2$ (en effet $171/4 \approx 42.75$) et $Q_3 = 4$ (en effet $3 \times 171/4 \approx 128.25$.
2. Interprétez ces résultats
   **Correction :**
   25% des lycéens interrogés ont acheté 2 CDs ou moins, 75% en ont acheté moins de 4 et la 50% ont acheté entre 2 et 4 CDs.
3. Déterminer la moyenne ainsi que l'écart type.
   **Correction :**
   $\overline{x} = 3.34$ et $\sigma = 1.8$
4. Quel pourcentage de lycéeen a acheté un nombre de CD appartenant à l'intervale $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$.
   **Correction :**
   L'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$ vaut $[-0.28; 6,95]$. Il s'agit donc de calculer les pourcentage de lycéen ayant acheter strictement moins de 7 CDs :
   $\frac{159}{171} \approx 0.93 = 93\%$ des lycéen.

# Exercices :

### Exercice 8.5.

On donne ci-dessous les diagrammes en boites représentant les âges des habitants (de moins de 90ans) dans deux départements. Par lecture graphiques jusitfier les affirmations suivantes en précisant les paramètres statistiques utilisés.




1. La proportion de personne de moins de 25 ans est inférieur dans le département A à la proportion dans le département B.
   **Correction :**
   Le premier Quartile dans le diagramme du département $A$ est de $Q_1 = 30$. Donc 25% des habitants du département $A$ ont moins de 30 ans, en particulier la proportion des habitants ayant moins de 25 ans est **plus petite** que 25%
   Le premier Quartile dans le diagramme du département $B$ est de $Q_1 = 20$. Donc 25% des habitants du département $B$ ont moins de 20 ans, en particulier la proportion des habitants ayant moins de 25 ans est **plus grande** que 25%
   La proportion considérée est donc inférieur dans le département $A$
2. La dispersion des âge autour de la médiane est plus importante dans le département $A$
   **Correction :**
   Dans le département $A$ on a $Q_1 = 30$ et $Q_3 = 65$, soit un écart interquartile de $65 - 30 = 35$
   Dans le département $B$ on a $Q_1 = 20$ et $Q_3 = 50$ soit un écart interquartile de $50 - 20 = 30$.
   Ainsi la dispersion est plus importante dans le département $A$ (35) que dans le département $B$ (30)

### Exercice 8.6.

Dans deux entreprises $E_1$ et $E_2$ les salariés sont classé en deux catégories : employés et cadres. On donne dans les tableaux suivants la repartition des salaires (en millier d'euros annuels)en fonction de la situation des employés

| **Entreprise $E_1$** | | | |
|---|---|---|---|
| | Salaire | | |
| Catégorie | $10 \leqslant S < 20$ | $20 \leqslant S < 30$ | $30 \leqslant S < 40$ |
| Centre des classes | | | |
| employés | 170 | 100 | 0 |
| Cadres | 0 | 10 | 20 |
| Total | | | |

| **Entreprise $E_2$** | | | |
|---|---|---|---|
| | Salaire | | |
| Catégorie | $10 \leqslant S < 20$ | $20 \leqslant S < 30$ | $30 \leqslant S < 40$ |
| Centre des classes | | | |
| employés | 280 | 140 | 0 |
| Cadres | 0 | 40 | 40 |
| Total | | | |

**Partie A**

1. Compléter les tableaux en donnant le centre des classes et le total d'employés par classe. On supposera ensuite que tout les éléments d'une classe sont situés au centre.

2. Calculer les moyennes des salaire $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ dans chacune des entreprises.
   **Correction :**
   $\overline{x}_1 = \frac{170\times15+110\times25+20\times35}{170+110+20} = 20$ milliers d'euros annuel en moyenne
   $\overline{x}_2 = \frac{280\times15+180\times25+40\times35}{280+180+40} = 20.2$ milliers d'euros annuel en moyenne
3. Calculer les moyennes $\overline{e}_1$ et $\overline{e}_2$ des salaires des employés dans chacune des entreprises.
   **Correction :**
   $\overline{e}_1 = \frac{170\times15+100\times25}{270} \approx 18.7$ milliers d'euros annuel en moyenne
   $\overline{e}_2 = \frac{280\times15+140\times25}{280+140} \approx 18.3$ milliers d'euros annuel en moyenne
4. Calculer les moyennes $\overline{c}_1$ et $\overline{c}_2$ des salaires des cadres dans chacune des entreprises.
   **Correction :**
   $\overline{c}_1 = \frac{10\times25+20\times35}{30} \approx 31.7$ milliers d'euros annuel en moyenne
   $\overline{c}_2 = \frac{40\times25+40\times35}{80} = 30$ milliers d'euros annuel en moyenne

**Partie B**

1. Pour chaque entreprise, calculer la fréquence (en %) des salaires suivant la catégorie professionnelle. On remplira les 2 tableau ci-dessous
2. Le directeur de l'entreprise $E_2$ annonce "mes salariés sont mieux payés que les votres". Le directeur de l'entreprise $E_2$ répond "mes employés sont les mieux payés, de même mes cadres sont les mieux payés".

   Un des énoncé est il mensonger ? Expliquer ce paradoxe.

# Exercices :

**Exercice 8.7.**

On étudie l'âge des 149 clients d'un vendeur. Les données sont présenté ci-dessous

| Classe | [10 ;15[ | [15 ;20[ | [20 ;25[ | [25 ;30[ | [30 ;35[ | [35 ;45[ | [45 ;55[ | [55 ;70[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centre des classes | | | | | | | | |
| Effectif | 6 | 10 | 40 | 46 | 28 | 12 | 4 | 3 |
| Effectif cumulé croissant | | | | | | | | |

1. Compléter le tableau ci-dessus

**Correction :**

| Classe | [10 ;15[ | [15 ;20[ | [20 ;25[ | [25 ;30[ | [30 ;35[ | [35 ;45[ | [45 ;55[ | [55 ;70[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centre des classes | 12.5 | 17.5 | 22.5 | 27.5 | 32.5 | 40 | 50 | 62.5 |
| Effectif | 6 | 10 | 40 | 46 | 28 | 12 | 4 | 3 |
| Effectif cumulé croissant | 6 | 16 | 56 | 102 | 130 | 142 | 146 | 149 |

2. Calculer l'âge moyen des clients (arrondir à l'unité)

**Correction :**

$\overline{x} = \frac{6\times12.5+10\times17.5+40\times22.5+46\times27.5+28\times32.5+12\times40+4\times50+3\times60}{149} \approx 28$

3. Donner l'écart type associé à cette série.

**Correction :**

Grâce à la calculatrice, on trouve $\sigma = 8.8$

4. Vérifier que l'intervalle $[20;35]$ est inclu dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$. Jusitifier que 75% des client dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$ ?

**Correction :**

$[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma] = [28-8.8;28+8.8] = [19.2;36.8]$ qui contient bien l'intervalle $[20;35]$.
Le nombre de client dans l'intervalle $[20;35]$ est de $40+46+28 = 114$ c'est à dire $\dfrac{114}{149} \approx 0.76 = 76\%$ des clients.
On bien plus de 75% des clients dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$.

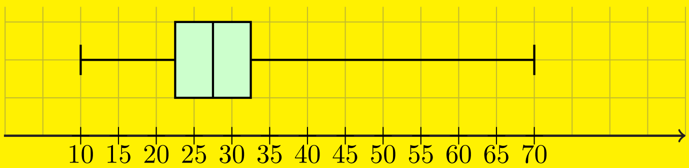
5. À l'aide des effectifs cumulés croissants, donner la médiane, le premier et troisième quartile.

**Correction :**

Il y a 179 valeur donc la médianne correspond à la 90ème valeur (89 plus petites et 89 valeurs sont plus grandes). On a donc $Me = 27.5$.
Comme $\frac{179}{4} = 37.25$, on a $Q_1 = 22.5$ est la 38ème valeur et $Q_3 = 32.5$ la 112ème valeur.

6. Illustrer ces résultat par un diagrame en boite.

**Correction :**

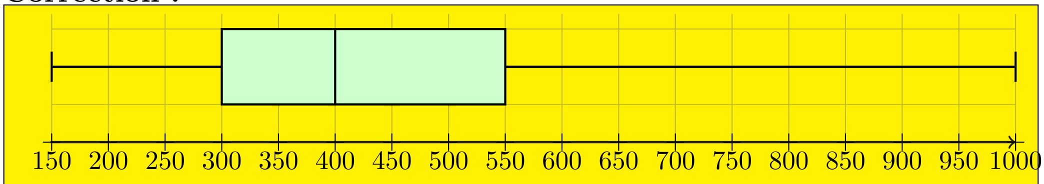



**Exercice 8.8.**

Dans un centre administratif, on compte le nombre de dossier traités chaque jour ouvrable pendant un mois :

250, 550, 350, 400, 850, 350, 550, 600, 400, 1000, 500, 550, 150, 300, 450, 500, 550, 250, 350, 300, 200, 250

1. Calculer le nombre moyen de dossier traité
   **Correction :**
   $\overline{x} = 438.6$ soit environ 439 dossier journalier.
2. Déterminer la médiane, le premier et le troisème quartile.
   **Méthode :** Commencer par trier par ordre croissant les valeurs et les compter.

   **Correction :**
   On a 22 valeurs, la médiane est donc la moyenne entre la 11ème et la 12ème valeur (triées par ordre croissant). Donc $Me = 400$
   Le premier quartile est donné par la 6ème valeur ($\frac{22}{4} = 5.5$), soit $Q_1 = 300$. Le troisième quartile est donnée par la 17ème valeur ($\frac{22\times 3}{4} = 16.5$), soit $Q_3 = 550$
3. Réaliser le diagramme en boite correspondant
   **Correction :**
   
   
4. Le centre fonctionne de façon staisfaisante si au moins la moitié des jours ouvrable, le centre traite entre 300 et 550 dossiers. Le centre fonctionne t il de façon satisfaisante.
   **Correction :**
   L'intervalle interquartile vaut $[Q_1; Q_3] = [300; 550]$. On en déduit que pour 50% des jours ouvrables, le centre à traité entre 300 et 550 dossiers, il fonctionne donc de façon satisfaisante.

**Exercice 8.9.** Un atelier de montage d'ordinateurs tolère que 2% des écrans livrés soient déteriorés. À chaque livraison, on prélève un lot de 150 écrans qui sont controlé (on admet que cela correspond a un tirage au hasard avec remise).

On note $X$ le nombre d'écrans déteriorés

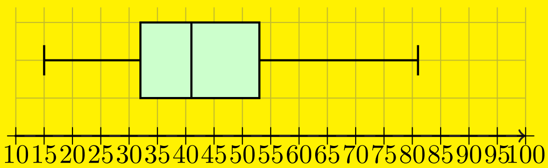
1. Vérifier que $X$ suit un loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   **Correction :**
   On répète 150 fois une expérience aléatoire ayant 2 issues : SUCCES – l'écrans est déterioré – avec une probabilité de $p = 0.02$ et ECHEC – l'écran n'est pas déterioré.
   $X$ compte le nombre de succès lors de 150 répétition. $X$ suit donc une loi binomial de paramètre $n = 150$ et $p = 0.02$
2. Déterminer la probabilité que dans le lot 3 ecrans soit déteriorés
   **Correction :**
   À l'aide de la calculatrice on trouve $p(X = 3) = 0.22$
3. Déterminer la probabilité que 6 écran ou moins soit déteriorés. Puis la probabilité que 144 écran ou plus soit en bon état

**Correction :**

$p(X \leqslant 6) = 0.97$,
La probabilité que 144 ou plus soit en bon état est la probabilité que 6 écran ou moins soit déteriorés, c'est à dire 0.97

# Exercices :

**Exercice 8.10.**
Dans un atelier de réparation, on compte le nombre d'appareils réparés chaque jour ouvrable pendant un mois :
55, 15, 35, 40, 52, 37, 54, 61, 42, 81, 52, 53, 17, 33, 42, 52, 55, 25, 38, 32, 24, 25

1. Calculer le nombre moyen d'appareils réparés chaque jour
**Correction :**
$\overline{x} = 41.8$ soit environ 41.8 dossier journalier.
2. Déterminer la médiane, le premier et le troisème quartile.
**Méthode :** Commencer par trier par ordre croissant les valeurs et les compter.
**Correction :**
On a 22 valeurs, la médiane est donc la moyenne entre la 11ème et la 12ème valeur (triées par ordre croissant). Donc $Me = 41$
Le premier quartile est donné par la 6ème valeur ($\frac{22}{4} = 5.5$), soit $Q_1 = 32$. Le troisième quartile est donnée par la 17ème valeur ($\frac{22 \times 3}{4} = 16.5$), soit $Q_3 = 53$
3. Réaliser le diagramme en boite correspondant
**Correction :**


4. L'atelier fonctionne de façon staisfaisante si au moins la moitié des jours ouvrable, le centre répare entre 30 et 55 appareils. L'atelier fonctionne t il de façon satisfaisante.
**Correction :**
L'intervalle interquartile vaut $[Q_1; Q_3] = [32; 53]$. On en déduit que pour 50% des jours ouvrables, l'atelier a réparer entre 30 et 55 appareils, il fonctionne donc de façon satisfaisante.

**Exercice 8.11.** On iterroge un échantillon de 3668 personnes dans une population de plusieurs millions de personnes dont 20% à voter pour un candidat C. On assimille cet échantillon avec un tirage au hasard avec remise.
On note $X$ le nombre personne de l'échantillon ayant voté pour le candidat C.

1. Vérifier que $X$ suit un loi binomiale dont on donnera les paramètres.
**Correction :**
On répète 3668 fois une expérience aléatoire ayant 2 issues : SUCCES – la personne a voté pour C – avec une probabilité de $p = 0.2$ et ECHEC – la personne n'a pas voté pour C.
$X$ compte le nombre de succès lors de 3668 répétition. $X$ suit donc une loi binomial de paramètre $n = 3668$ et $p = 0.2$
2. Déterminer la probabilité que dans l'échantillon 733 personnes aient voté pour C.
**Correction :**
À l'aide de la calculatrice on trouve $p(X = 733) = 0.016$

3. Déterminer la probabilité que 685 personnes ou moins aient voté pour C. Puis la probabilité que 795 personnes ou plus aient voté pour C.
   **Correction :**
   $p(X \leqslant 685) \approx 0.023$,
   La probabilité que 795 personnes ou plus est voté pour C est :
   $p(X \geqslant 795) = 1 - p(X \leqslant 794) \approx 1 - 0.99 = 0.01$

**Exercice 8.12.** Un automobiliste est souvent confronté au embouteillages pour aller rejoindre son lieu de travail. Il a relavé la durée de son trajet pendant un trimestre.

| durées (par classes) | $15 \leqslant S < 20$ | $20 \leqslant S < 25$ | $25 \leqslant S < 30$ | $30 \leqslant S < 35$ | $35 \leqslant S < 40$ | $40 \leqslant S < 45$ | $45 \leqslant S < 50$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centre des classes | | | | | | | |
| Nombre de trajets | 10 | 17 | 24 | 7 | 4 | 2 | 1 |

1. En utilisant votre calculatrice, déterminer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type $\sigma$ de la série (arrondi à $10^{-1}$ près).
2. Déterminer l'intervalle $I = [\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$.
3. Combien de trajets sont dans l'intervalle I ci-dessus ? Quel est le pourcentage de cas.

# Pour préparer le - Devoir 8

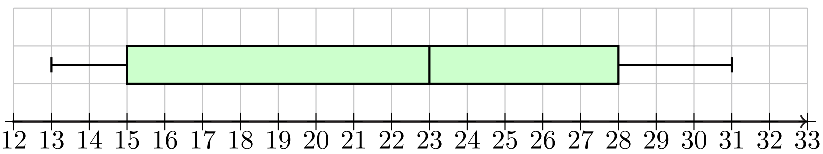
**Exercice 8.13.** Un entreprise produit des rondelles métalliques. On admets que 6 % des rondelles ont un diamètre defectueu. On prélève au hasard 150 rondelles. Le nombre total de rondelles est suffisament important pour assimiler cet échantillon à un tirage au hasard avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire donnant pour tout échantillon le nombre de rondelles defectueuses.

1. Justifier que $X$ suit une loie binomiale dont on donnera les paramètres
   **Correction :**
   La variable compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli : on tire 150 fois de façon indépendantes une rondelles, il n'y a que 2 issues (SUCCÈS la rondelle est défectueuse $p = 0.06$ ou ÉCHEC la rondelle est conforme.
   Les paramètres de la loi binomiale de la variable $X$ sont $p = 0.06$ et $n = 150$
2. Calculer la probabilité que 9 rondelles soient défectueuses.
   **Correction :**
   On calcule avec la calculatrice $p(X = 9) \approx 0,136$
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 15 rondelles défectueuses dans l'échantillons.
   **Correction :**
   On calcule avec la calculatrice $p(X \leqslant 15) \approx 0,981$

**Exercice 8.14.** Sur deux site A et B on a relevé la température toute les heures pendant 4 jours

**Partie A** On donne le diagramme en boite qui résume les résultats pour les températures du site A.

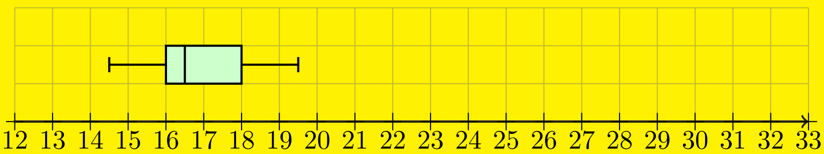



1. Quelle est la valeur médiane des température du site A.
   **Correction :**
   On lit sur le diagrame $Me = 23$
2. Quel est le pourcentage d'heures dont la température est supérieure à 15 ˚C. On justifiera le résultat.
   **Correction :**
   On lit $Q_1 = 15$. Donc 25% des heures la température est inférieure à 15 ˚C. De là pour 75% des relevé, la température est supérieure à 15 ˚C.
3. Donner l'écart interquartile ainsi que l'intervalle interquartile et donner une interprétation de ce résultat.
   **Correction :**
   On lit $Q_3 = 28$. On en déduit que l'écart interquartile vaut $Q_3 - Q_1 = 28 - 15 = 13$.
   L'intervale interquartile est $[Q_1; Q_3] = [15; 28]$ ; c'est à dire que 50% des températures sont entre 15 et 28 ˚C.

**Partie B** Pour le site $B$ on donne le tableau suivants :

| ˚C | 14,5 | 15 | 15,5 | 16 | 16,5 | 17 | 17,5 | 18 | 18,5 | 19 | 19,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nbr. d'heures (effectif) | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 10 | 11 | 9 | 7 | 7 | 4 |
| Effectifs cumulés | | | | | | | | | | | |
| fréquence (0.01 près) | | | | | | | | | | | |

1. Déterminer la température moyenne à 0,1 ˚C près des température du B.
   **Correction :**
   on a $\overline{x} \approx 16.8$˚C.
2. Compléter le tableau ci-dessus.
   **Correction :**
   À faire tout seul !
3. Déterminer la médiane et les premier et troisième quartiles.
   **Correction :**
   L'effectif total est de 97. La médiane est donc la $\frac{98}{2} = 49$ième valeur. On a donc $Me = 16.5$.
   Le premier quartile est donné par la 25ième valeur ( car $\frac{97}{4} = 24,25$) et donc $Q_1 = 16$.
   De même $Q_3$ est donné par la 75ième valeur (car $\frac{97 \times 3}{4} = 74.75$), soit $Q_3 = 18$.
4. En utilisant la même graduation que dans la question 1., dessiner le diagramme en boite résumant les résultats de la question précédente.
   **Correction :**




**Exercice 8.15.** Sur une chaine de production de barres métaliques (profilés), on a mesuré la longueur de 100 barres (en mm). On a obtenu la série suivante.

| taille | 120 | 122.5 | 125 | 127.5 | 130 | 132.5 | 135 | 137.5 | 140 | 142.5 | 145 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 2 | 3 | 5 | 10 | 10 | 19 | 19 | 12 | 13 | 4 | 3 |

1. Calculer à 0,1 près la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type $\sigma$ de cette série.
   **Correction :**
   Utiliser votre calculatrice ! $\overline{x} = 133.65$ et $\sigma = 5.6$
2. La production est commercialisée lorsqu'au moins 95% des 100 barres de l'échantillon ont une longueur appartenant à $[\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma]$. Est-ce le cas ?
   **Correction :**
   Il faut calculer $\overline{-}\sigma = 128.05$ puis $\overline{x} + \sigma = 139.25$.
   Combien de valeur sont comprise entre ces deux valeur ? 60 barres
   Conclusion ? La production n'est pas commercialisée

# Comme au Devoir 8

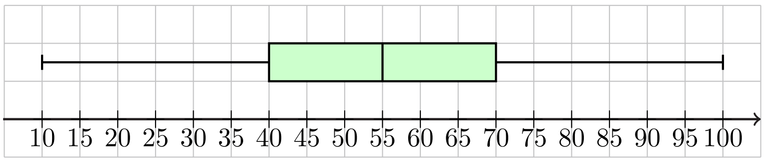
**Exercice 8.16.** Un entreprise produit un grand nombre d'écrans. On admets que 3 % des écrans sont defectueux. On prélève au hasard 20 écrans. Le nombre total d'écrans est suffisament important pour assimiler cet échantillon à un tirage au hasard avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire donnant pour tout échantillon le nombre de d'écran défectueux.

1. Justifier que $X$ suit une loie binomiale dont on donnera les paramètres
   **Correction :**
   La variable compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli : on tire 20 fois de façon indépendantes un écrans, il n'y a que 2 issues (SUCCÈS l'écrans est défectueux $p = 0.03$ ou ÉCHEC l'écran est conforme.
   Les paramètres de la loi binomiale de la variable $X$ sont $p = 0.03$ et $n = 20$
2. Calculer la probabilité qu'aucun écran ne soit défectueux.
   **Correction :**
   On calcule avec la calculatrice $p(X = 0) = 0,544$
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 2 écrans défectueux dans l'échantillons.
   **Correction :**
   On calcule avec la calculatrice $p(X \leqslant 2) = 0,979$

**Exercice 8.17.** Un jardinier a deux lots A et B de bulbes de tulipes de provenances différentes. Il a pesé chaque bulbe et relevé leur masse en grammes.

**Partie A** On donne le diagramme en boite qui résume les résultats pour les bulbes du lot A.

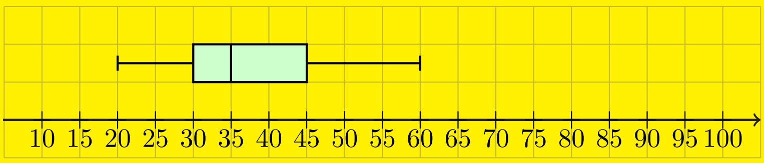



1. Quelle est la valeur médiane du poids des bulbes.
   **Correction :**
   On lit sur le diagrame $Me = 55$
2. Quel est le pourcentage de bulbes dont la masse est supérieure à 40 g. On justifiera le résultat.
   **Correction :**
   On lit $Q_1 = 40$. Donc 25% des bulbes pèsent moins de 40g. De là 75% des bulbes pèse plus de 40g.
3. Donner l'écart interquartile ainsi que l'intervalle interquartile et donner une interprétation de ce résultat.
   **Correction :**
   On lit $Q_3 = 70$. On en déduit que l'écart interquartile vaut $Q_3 - Q_1 = 70 - 40 = 30$.
   L'intervale interquartile est $[Q_1; Q_3] = [40; 70]$ ; c'est à dire que 50% des bulbes pèsent entre 40 et 70 grammes.

**Partie B** Pour le lot $B$ on donne le tableau suivants :

| Masse (g) | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nbr. de bulbe (effectif) | 10 | 14 | 22 | 25 | 18 | 12 | 8 | 6 | 5 |
| Effectifs cumulés | | | | | | | | | |
| fréquence (0.01 près) | | | | | | | | | |

1. Déterminer la masse moyenne au gramme près des bulbes du lot B.
   **Correction :**
   on a $\overline{x} \approx 37$.
2. Compléter le tableau ci-dessus.
   **Correction :**
   À faire tout seul !
3. Déterminer la médiane et les premier et troisième quartiles.
   **Correction :**
   L'effectif total est de 120. On a donc $Me = \frac{35+35}{2} = 35$.
   Le premier quartile est donné par la $\frac{120}{4} = 30$ème valeur soit $Q_1 = 30$.
   De même $Q_3$ est donné par la $\frac{120\times3}{4} = 90$ème valeur, soit $Q_3 = 45$.
4. En utilisant la même graduation que dans la question 1., dessiner le diagramme en boite résumant les résultats de la question précédente.
   **Correction :**




**Exercice 8.18.** Sur une chaine de conditionnement de sauce tomate d'une entreprise, le service qualité veut contrôler la quantité de sauce contenue dans chaque pot. Le contenue théorique est de 500 mL. Sur un échantillon de 400 pots, on a obtenu la série suivante.

| Contenu | 486 | 488 | 490 | 492 | 494 | 496 | 498 | 500 | 502 | 504 | 506 | 508 | 510 | 512 | 514 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 2 | 3 | 8 | 14 | 32 | 46 | 60 | 68 | 63 | 47 | 32 | 13 | 8 | 2 | 2 |

1. Calculer à 0,1 près la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type $\sigma$ de cette série.
   **Correction :**
   Utiliser votre calculatrice !
2. La production est commercialisée lorsqu'au moins 95% des 400 pots de l'échantillon ont un contenu appartenant à $[\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma]$. Est-ce le cas ?
   **Correction :**

# Chapitre 9
# Probabilités II
18/05/2017

## Exercice :

**Exercice 9.1.** Une entreprise se fait livrer des optiques de souris informatique. D'un commun accord, une tolérance de 2% d'optiques déteriorées est tolérée entre l'entreprise et son fourniseur. À la livraison on prélève 150 optiques pour les controler (on assimilera cela à un tirage au hasard avec remise)

On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre d'optiques défectueuses

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
**Correction :**
On répète 150 fois de façon indépendante (tirage avec remise) une expérience aléatoire ("prendre une optique au hasard") n'ayant que deux issues possibles : Succès "l'optique est déteriorée" ($p = 0,02$) et ÉCHEC " l'optique est conforme". C'est un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire $X$ compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, elle suit donc la loie binomiale de paramètre $n = 150$ et $p = 0,02$
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait auncune optique déteriorée à $10^{-3}$. Donner ensuite cette probailité en %.
**Correction :**
$P(X \leqslant 0) \approx 0,048$ soit 4,8%
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 6 optiques déteriorées à $10^{-3}$. Donner ensuite cette probailité en %.
**Correction :**
$P(X \leqslant 6) \approx 0,969$ soit 96,9%
4. On effectue le prélèvement, 5 optiques sont déteriorées. Ce résultat est il raisonnable au vue de la question précédente ?
**Correction :**
C'est raisonnable : la théorie nous dit que dans 96,9% des cas, le nombre d'optique et inférieur à 6 ; 5 correspond à ce critère.
5. Quelque mois plus tard, on effectue un autre prélèvement sur une autre livraison, 7 optiques sont déteriorées. Ce résultat est- il raisonnable au vue des question précédentes ?
**Correction :**
Ce n'est pas raisonable, D'après la 3ième question, il n'y a que 3,1% de probabilité d'obtenir 7 ou plus d'optiques déteriorées
6. Que peut on penser ?

**Exercice 9.2.** Dans un département, une comission environementale est composée de 25 citoyens tirés au sort. On admet que la proportion de femmes dans le département est de 49%. La population est suffisament élevé pour assimilé se tirage à un tirage au sort avec remise.

On note $X$ le nombre possible de femmes dans la comission.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
   **Correction :**
   On répète 25 fois de façon indépendante (tirage avec remise) une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles "tirer au sort une personne" : Succès "c'est une femme" ($p = 0,49$) et ÉCHEC "c'est un homme". C'est un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire $X$ compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, elle suit donc la loie binomiale de paramètre $n = 25$ et $p = 0,49$
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 12 femmes dans le conseil ; puis celle qu'il y en ait exactement 13.
   **Correction :**
   $P(X = 12) \approx 0,157$ soit 15,7% $P(X = 13) \approx 0,151$ soit 15,1%
3. Qu'en conclure sur la probable parité du conseil ?
   **Correction :**
   Le conseil ne sera "paritaire" qu'avec une probabilité de 30%.
4. Déterminer la probabilité qu'il y ait 6 femmes ou moins dans la commission, puis celle qu'il y en ait 7 ou moins. Donner ensuite cette probailité en %.
   **Correction :**
   $P(X \leqslant 6) \approx 0,0096$ soit 0,96%
   $P(X \leqslant 7) \approx 0,0273$ soit 2,73%
5. Déterminer la probabilité qu'il y ait 16 femmes ou moins dans la commission puis celle qu'il y en ait 17 femmes ou moins. Donner ensuite cette probailité en %.
   **Correction :**
   $P(X \leqslant 16) \approx 0,9562$ soit 95,62%
   $P(X \leqslant 17) \approx 0,9830$ soit 98,3%
6. Lors du tirage au sort, avec une probabilité de 95%, le nombre de femme devrait être compris entre deux valeurs $a$ et $b$. Au vue des questions précédentes proposé des valeurs pour $a$ et $b$.

   **Correction :**
   $a = 7$ et $b = 17$
7. Il se trouve que suite au tirage au sort le conseil ne comporte que 9 femmes seulement. Certains prétendent qu'il y a eu manipulation. Qu'en penser au vue des question précédente
   **Correction :**
   Statistiquement et en terme de probabilité, on peut dire que dans 95% des cas le conseil comportera entre 7 et 17 femmes. Dans seulement 30,8% des cas il sera "paritaire".

# Exercice :

**Exercice 9.3.** Une entreprise produit des rivets étanches pour des verrendas en PVC. La nouvelle machine encore à l'essai à un taux produit non conforme de 0,5%. On fait un prélèvement de 2500 sur la production mensuelle (on assimile cet échantillon à un tirage au hasard avec remise).

On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de rivets non conformes

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
   **Correction :**
   On répète 2500 fois de façon indépendante (tirage avec remise) une expérience aléatoire ("prendre un rivet au hasard") n'ayant que deux issues possibles : Succès "le rivet est non conforme" ($p = 0,005$) et ÉCHEC "le rivet est conforme". C'est un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire $X$ compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, elle suit donc la loie binomiale de paramètre $n = 2500$ et $p = 0,005$
2. Calculer 0,5% de 2500. À votre avis, combien de rivet devrait être défecteux dans l'échantillon.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait 12 rivets defectueux à $10^{-3}$. Donner ensuite cette probailité en %. **Méthode : fonction Binomfdp** de la calculatrice
   **Correction :**
   $P(X = 12) \approx 0,113$ soit 11,3%
4. Déterminer la probabilité qu'il y ait 13 rivets defectueux à $10^{-3}$. Donner ensuite cette probailité en %.
   **Correction :**
   $P(X = 13) \approx 0,109$ soit 10,9%
5. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 5 rivets non comformes à $10^{-4}$ ; puis déterminer celle qu'il y ait au plus 6 rivets non conformes
   **Correction :**
   $P(X \leqslant 5) \approx 0,0146$ soit 1,46% $P(X \leqslant 6) \approx 0,0342$ soit 3,42%
6. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 19 rivets non comformes à $10^{-4}$ ; puis déterminer celle qu'il y ait au plus 20 rivets non conformes
   **Correction :**
   $P(X \leqslant 19) \approx 0,9698$ soit 96,98% $P(X \leqslant 20) \approx 0,9829$ soit 98,29%
7. En utilisant les question précédentes, donner un intervalle contenant le nombre de rivet défectueux avec une probabilité d'au moins 95%
   **Correction :**
   Dans plus de 95% des cas, il y a entre 6 et 20 rivets
8. Dans l'échantillon de 2500 rivets, 17 sont non conformes. Qu'elle est la fréquence (la proportion) de rivets non conformes dans l'échantillon ? Faut-il rendre la machine à la fin de la période d'essai ?
   **Correction :**
   La proportion de rivet non conforme dans l'échantillon est de $\frac{17}{2500} \approx 0,7\%$. Cependant ce nombre (et cette proportion) est l'intervalle de la quetion précédente. C'est donc normal !

**Exercice 9.4.** Dans une ville, un maire assure que 55% des electeurs voteront pour lui au prochaine élection. Il commande ainsi un sondage. Ce sondage est effectué au près de 200 personne prise au hasard parmi les électeur.

La population est suffisament élevé pour assimilé se tirage à un tirage au sort avec remise.

On note $X$ le nombre possible d'électeur qui voteront pour le maire.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
   **Correction :**
   On répète 200 fois de façon indépendante (tirage avec remise) une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles "tirer au sort une personne" : Succès "elle votera pour le maire" ($p = 0,55$) et ÉCHEC "elle ne votera pas pour lui". C'est un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire $X$ compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, elle suit donc la loie binomiale de paramètre $n = 200$ et $p = 0,55$
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 55% des 200 personnes qui voteront pour le maire
   **Correction :**
   $200 \times 0.55 = 110$ donc $P(X = 110) \approx 0,057$ soit 5,7%
3. Déterminer $a$ le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$, On commencera avec $a = 94$ puis $a = 95$, etc.
   **Correction :**
   On trouve $P(X \leqslant 95) \approx 0,0199$ soit 1,99%
   $P(X \leqslant 96) \approx 0,0278$ soit 2,78%
4. Déterminer $b$ le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$, On commencera avec $a = 120$ puis $a = 121$, etc.
   **Correction :**
   $P(X \leqslant 123) \approx 0,973$ soit 95,62%
   $P(X \leqslant 124) \approx 0,981$ soit 98,3%
5. Lors du sondage avec une probabilité de 95%, le nombre de personnes votant pour le maire devrait être compris entre deux valeurs $a$ et $b$. Au vue des questions précédentes proposé des valeurs pour $a$ et $b$.
   **Correction :**
   $a = 96$ et $b = 124$
6. Il se trouve que lors du sondage, 95 personnes affirment vouloir voter pour le maire. Que pensez alors de l'affirmation du maire ?
   **Correction :**
   Vraissemblablement, le maire est trop confiant !

# Cours :

## 1 Rappels : Schéma de Bernoulli et loi binomiale

**Définition 1.** Un *schéma de Bernoulli* est la répétition $n$ fois d'une expérience aléatoire ne comportant que *deux issues* ; l'une, notée $S$, est appelée *"succès"* , l'autre, notée $\overline{S}$ , appelée *"échec"* .

On note $p$ la probabilité de $S$ .

**Définition 2.** Soit un *schéma de Bernoulli* constitué de $n$ expériences et soit $X$ le nombre de succès obtenu.

- On dit que $X$ est la *variable aléatoire* associé à ce schéma.
- Si $k$ est un entier naturel compris entre 0 et $n$, l'évènement *"on a obtenu $k$ succès"* est noté $\{X = k\}$ et la probabilité de cet évènement est notée $p(X = k)$ .
- Si $k$ est un entier naturel compris entre 0 et $n$, l'évènement *"on a obtenu au plus $k$ succès"* est noté $\{X \leqslant k\}$ et la probabilité de cet évènement est notée $p(X \leqslant k)$ .

**Définition 3.** On dit que la *variable aléatoire $X$* suit la loi binomiale de paramètre $n$ et $p$, notée $B(n, p)$ .

## 2 Intervalle de Fluctuation à 95%

**Contexte :** Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain paramtère est $p$ .

On souhaite *estimer* sur un *échantillon de taille* $n$ la fréquence $f$ d'apparition du caractère.

$$f = \frac{\text{nbr. d'apparition}}{n}$$

On prélève dans la population au hasard et avec remise, un échantillon de taille $n$.

La *variable aléatoire* $X$ comptant le nombre d'individus ayant le caractère doit suivre la *loi binomiale* de paramètres $n$ et $p$ .

**Définition 4.** L'intervalle de fluctuation à 95% *d'une fréquence* , sur un *échantillon aléatoire* de taille $n$ , selon la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$$

avec

- $a$ le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$
- et $b$ le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$

**Règle :**

- Si $f \in \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ *l'hypothèse* (sur $p$) est acceptée au risque de 5% ;
- Si $f \notin \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ *l'hypothèse* (sur $p$) est rejetée au risque de 5% ;

# Exercice :

**Exercice 9.5.** Un producteur de rillettes de poisson affirme que 98% des boîtes affichant 100g produites contiennent au moins 100g de rillettes.

1. Pour un échantillon de 60 boîtes déterminer l'intervalle de fluctuation à 95%.

   **Méthode :**
   - Identifier la loi (**ici binomiale**) et ces paramètres (ici $n =$ et $p =$ )
   - **On cherche** $a$ avec $P(X \leqslant a) > 0,025$ et $b$ avec $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ ($a$, $b$) le plus petit possible

   **Méthode : Avec la calculette :** Touche $\boxed{\text{f(x)}}$ puis "BinomFRep" avec "$x$ : $X$" enfin $\boxed{\text{table}}$ (c'est à dire : $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{graphe}}$)

   **Correction :**

   **La calculette** permet de trouver $a = 56$ et $b = 60$, d'où un intervalle de fluctuation donné par $I[\frac{56}{60}; \frac{60}{60}] = [0.93; 1]$

2. Parmi les 60 boîtes d'un échantillon, 55 contiennent au moins 100g de rillettes. Que peut on penser de l'affirmation du producteur.

   **Correction :**

   Vraissemblablement, son affirmation est fausse : dans 95% des cas, il devrait y avoir 56 boîtes ou plus contenant au moins 100g de rillettes.

**Exercice 9.6.** Dans un centre d'appel d'un service social, l'objectif est que 90% des client n'attende pas plus de 3 minutes.

1. Déterminer avec l'aide de la calculatrice, l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des personnes attendant moins de 3 minutes pour un échantillon de 100 personnes.

   On compêtera d'abord $n =$ et $p =$

   **Correction :**

   On a $n = 100$ (nbr. de répétitions) et $p = 0.90$ (la probabilté supposée du succès).
   **La calculette** permet de trouver $a = 84$ et $b = 95$, d'où un intervalle de fluctuation donné par $I[\frac{84}{100}; \frac{95}{100}] = [0.81; 0.95]$

2. Sur un échantillon de 100 personner, 80 ont attendu moins de 3 minutes. Peut on penser que le centre d'appels réalise son objectif ?

   **Correction :**

   Comme $80 \notin [84, 95]$, on peut penser qu'au risque de 5% le centre ne réalise pas son objectif.

**Exercice 9.7.** Dans un lycée, le provisuer affirme que 30% des élève pratique une activité sportive en dehors du lycée.

1. Soit $X$ la vriable aléatoire donnant le nombre d'élève pratiquant le sprot en dehors du lycée parmi un échnatillon de 15 élève. Vérifier que $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   **Correction :**

   On répète 15 fois de façon indépendante un experience aléatoire "tirer au hasard un élève" qui n'a que deux issue possible "l'élève fait du sport en dehors du lycée" SUCCÈS avec $p = 0.3$ ou "l'élève ne fait pas de sport" ECHEC. La variable $X$ compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 15$, $p = 0.3$

2. Déterminer pour un échantillon de 15 élèves, l'intervalle de fluctuation à 95%.
   **Correction :**
   **La calculette** permet de trouver $a = 1$ et $b = 8$, d'où un intervalle de fluctuation donné par $I[\frac{1}{15}; \frac{8}{15}] = [0.07; 0.53]$
3. Sur un échantillon de 15 élèves, 2 pratiquent du sport en dehors du lycée. Peut-on dire, au seuil des 95%, que le proviseur à raison ?
   **Correction :**
   2 appartient à l'intervarlle $[1, 8]$, donc au seuil de 95%, on peut penser que le proviseur à raison.

La semaine prochaine Révision :
**AVOIR** sa calculette
**AVOIR** son cours
**Denière note :** "Comme au bac" en 3 séances – Par groupe

# Chapitre 10
## Révision
12/06/2017

**Exercice 1** **5 points**

**Partie A**

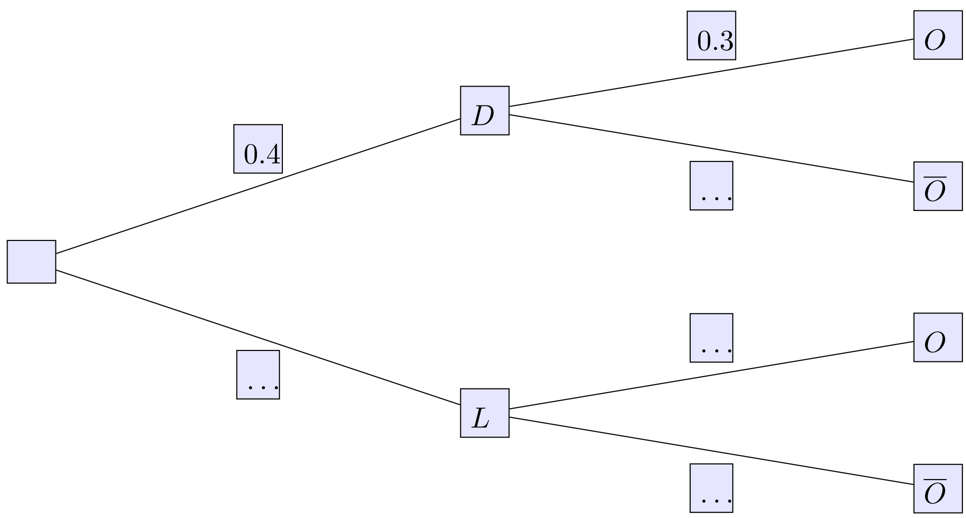
Un conservatoire de musique propose deux parcours à ses élèves : un parcours diplômant et un parcours loisir. On observe que 40 % des élèves choisissent le parcours diplômant. Parmi ceux qui ont sélectionné le parcours diplômant, 30 % choisissent de faire partie d'un orchestre. Parmi les élèves ayant choisi le parcours loisir, 25 % choisissent de faire partie d'un orchestre.

On sélectionne un élève de ce conservatoire au hasard.

On note :

- $D$ l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours diplômant. »
- $L$ l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours loisir. »
- $O$ l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi de faire partie d'un orchestre. »

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant :




2. Définir par une phrase l'évènement $D \cap O$ et calculer sa probabilité.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement $O$.

**Partie B**

Pour le concert de fin d'année, l'auditorium du conservatoire dispose de 400 places réservées aux parents d'élèves. On s'intéresse au nombre $X$ de parents d'élèves assistant au concert de fin d'année dans l'auditorium.

On estime à $0,75$ la probabilité que chacun des 500 parents d'élèves assiste au concert. On admet que $X$ suit la loi binomiale de paramètres 500 et $0,75$.

1. Calculer l'espérance de $X$.

2. Déterminer la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant. On arrondira le résultat au millième.

**Exercice 2** **4 points**

Entre 2004 et 2014, le SMIC (Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance) mensuel brut est passé de 1 154 € à 1 445 €.

1. Selon une étude, le loyer moyen d'un studio en 2014 à Bordeaux est de 470 €. Quel pourcentage du SMIC (arrondi à 0,1 %) cela représente-t-il ?

   **a.** 40,7 % **b.** 4,7 % **c.** 32,5 % **d.** 3,07 %

2. Quel est le taux d'évolution du SMIC (arrondi à 0,1 %) entre 2004 et 2014 ?

   **a.** 18,8 % **b.** 2,91 % **c.** 20,1 % **d.** 25,2 %

3. Quel est le taux d'évolution annuel moyen du SMIC (arrondi à 0,1 %) entre 2004 et 2014 ?

   **a.** 2,3 % **b.** 25,2 % **c.** 1,4 % **d.** 2,5 %

4. Entre 2013 et 2014, le SMIC a augmenté d'environ 1 %. En supposant que cette évolution annuelle se poursuive dans les cinq prochaines années, quelle serait la valeur du SMIC mensuel brut en 2019 (arrondie à l'euro) ?

   **a.** 1 517 € **b.** 1 450 € **c.** 2 327 € **d.** 1 519 €

**Lignes de Brouillon**

**Exercice 3** **5 points**

Après une décision collective, les copropriétaires d'un immeuble votent la réalisation de travaux sur la façade du bâtiment.

**Partie A : la facture**

Compléter la facture suivante, reçue par la copropriétaire Madame M.

| **Prestations** | Prix hors taxe | Prix T.V.A. incluse (T.V.A de 10%)* |
|---|---|---|
| - Travaux sur la façade | 5 002 € | …… |
| - Autres prestations | …… | …… |
| **Total** | …… | Total : 9 152 € |

* La valeur de la T.V.A. sur ce type de travaux est de 10 %

**Partie B : l'épargne de Madame M.**

Madame M. dépose le 1er juin 2015 un capital de 5 000 €, sur un compte non rémunéré. À partir du 1er juillet 2015, elle versera sur ce compte un montant égal à 2,5 % du capital du mois précédent. Ceci conduit à modéliser la valeur du capital $n$ mois après le 1er juin 2015 par le terme $v_n$ d'une suite géométrique.

1. Déterminer le premier terme et la raison de la suite $(v_n)$.
2. Donner la relation permettant de calculer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.
3. Le capital constitué le 1er juin 2017 sera-t-il suffisant pour payer à cette date la facture des travaux ? Justifier la réponse.

**Exercice 4** **5 points**

Un restaurateur ne sert au déjeuner que des plats du jour. Il cherche à estimer l'effet du prix de ce plat sur le nombre de ses clients. **Partie A**

1. Dans la suite du problème, on décide de modéliser le nombre $y$ de clients en fonction du prix $x$ par l'expression $y = -8x + 146$.
   (a) D'après ce modèle, calculer le nombre de clients si le restaurateur fixe le prix du plat du jour à 12 €.
   (b) D'après ce modèle, à combien le restaurateur doit-il fixer le prix du plat du jour pour espérer attirer 100 clients ?

**Partie B : Optimisation de la recette**

Dans cette partie, on s'intéresse à la recette réalisée par ce restaurateur sur son plat du jour.

1. En utilisant le modèle donner dans la partie A, déterminer la recette réalisée par le restaurateur pour un prix du plat du jour fixé à 13 €.
2. On note $f$ la fonction qui, au prix $x$ du plat du jour en euros, associe la recette du jour $f(x)$ en euros. On admet que $x$ appartient à l'intervalle $[6\,;\,16]$.
   (a) En utilisant la modélisation de la question 1 de la partie A, montrer que

$$f(x) = -8x^2 + 146x.$$

(b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

(c) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[6\,;\,16]$.

(d) Quel prix (arrondi au dixième d'euro) le restaurateur doit-il fixer au plat du jour pour que la recette soit maximale ? Combien sert-il de plats du jour dans ce cas ?

**lignes supplémentaires**