

Complexe de Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$:

Motifs de Tate mixtes et polylogarithmes multiples

Ismaël Soudères

10 mars 2012

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Définitions	2
1.2	Complexe de cycles	2
1.3	Cycles et motifs de Tate mixtes	3
1.4	Idée géométrique	3
2	Premiers exemples	5
2.1	Cycles et polylogarithmes	5
2.2	Poids 3 : première correction pour $t = 1$	5
2.3	Exemples combinatoires	6
3	Combinatoire	7
3.1	Arbres et algèbre de Lie	7
3.2	Arbres duaux des crochets de Lyndon	7
3.3	Une autre différentielle sur les arbres	8
4	Des arbres aux cycles	9
4.1	Une première approche	9
4.2	Cas de $L_{[011]}$	9
4.3	Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”	10
5	Cycles et construction bar	12
5.1	Cycles et construction bar	12

1 Introduction

1.1 Définitions : DGA, construction bar et modèle 1-minimal

Construction bar sur une algèbre différentielle graduée

Définition 1.1 (DGA). Soit $A = \oplus A^k$ une algèbre graduée et $d : A^k \rightarrow A^{k+1}$ une différentielle. Pour a dans A^k on note $|a| = k$ son degré. A est :

- *graduée commutative* si $a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a$
- *différentielle* si d satisfait la règle de Leibniz :

$$d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot d(b)$$

On suppose A augmentée et on note $A^+ = \ker(\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{Q})$.

Définition 1.2 (Construction bar). La construction bar sur A est : $B(A) = \oplus_n (A^+)^{\otimes n} \subset \oplus_n (A)^n$.

$B(A)$ admet une structure d’algèbre de Hopf différentielle graduée commutative $(\mathfrak{m}, D, \Delta)$.

Problème général

- Décrire les groupes de cohomologie d’une DGA (A, d) .
- \leadsto On va remplacer A par une DGA plus simple à contrôler.

Modèle 1-minimal

Définition 1.3 (DGA génériquement nilpotente). - Une *extension de Hirsch* de A est de la forme : $A \otimes \Lambda(V)$

$$\text{où : } V = \mathbb{Q}.v \quad \text{tel que } dV \in (A^+)^2 \text{ et } v \text{ de degré } k.$$

- Une DGA A est *génériquement nilpotente* si :
 - on a $\mathbb{Q} \subset A_1 \subset \dots \subset A_l \subset \dots$
 - $A = \bigcup A_l$
 - $A_l = A_{l-1} \otimes \Lambda(V_l)$ est une extension de Hirsch ;
 - en particulier $A = \Lambda(V)$.

Théorème 1.4 (Sullivan). Soit A une DGA cohomologiquement connexe.

Il existe une DGA génériquement nilpotente $M_A = \Lambda(V)$ et un morphisme

$$\varphi : M_A \rightarrow A$$

induisant :

$$H^0(M_A) \simeq H^0(A), \quad H^1(M_A) \simeq H^1(A), \quad H^0(M_A) \hookrightarrow H^0(A).$$

On parle de modèle 1-minimal

Modèle 1-minimal

Remarque 1.5. Soit $A = \Lambda(V)$ génériquement nilpotente avec V en degré 1. V admet alors une structure de coalgèbre de Lie :

$$V \xrightarrow{d} \Lambda^2(V) = V \wedge V$$

où $d^2 = 0$ est dual de l'identité de Jacobi.

Construction inductive du modèle 1-minimal

1. On pose : $V_1 = H^1(A)$ en degré 1 et $M_1 = \Lambda(V_1)$.
2. On pose : $V_{i+1} = \ker(H^2(M_i) \xrightarrow{\varphi_i} H^2(A))$ en degré 1 et $M_{i+1} = M_i \otimes \Lambda(V_{i+1})$.
3. On pose enfin $V = \cup V_i$ et $M = \cup M_i$.

1.2 Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz

Par la suite on note $X = \text{Spec}(\mathbb{Q})$ ou $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Bloch et Kriz définissent une DGA à partir de groupes de cycles.

Le cube

- On note \square^n pour l'espace affine $(\mathbb{P}^1 \setminus \{1\})^n$
- les faces de \square^n sont données par $u_{i_1} = \dots = u_{i_l} = 0, \infty$.

Groupes de cycles

$Z^p(X, n)$ est le groupe libre

$$\mathbb{Z} \left\langle W \subset X \times \square^n \text{ tel que } \begin{cases} W \text{ fermé irréductible} \\ \text{codim}(W)=p \\ \text{codim}(W \cap X \times F)=p \text{ ou } W \cap X \times F=\emptyset \end{cases} \right\rangle$$

Opérations

- Différentielle $d : Z^p(X, n) \rightarrow Z^p(X, n-1)$ définie par intersection avec les faces $d = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\partial_0^i - \partial_\infty^i)$.
- Action de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et de \mathcal{S}_n sur \square^n . On note $\mathcal{A}lt_n$ le projecteur induit sur $Z^p(X, n)$.

Définition 1.6 (\mathcal{N}_X^\bullet). - Soit $\mathcal{N}_X^k(p)$ le groupe $\mathcal{A}lt_{2p-k}(Z^p(X, 2p-k))$ placé en degré k . On obtient un complexe

$$\mathcal{N}_X^\bullet(p) : \quad \dots \rightarrow \mathcal{N}_X^k(p) \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_X^{k+1}(p) \rightarrow \dots$$

- On pose $\mathcal{N}_X^\bullet = \bigoplus_p \mathcal{N}_X^\bullet(p)$.

Produit

On définit un produit :

$$\mathcal{N}_X^k(p) \times \mathcal{N}_X^l(q) \rightarrow \mathcal{N}_X^{k+l}(p+q)$$

par concaténation des coordonnées, pull-back par la diagonale et projection par $\mathcal{A}lt_{2(p+q)-(k+l)}$:

$$X \times \square^{2p-k} \times X \times \square^{2q-l} \xrightarrow{\sim} X \times X \times \square^{2(p+q)-(k+l)} \xleftarrow{\quad} X \times \square^{2(p+q)-(k+l)}.$$

Proposition 1.7 ([?]). \mathcal{N}_X^\bullet est une algèbre différentielle graduée. Ses groupes de cohomologie sont les groupes de Chow supérieurs de X .

1.3 Cycles et motifs de Tate mixtes

On note

- $MTM(X)$ la catégorie des motifs de Tate mixtes sur X
- \mathcal{X}_X l'algèbre de Hopf associée à la catégorie tannakienne $MTM(X)$.
- \mathcal{M}_X la coalgèbre de Lie correspondante.

Théorème 1.8 ($X = \text{Spec}(\mathbb{Q})$: [?]; $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{3 \text{ pts}\}$: [?]). Le modèle 1-minimal, $M_{\mathcal{N}_X}$ de \mathcal{N}_X est donné en degré 1 par les indécomposables de $H^0(B(\mathcal{N}_X))$:

$$M_{\mathcal{N}_X} \simeq \Lambda(H^0(B(\mathcal{N}_X))^+ / \text{produits}).$$

2 Premiers exemples

2.1 Cycles et polylogarithmes

Par la suite $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. On pose :

$$L_{[0]} = [t; t] \quad \text{et} \quad L_{[1]} = [t; 1 - t] \quad \subset X \times \square^1.$$

Poids 2 : $L_{[01]} \rightsquigarrow \text{Li}_1(t)$

On considère la combinaison

$$b = L_{[0]} \cdot L_{[1]} = [t; t, 1 - t] \subset X \times \square^2.$$

On a $\bar{b}|_0 = \bar{b}|_1 = \emptyset$. Le pull-back par

$$\begin{aligned} X \times \square^1 \times \square^2 &\xrightarrow{\mu} X \times \square^2 \\ [t; u_1, u_2, u_3] &\longmapsto \left[\frac{t}{1-u_1}; u_2, \dots, u_3 \right] \end{aligned}$$

donne le cycle de Totaro déjà présent dans [?]

$$L_{[01]} = \mu^*(b) = \left[t; 1 - \frac{t}{x_1}, x_1, 1 - x_1 \right] \in \mathcal{N}_X^1(2).$$

Remarque

- $L_{[01]}$ s'étend sur \mathbb{A}^1 .
- $L_{[01]}|_{t=0} = \emptyset$ et $L_{[01]}|_{t=1}$ est bien défini.
- $L_{[01]}$ correspond à la fonction $\text{Li}_2(t)$.

Polylogarithmes : $L_{[0\dots 01]} \rightsquigarrow \text{Li}_n(t)$

Par récurrence, on construit les cycles $L_n = L_{[0\dots 01]}$. On considère :

$$b = L_{[0]} \cdot L_{n-1}.$$

On a alors $d(b) = L_{[0]} \cdot L_{[0]} \cdot L_{n-2} = 0$ et

$$b|_{t=0,1} = (L_{[0]} \cdot L_{n-1})|_{0,1} = \emptyset.$$

On en déduit qu'il existe

$$L_n \subset X \times \square^{2n-1} \quad \text{tel que} \quad d(L_n) = L_{[0]} \cdot L_{n-1} \subset X \times \square^{2n-2}.$$

Le calcul de $\mu^*(b)$ donne en particulier

$$L_n = \left[t; 1 - \frac{t}{x_{n-1}}, x_{n-1}, 1 - \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, x_{n-2}, \dots, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1 \right] \in \mathcal{N}_X^1(p).$$

Remarque

- L_n s'étend sur \mathbb{A}^1 et $L_n|_{t=0} = \emptyset$.
- On retrouve en particulier l'expression donnée dans [?].
- $L_n = L_{[0\dots 01]}$ correspond à $\text{Li}_n(t)$ ([?]).

2.2 Poids 3 : première correction pour $t = 1$

On a vu $L_{[001]}$ tel que $d(L_{[001]}) = L_{[0]} \cdot L_{[01]}$.

Le cas de $L_{[011]}$

On peut aussi considérer le produit

$$b = L_{[01]} \cdot L_{[1]} = \left[t; 1 - \frac{t}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - t \right].$$

Mais alors

$$d_{\mathbb{A}^1}(\bar{b}) = L_{[01]}|_{t=1} \cdot [1; 0] \neq 0.$$

On introduit le cycle constant $L_{[01]}(1)$ tel que

$$\forall a \in X \quad L_{[01]}|_{t=a} = L_{[01]}|_{t=1}.$$

Concrètement : $L_{[01]}(1) = \left[t; 1 - \frac{1}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - t \right] \subset X \times \square^3$.

On considère la combinaison linéaire

$$b = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}.$$

On a bien :

$$d(b) = 0, \quad d_{\mathbb{A}^1}(b) = 0, \quad b|_{t=0} = \emptyset.$$

Le cas de $L_{[011]}$

Le pull-back par la multiplication de

$$b = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$$

donne alors :

$$L_{[011]} = \mu^*(b) = [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2] \\ + [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - x_2, 1 - \frac{1}{x_1}, x_1, 1 - x_1]$$

- Le cycle $L_{[011]}$ est bien défini sur $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- On a $d(L_{[011]}) = b = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$.

Remarque 2.1. - $L_{[011]}$ n'est pas admissible au point $t = 1$.
- Ce problème est similaire à celui rencontré dans [GGL05].

2.3 Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

Supposons pour l'instant que

- $L_{[011]}$ est bien défini pour $t = 1$.
- Ceci pour nous concentrer sur la combinatoire.

Question combinatoire

Quelles sont les combinaisons linéaires $b = \sum \alpha_{i_k, i_l} c_{i_k} \wedge c_{i_l}$ possibles ?

- On suppose à chaque fois pouvoir construire le c tel que $d(c) = b$.

Poids 4

- Un exemple similaire à $L_{[011]}$:

$$d(L_{[0111]}) = (L_{[011]} - L_{[011]}(1)) \cdot L_{[1]}.$$

- La multiplication par $L_{[1]}$ induit une correction par $-L_{[W]}(1)$.
- La correction en $-L_{[01]}(1)$ de $L_{[011]}$ "se propage" :

$$d(L_{[0011]}) = L_{[0]} \cdot L_{[011]} + (L_{[001]} - L_{[001]}(1)) \cdot L_{[1]} + L_{[01]} \cdot L_{[01]}(1)$$

Poids 5

En poids 5 apparaissent les premiers exemples tels que $d(L_{[-]})|_{t=1} \neq 0$:

$$d(L_{[01011]}) = L_{[01]} \cdot L_{[011]} + (L_{[0011]} - L_{[0011]}(1)) \cdot L_{[1]} \\ + 2L_{[011]} \cdot L_{[01]}(1)$$

- Jusqu'à présent $d(L_{[-]}(1)) = 0$.
- Ces termes n'interviennent pas dans le calcul de $d(b) = 0$.
- Ce n'est plus le cas en poids 6.

Poids 6

On a par exemple :

$$d(L_{[010111]}) = L_{[01]} \cdot L_{[0111]} + (L_{[00111]} - L_{[00111]}(1)) \cdot L_{[1]} \\ (L_{[01011]} - L_{[01011]}(1)) \cdot L_{[1]} \\ + 3L_{[0111]} \cdot L_{[01]}(1) + 2L_{[011]} \cdot L_{[011]}(1).$$

Le terme en $d(-L_{[01011]}(1) \cdot L_{[1]}) = L_{[01]}(1) \cdot L_{[011]}(1) \cdot L_{[1]}$ vient compenser les termes similaires provenant de

$$d(L_{[0111]} \cdot L_{[01]}(1)) \quad \text{et} \quad d(L_{[011]} \cdot L_{[011]}(1)).$$

Observations : les combinaisons linéaires b se composent :

- d'une "partie principale" en noir ;
- d'une correction "géométrique et combinatoire" en rouge lors de la multiplication par $L_{[1]}$;
- d'un "terme correctif" en bleu correspondant à "une propagation".

cadre combinatoire

- La partie principale est :
 - duale aux crochets de Lyndon dans $\text{Lie}(X_0, X_1)$, l'algèbre de Lie libre ;
 - codée par des arbres trivalent avec d_{Lie} dual au crochet de Lie.
- Les termes correctifs sont liés à une autre différentielle d_{cy} sur les mêmes arbres.

3 Combinatoire : crochets de Lyndon, arbres et différentielle

3.1 Arbres et algèbre de Lie

Définition 3.1. On note \mathcal{T}^t le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par :

- les arbres trivalents enracinés
- aux feuilles décorées par 0 et 1.

On pose

$$\mathcal{T}^{t,r} = \mathcal{T} / \left(\begin{array}{c} T_1 \\ \wedge \\ T_2 \quad T_3 \end{array} = - \begin{array}{c} T_1 \\ \wedge \\ T_3 \quad T_2 \end{array} \right).$$

On munit $\mathcal{T}^{t,r}$ de la loi interne \wedge définie par

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \wedge \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \wedge \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \wedge \\ T_3 \quad T_4 \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \wedge \\ \wedge \\ T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \end{array}.$$

Remarque 3.2. La relation \wedge correspond au crochet de Lie :

$$\mathcal{T}^{t,r} \otimes \mathcal{T}^{t,r} \longrightarrow \mathcal{T}^{t,r} \quad T_1 \otimes T_2 \longmapsto [T_1; T_2].$$

- \wedge est antisymétrique
- mais ne vérifie pas Jacobi.

Lemme 3.3. On a : $\mathcal{T}^{t,r} / \text{identité de Jacobi} \simeq \text{Lie}(X_0, X_1)$.

Définition 3.4. – Un mot de Lyndon en X_0 et X_1 est tel que

$$W = U \cdot V \quad U, V \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad W <_{lexi} V.$$

– Soit W un mot de Lyndon. On définit par récurrence

$$[W] = [[W_1], [W_2]] \in \text{Lie}(X_0, X_1) \quad \text{avec} \begin{cases} W = W_1 \cdot W_2 \\ W_2 \text{ minimal.} \end{cases}$$

Propriété des crochets de Lyndon

- L'écriture $[W] = [[W_1], [W_2]]$ avec $W_1 < W_2$ est unique.
- Les crochets de Lyndon $[W]$ forment une base de $\text{Lie}(X_0, X_1)$.
- Les $([W_1] \wedge [W_2])_{W_1 < W_2}$ forment une base de $\text{Lie}(X_0, X_1)^{\wedge 2}$.
- Le crochet de Lie $[\ ; \]$ s'écrit dans ces bases :

$$[[W_1], [W_2]] = \sum_W \alpha_{W_1, W_2, W} [W].$$

3.2 Arbres duaux des crochets de Lyndon

On a alors un ordre total $<$ sur \mathcal{T} et une base \mathfrak{T} de $\mathcal{T}^{t,r}$:

$$\mathfrak{T} = \left\{ T \text{ tel que } \begin{array}{c} | \\ \wedge \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \text{ sous arbre de } T \Rightarrow T_1 < T_2 \right\}$$

Dualité

- On identifie $\mathcal{T}^{t,r}$ à son dual via la base \mathfrak{T} .
- On obtient $\text{coLie}(X_0, X_1)$ comme sous espace de $\mathcal{T}^{t,r}$.
- On a $(T_{[W]})_W$ la base duale des crochets de Lyndon $([W])_W$.
- On a une différentielle duale du crochet :

$$d_{Lie} : \text{coLie}(X_0, X_1) \longrightarrow \text{coLie}(X_0, X_1)^{\wedge 2}, \quad d_{Lie} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \wedge \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ T_1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ T_2 \end{array}.$$

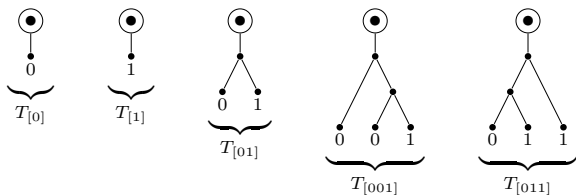
Proposition 3.5. On a par dualité : $d_{Lie}(T_{[W]}) = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \wedge T_{[W_2]}$.

On peut de plus construire les T_W par récurrence :

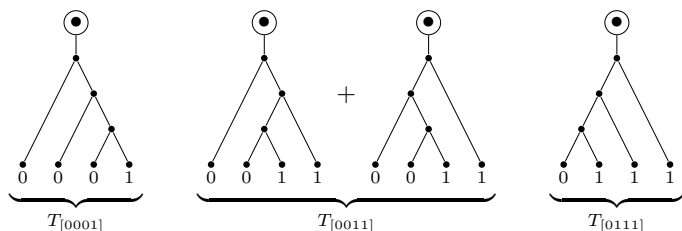
$$T_{[W]} = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \wedge T_{[W_2]}.$$

Exemples

Poids 1, 2 et 3



Poids 4



3.3 Une autre différentielle sur les arbres

Une autre différentielle sur les arbres

Arbres et cycles

- Dans [GGL05], Gangl, Goncharov et Levin introduisent une différentielle d_{cy} sur des arbres.
- La différentielle d_{cy} reflète la différentielle dans $\mathcal{N}_{\text{Spec}(\mathbb{Q})}$.

Définition 3.6. Une *orientation* ω d'un arbre T est une numérotation des arêtes.

Les arbres orientés de [GGL05]

- On pose V^t le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les forêts d'arbres T
 - orientés,
 - à la racine décorée : t , 0 ou 1
 - aux feuilles décorées par 0 ou 1
- L'union disjointe induit un produit noté \cdot .

L'algèbre $\mathcal{T}^{dec,or}$

On note $\mathcal{T}^{dec,or}$ l'algèbre quotient de V^t par les relations :

$$(T, \sigma(\omega)) = \varepsilon(\sigma)(T, \omega), \quad \begin{array}{c} 0 \\ \circ \\ \wedge \\ T_1 T_2 \end{array} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \downarrow \\ 0 \end{array} = 0.$$

d_{cy} : **Contraction d'arêtes**

Soit e une arête d'un arbre T . La contraction T/e de T à e est :

- Si e contient la racine :
- Si e contient une feuille :
- Si e est interne : on contracte simplement.
- On a une orientation induite sur T/e .

Définition 3.7. La différentielle d_{cy} est définie par :

$$d_{cy}(T, \omega) = \sum_{e \in T} (T/e, i_e(\omega)) \quad \text{et la règle de Leibniz.}$$

Proposition 3.8. $\mathcal{T}^{dec,or}$ muni de d_{cy} est une DGA.

Une autre différentielle sur les arbres

Proposition 3.9 (Soud.). Soit W un mot de Lyndon. On note encore $T_{[W]}$ son image dans $\mathcal{T}^{dec,or}$ (t décore la racine). On a

$$d_{cy}(T_{[W]}) = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \cdot T_{[W_2]} + \sum_{W_1 \leq W_2} \beta_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \cdot T_{[W_2]}(1) + \sum_{W_1 < W_2} \beta_{W_2, W_1, W} T_{[W_2]} \cdot T_{[W_1]}(1) \quad (\text{ED-T})$$

où $T_{[W_2]}(1)$ désigne l'arbre $T_{[W_2]}$ avec la racine décorée par 1.

Idée de la preuve (par récurrence). – Comme $d_{Lie}^2 = 0$, les arêtes internes ne contribuent pas.

- Les termes en $T_{[W_2]}(1)$ viennent des feuilles décorées par 1.
- La décomposition de crochets dans la base de Lyndon montrent que l'on a exactement des termes en $T_{[W_1]} \cdot T_{[W_2]}(1)$.

Une autre différentielle sur les arbres

Exemples

– $T_{[011]}$:

$$d_{cy} \left(\begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ | \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ | \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

– $T_{[0011]}$:

$$d_{cy} \left(\begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} t \odot \\ | \\ 0 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ | \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

Une autre différentielle sur les arbres

Un exemple en poids 5 : $T_{[01011]}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \xrightarrow{d_{cy}} \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \\ + \left(\begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \right) \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ | \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ | \\ 1 \end{array} \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 0 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \right) \\ + 2 \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \odot \\ / \quad \backslash \\ 0 \quad 1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \end{array}$$

4 Des arbres aux cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

4.1 Des arbres aux cycles : une première approche

□ **Observation**

- Le système (ED-T) redonne les exemples formels précédents ($T_{[W]} \rightsquigarrow L_{[W]}$).
- On a donc trouvé un cadre combinatoire.

Passer des arbres aux cycles

Dans [GGL05], Gangl, Goncharov et Levin associent un cycle à un arbre de la façon suivante :

- À chaque arête correspond un facteur \square^1 de \square^n .
- Les sommets internes sont décorés par des paramètres x_i .
- $\begin{array}{c} x_i \\ | \\ x_{i+1} \end{array} \mapsto 1 - \frac{x_i}{x_{i+1}}$, $\begin{array}{c} x_i \\ | \\ 0 \end{array} \mapsto x_i$, $\begin{array}{c} x_i \\ | \\ 1 \end{array} \mapsto 1 - x_i$.

Problème

Les cycles obtenus *ne sont pas* admissibles.

Cependant :

- Considérer le “système différentiel” correspondant à (ED-T) donne d’autres cycles.
- Au départ notre problème est une construction inductive.

Système “différentiel”

On considère dans \mathcal{N}_X le système “différentiel” suivant :

$$\begin{aligned} d(L_{[W]}) &= \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} L_{[W_1]} \cdot L_{[W_2]} \\ &+ \sum_{W_1 \leq W_2} \beta_{W_1, W_2, W} L_{[W_1]} \cdot L_{[W_2]}(1) + \sum_{W_1 < W_2} \beta_{W_2, W_1, W} L_{[W_2]} \cdot L_{[W_1]}(1) \quad (\text{ED-L}) \end{aligned}$$

où :

- W, W_1, W_2 sont des mots de Lyndon ;
- $L_{[W_2]}(1)$ désigne le cycle constant égal à $L_{[W_2]}|_{t=1}$;
- $\alpha_{W_1, W_2, W}$ et $\beta_{W_1, W_2, W}$ sont ceux de (ED-T).

Question

Peut-on construire les cycles $L_{[W]}$ satisfaisant (ED-L) ?

Remarque

- Il est essentiel d'avoir des cycles définis sur \mathbb{A}^1 .
- En particulier les cycles doivent être admissibles pour $t = 1$.
- Les cycles restreints à $t = 1$ correspondent aux MZV.

4.2 Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$

Le système (ED-L) : $d(L_{[011]}) = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$
Le pull-back par la multiplication de $(L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$ donne

$$L_{[011]} = [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2] \\ + [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - x_2, 1 - \frac{1}{x_1}, x_1, 1 - x_1].$$

Remarque 4.1. - Le cycle $L_{[011]}$ est bien admissible sur $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- Le second terme de la somme n'apparaît pas en ne considérant que l'arbre.

Problème

- Il ne s'étend pas sur \mathbb{A}^1 . Il n'est pas admissible en $t = 1$.
- On ne peut donc pas par la suite définir $L_{[011]}(1)$.
- Exemple :

$$d(L_{[00111]}) = L_{[0]} \cdot L_{[0111]} + (L_{[0011]} - L_{[0011]}(1)) \cdot L_{[1]} \\ + L_{[01]} \cdot L_{[011]}(1) + L_{[011]} \wedge L_{[01]}(1).$$

Stratégie : modifier "l'équation différentielle"

- Il faut que le facteur devant $L_{[1]}$ soit vide à $t = 1$.
- On remplace $L_{[01]} - L_{[01]}(1)$ par

$$\mathcal{L}_{[01]}^1 \quad \text{tel que} \quad \mathcal{L}_{[01]}^1|_{t=1} = \emptyset.$$

- On calcule le pull-back de $\mathcal{L}_{[01]}^1 \cdot L_{[1]}$ pour obtenir $\mathcal{L}_{[011]}$.

Concrètement

Comme $\frac{x-t}{x-1} = (1 - \frac{t}{x})(1 - \frac{1}{x})^{-1}$, on utilise une formule de multiplication pour obtenir

$$\mathcal{L}_{[01]}^1 = [t; \frac{x_1 - t}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1].$$

On a ainsi

$$\mathcal{L}_{[011]} = [t; 1 - \frac{t}{x_2}, \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2]$$

Remarque

- Il faut modifier le système (ED-L).
- Les deux cycles $L_{[011]}$ et $\mathcal{L}_{[011]}$ donnent le même élément dans $H^0(B(\mathcal{N}_X))$

4.3 Cycles admissibles pour "t = 1"

Idée

On remplace le système d'équation (ED-L) par deux systèmes d'équations (ED- \mathcal{L}) et (ED- \mathcal{L}^1) donnant respectivement des cycles vides en $t = 0$ et en $t = 1$.

Définition 4.2. À partir des coefficients de (ED-L) α_{W_1, W_2} , β_{W_1, W_2} et β_{W_2, W_1} on pose pour $W_1 \leq W_2$:

$$\begin{cases} a_{W_1, W_2, W} = \alpha_{W_1, W_2, W} + \beta_{W_1, W_2, W} - \beta_{W_2, W_1, W} \\ b_{W_1, W_2, W} = -\beta_{W_1, W_2, W} \\ b_{W_2, W_1, W} = -\beta_{W_2, W_1, W}. \end{cases}$$

et pour $0 < W_1 < W_2$

$$\begin{cases} a'_{W_1, W_2, W} = -a_{W_1, W_2, W} \\ b'_{W_1, W_2, W} = a_{W_1, W_2, W} + b_{W_1, W_2, W} \\ b'_{W_2, W_1, W} = -a_{W_1, W_2, W} + b_{W_2, W_1, W} \\ a'_{0, W_2} = a_{0, W_2} \text{ et } b'_{W_1, W_1, W} = b_{W_1, W_1, W} \end{cases}$$

Remarque

Pour obtenir les $a_{W_1, W_2, W}$, $b_{W_1, W_2, W}$ et $b_{W_2, W_1, W}$:

- partir de (ED-L)
- remplacer les $L_{[W_2]}(1)$ par $-(L_{[W_2]} - L_{[W_2]}(1)) + L_{[W_2]}$.

Systèmes d'équations (ED- \mathcal{L}) et (ED- \mathcal{L}^1)

On considère pour tout mot de Lyndon W de longueur ≥ 2 .

$$d(\mathcal{L}_{[W]}) = \sum_{W_1 < W_2} a_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]} \cdot \mathcal{L}_{[W_2]} + \sum_{W_1 \leq W_2} b_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]} \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^1 + \sum_{W_1 < W_2} b_{W_2, W_1, W} \mathcal{L}_{[W_2]} \cdot \mathcal{L}_{[W_1]}^1. \quad (\text{ED-}\mathcal{L})$$

et

$$d(\mathcal{L}_{[W]}^1) = \sum_{W_1 < W_2} a'_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]}^1 \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^1 + \sum_{W_1 \leq W_2} b'_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]} \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^1 + \sum_{W_1 < W_2} b'_{W_2, W_1, W} \mathcal{L}_{[W_2]} \cdot \mathcal{L}_{[W_1]}^1. \quad (\text{ED-}\mathcal{L}^1)$$

Cycle admissible pour $t = 1$

On pose $\mathcal{L}_{[0]} = L_{[0]}$ et $\mathcal{L}_{[1]} = L_{[0]}$.

Théorème 4.3 (Soud.). *Pour chaque mot W de longueur $p \geq 2$ il existe un cycle $\mathcal{L}_{[W]}$ (resp. $\mathcal{L}_{[W]}^1$) dans $\mathcal{N}_X^1(p)$ tel que :*

- $\mathcal{L}_{[W]}$ (resp. $\mathcal{L}_{[W]}^1$) s'étend en un cycle dans $\mathcal{N}_{\mathbb{A}^1}^1(p)$.
- $\mathcal{L}_{[W]}|_{t=0} = \emptyset$ (resp. $\mathcal{L}_{[W]}^1|_{t=1} = \emptyset$).
- $\mathcal{L}_{[W]}$ (resp. $\mathcal{L}_{[W]}^1$) satisfait (ED- \mathcal{L}) (resp. (ED- \mathcal{L}^1)).

Idée de la preuve

Par induction. On note A_0 (resp. A, B) le membre de droite de (ED-T) (resp. (ED- \mathcal{L}), (ED- \mathcal{L}^1)).

- Comme $d_{cy}(A_0) = 0$ on montre que $d(A) = d(B) = 0$

- en utilisant que $\mathcal{L}_{[W']}|_{t=0} = \mathcal{L}_{[W']}^1|_{t=1} = \emptyset$, on montre que $d_{\mathbb{A}^1}(A) = d_{\mathbb{A}^1}(B) = 0$ et que $A|_{t=0} = B|_{t=1} = \emptyset$.
- On construit alors $\mathcal{L}_{[W]} = \mu^*(A)$ via le pull-back par la multiplication $\mu : X \times \square^1 \rightarrow X$.
- On construit $\mathcal{L}_{[W]}^1 = \nu^*(B)$ via le pull-back par la multiplication tordue par $t \mapsto 1-t$, $\nu : X \times \square^1 \rightarrow X$.

Exemples de cycles paramétrés en poids 4 : première combinaison linéaire

On a

$$d(\mathcal{L}_{[0011]}) = \mathcal{L}_{[0]} \cdot \mathcal{L}_{[011]} + \mathcal{L}_{[001]}^1 \cdot \mathcal{L}_{[1]} - \mathcal{L}_{[01]} \cdot \mathcal{L}_{[01]}^1$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[0011]} = & [t; 1 - \frac{t}{x_3}, x_3, 1 - \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2] \\ & [t; 1 - \frac{t}{x_3}, \frac{x_3 - x_2}{x_3 - 1}, x_2, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_3] \\ & - [t; 1 - \frac{t}{x_3}, 1 - \frac{x_3}{x_2}, x_2, 1 - x_2, \frac{x_1 - x_3}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1] \end{aligned}$$

Différence entre (ED- \mathcal{L}) et (ED- \mathcal{L}^1) en poids 5






$$d(\mathcal{L}_{[00101]}) = \mathcal{L}_{[001]} \cdot \mathcal{L}_{[01]} + \mathcal{L}_{[1]} \mathcal{L}_{[0001]}^1 \quad (\text{ED-}\mathcal{L})$$

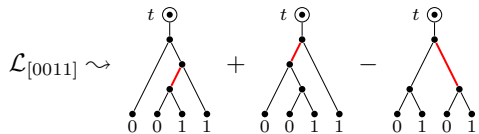
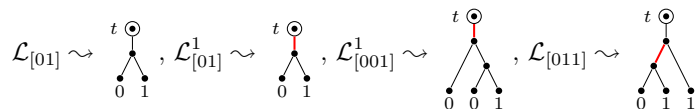
et

$$d(\mathcal{L}_{[00101]}^1) = -\mathcal{L}_{[001]}^1 \cdot \mathcal{L}_{[01]}^1 + \mathcal{L}_{[001]} \cdot \mathcal{L}_{[01]}^1 - \mathcal{L}_{[01]} \cdot \mathcal{L}_{[001]}^1 + \mathcal{L}_{[1]} \cdot \mathcal{L}_{[0001]}^1 \quad (\text{ED-}\mathcal{L}^1)$$

La différence entre $d(\mathcal{L}_{[00101]})$ et $d(\mathcal{L}_{[00101]}^1)$ intervient de façon cruciale en poids 6.

Représentation combinatoire : arbres colorés

- arête colorées  et la relation :  = 0.
- à une arête  correspond $\frac{a-b}{a-1}$
-  correspond à μ^* et  à ν^*
- Exemples :



5 Cycles et construction bar

5.1 Cycles et construction bar

Note : $B(\mathcal{N}_X) \subset \oplus_n \mathcal{N}_X^{\otimes n}$ munit de \boxplus, Δ, D .
On rappelle que $\mathcal{M}_X \simeq \mathbb{H}^0(B(\mathcal{N}_X))^+ / \text{produit } \boxplus$

Objectif initial :

- Décrire le 1-modèle minimal de \mathcal{N}_X .
- C'est à dire : donner une base de \mathcal{M}_X (relativement à $\mathcal{M}_{\text{Spec}(\mathbb{Q})}$).

\leadsto En explicitant la construction inductive du 1-modèle minimal, on a obtenu les cycles $\mathcal{L}_{[W]}$ (et $\mathcal{L}_{[W]}^1$).

\leadsto Construire les éléments correspondants dans $\mathbb{H}^0(B(\mathcal{N}_X))$.

Remarque

\mathcal{M}_X est un quotient : modulo $D(B^{-1}(\mathcal{N}_X))$ et modulo produits.

Exemples en poids 2

$\mathcal{L}_{[01]}^B = [\mathcal{L}_{[01]}] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}] \in \mathcal{N}_X \oplus \mathcal{N}_X^{\otimes 2}$ $\mathcal{L}_{[01]}^{1,B} = [\mathcal{L}_{[01]}^1] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}]$
On a

$$\mathcal{L}_{[01]}^1 = \mathcal{L}_{[01]} - \mathcal{L}_{[01]}(1) + d(C_{[01]}),$$

avec $C_{[01]} \in \mathcal{N}_X^0$. Comme $[C_{[01]}] \in B^{-1}$, on en déduit que

$$\mathcal{L}_{[01]}^{1,B} = \mathcal{L}_{[01]}^B - \mathcal{L}_{[01]}^B(1) \in \mathcal{M}_X$$

Exemple en poids 4

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[0011]}^B &= [\mathcal{L}_{[0011]}] & \mathcal{N}_X^{\otimes 1} \\ &- [\mathcal{L}_{[001]}^1|\mathcal{L}_{[1]}] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[011]}] + [\mathcal{L}_{[01]}|\mathcal{L}_{[01]}^1] & \mathcal{N}_X^{\otimes 2} \\ &- [\mathcal{L}_{[01]}|\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}|\mathcal{L}_{[01]}^1] & \mathcal{N}_X^{\otimes 3} \\ &+ [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}|\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}] + [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}|\mathcal{L}_{[1]}] & \mathcal{N}_X^{\otimes 4} \end{aligned}$$

Remarques

- modulo $D(B^{-1}) \rightsquigarrow$ modulo termes en :
 - $[\dots |d(C)| \dots]$ avec $C \in \mathcal{N}_X^0$
 - certains produits $[\dots | \mathcal{L}_{[W]} \cdot d(C) | \dots]$
- modulo produit $\mathfrak{m} \rightsquigarrow$ questions d'ordre dans $[a_1 | \dots | a_n]$.

Proposition 5.1. *Pour tout mot de Lyndon W de poids ≥ 2 , on a dans \mathcal{M}_X :*

$$\mathcal{L}_{[W]}^{1,B} = \mathcal{L}_{[W]}^B - \mathcal{L}_{[W]}^B(1)$$

Le coproduit sur $H^0(B(\mathcal{N}_X))$ induit une différentielle sur \mathcal{M}_X .

Théorème 5.2 (Soud.). *Dans \mathcal{M}_X , les éléments $\mathcal{L}_{[W]}^B$ satisfont l'équation (ED-T) :*

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{M}}(\mathcal{L}_{[W]}^B) &= \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]}^B \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^B \\ &\quad + \sum_{W_1 < W_2} \left(\beta_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]}^B \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^B(1) - \beta_{W_2, W_1, W} \mathcal{L}_{[W_2]}^B \cdot \mathcal{L}_{[W_1]}^B(1) \right) \end{aligned}$$

Remarques

- $d^{\mathcal{M}}$ correspond au produit motivique de Goncharov (modulo produit).
- De façon équivalente, $d^{\mathcal{M}}$ est dual du crochet de Ihara (ou crochet de Poisson).