Valeurs zêta multiples et Géométrie : Éclatements et espaces de modules

Double mélange, relations d'associateurs, régularisation

Ismaël Soudères

Université Paris Diderot - Paris 7
Institut de Mathématiques de Jussieu

Séminaire Quantique de l'IRMA (Strasbourg)
08 mars 2010

Introduction

Stuffle et intégrales
- Stuffle et MZV
- Stuffle et intégrales : ex.
- Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
- Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
- Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
- Stratégie
- Construction des X_n
- Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets
- Associateurs et relations explicites entre MZV
- Géométrie et régularisation

1. Introduction
2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
3. Le point de vue des espaces de modules de courbes en genre 0
4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
5. En cours de rédaction et projets

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Introduction

Valeurs zêta multiples

Définition des MZV

Pour tout p-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers avec $k_1 \geqslant 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Introduction

Valeurs zêta multiples

Définition des MZV

Pour tout p-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers avec $k_1 \geqslant 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

Relations de doubles mélanges

Ces nombres réels satisfont deux familles de relations quadratiques, appelées double mélange ou shuffle et stuffle.

- Le stuffle ou mélange contractant vient de la représentation en termes de séries ci dessus,
- le shuffle ou mélange vient d'une représentation en termes d'intégrales des valeurs zêta multiples.

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Introduction

Motifs et MZVs

Motifs

On cherche à obtenir des objets motiviques qui ont le même comportement que les MZV (*valeurs zêta multiples motiviques*) car :

- On espère que des idées géométriques ainsi qu'une forte contrainte de structure permettront d'expliquer les propriétés des MZV.
- C'est avec la théorie des motifs qu'on obtient la borne supérieure de la conjecture de la dimension.

Motifs et espaces de modules de courbes [GM04]

D'une part $\zeta(k_1, \ldots, k_p) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}$ et, il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut $\zeta(k_1, \ldots, k_p)$:

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(k_1, \ldots, k_p) = \left[\mathrm{H}^n\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}\right); [\omega_{\mathbf{k}}], [\Phi_n]\right].$$

on notera B^A pour $B \setminus (A \cap B)$

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
Stratégie
Construction des X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets
Associateurs et relations explicites entre MZV
Géométrie et régularisation

Introduction

Résultats et propriétés

Théorème ([Sou09])

Soit $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ *deux uplets d'entiers de poids* n *et* m *avec* $k_1, l_1 \geqslant 2$ *alors*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{k})\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \text{ terme du shuffle}} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma)$$

$$\text{et} \quad \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{k})\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \text{ terme du stuffle}} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma).$$

- On parlera ici essentiellement du stuffle.

Étapes intermédiaires

- Obtenir une représentation intégrale du stuffle.
- Observer les similitudes de stuffle et shuffle sur $\mathcal{M}_{0,n+m+3}$. Problèmes pour passer aux motifs dans le cas du stuffle.
- Construire une famille de variétés X_n compatible aux symétries du stuffle et simple d'un point vue des motifs.
- Construire de nouvelles MZV motiviques.
- Conclure.

Introduction

Stuffle et intégrales
- Stuffle et MZV
- Stuffle et intégrales : ex.
- Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
- Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
- Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
- Stratégie
- Construction des X_n
- Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets
- Associateurs et relations explicites entre MZV
- Géométrie et régularisation

1 Introduction

2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
- Mélange contractant (stuffle)
- Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
- Produit stuffle et intégrales

3 Le point de vue des espaces de modules de courbes en genre 0
- Espaces de modules de courbes et MZV
- Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
- Stratégie
- Construction des espaces X_n
- Le mélange contractant est motivique

5 En cours de rédaction et projets
- En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
- Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

Mélange contractant (stuffle)

Combinatoire du mélange contractant

Soit $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, k_p)$ $(\mathbf{k}_0 = (k_1, \dots, k_{p-1}))$ et $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_0, l_q)$ $(\mathbf{l}_0 = (l_1, \dots, l_{q-1}))$ deux uplets d'entiers.

Définition (Stuffle)

Le produit stuffle de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$ est défini de façon inductive par la formule

$$(\mathbf{k}) * (\mathbf{l}) = (\mathbf{k} * \mathbf{l}_0) \cdot l_q + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}) \cdot k_p + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}_0) \cdot (k_p + l_q) \qquad (1)$$

et $\mathbf{k} * () = () * \mathbf{k} = \mathbf{k}$.
On écrira $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ pour désigner un élément σ de la somme formelle $\mathbf{k} * \mathbf{l}$.

Exemple

$$(n) * (m) = (n, m) + (m, n) + (n + m)$$

$$(u) * (v, w) = (u, v, w) + (v, u, w) + (v, w, u) + (u + v, w) + (v, u + w).$$

Introduction
Stuffle et intégrales
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$
Stuffle motivique
Stratégie
Construction des X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes
En cours de rédaction et projets
Associateurs et relations explicites entre MZV
Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales

MZV et intégrales simpliciales

À un p-uplet $\mathbf{k}$, de poids $n = k_1 + \cdots + k_p$, on associe le n-uplet

$$\overline{k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - 1 \text{ fois}}, 1, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_p - 1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_1).$$

En posant $\Delta_n = \{0 < t_1 < \ldots < t_n < 1\}$, on a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \underbrace{(-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}}_{= \omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\overline{k}}}.$$

Exemple

On a

$$\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1 - t_1}, \qquad \zeta(2,2) = \int_{\Delta_4} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_3}{1 - t_3} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1 - t_1},$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

Le changement de variables

$$t_n = x_1,\ t_{n-1} = x_1x_2,\ \ldots,\ t_1 = x_1 \ldots x_n, \tag{2}$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1 - x_1x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1 - x_1x_2},$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

Le changement de variables

$$t_n = x_1,\ t_{n-1} = x_1x_2,\ \ldots,\ t_1 = x_1 \ldots x_n, \tag{2}$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1 - x_1x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1 - x_1x_2},$$

et pour $n = 4$

$$\zeta(4) = \int_{[0,1]^4} \frac{\mathrm{d}^4 x}{1 - x_1x_2x_3x_4} \quad \zeta(2,2) = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1x_2\, \mathrm{d}^4 x}{(1 - x_1x_2)(1 - x_1x_2x_3x_4)}.$$

On a aussi

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{1 - x_1x_2} \frac{1}{1 - x_3x_4}\, \mathrm{d}^4 x.$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

$\zeta(2)\zeta(2)$ par les intégrales

Pour toute variable α et β on a l'égalité

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} + \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\beta\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha\beta}. \tag{3}$$

En posant $\alpha = x_1x_2$ et $\beta = x_3x_4$ dans (3), on obtient la relation de stuffle

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \left(\frac{x_1x_2}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)} + \frac{x_3x_4}{(1-x_3x_4)(1-x_3x_4x_1x_2)} + \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4} \right) \mathrm{d}^4x$$

c'est à dire,

$$\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(2,2) + \zeta(2,2) + \zeta(4).$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$.

Définition

On définit la fonction $f_{k_1,\ldots,k_p}$ de n variables sur $[0,1]^n$ comme

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1,\ldots,k_{p-1}}(\mathbf{x}_0)\frac{\prod \mathbf{x}_0}{1-\prod \mathbf{x}} \tag{4}$$

avec $\mathbf{x}_0 = ((x_1, \ldots, x_{n-k_p}))$, $\quad \prod \mathbf{x}_0 = \prod_{i=1}^{n-k_p} x_i, \quad \prod \mathbf{x} = \prod_{i=1}^{n} x_i.$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$.

Définition

On définit la fonction $f_{k_1,\dots,k_p}$ de n variables sur $[0,1]^n$ comme

$$f_{k_1,\dots,k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1,\dots,k_{p-1}}(\mathbf{x}_0)\frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}} \tag{4}$$

avec $\mathbf{x}_0 = ((x_1, \dots, x_{n-k_p}))$, $\quad \prod \mathbf{x}_0 = \prod_{i=1}^{n-k_p} x_i, \quad \prod \mathbf{x} = \prod_{i=1}^{n} x_i.$

Proposition

Pour tout p-uplet d'entiers $(k_1, \dots, k_p)$ avec $k_1 \geqslant 2$, on a $(n = k_1 + \cdots + k_p)$

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{[0,1]^n} f_{k_1,\dots,k_p}(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}^n x.$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle

Proposition (Décomposition de Cartier)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ *et* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ *deux uplets avec* $n = k_1 + \cdots + k_p$ *et* $m = l_1 + \cdots + l_q$*. On a alors*

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1,\ldots,l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} f_\sigma(y_\sigma).$$

Idée

- On part de $f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{l}} = f_{\mathbf{k}_0} f_{\mathbf{l}_0} \prod \mathbf{x}_0 \prod \mathbf{x}'_0 \dfrac{1}{1 - \prod \mathbf{x}} \dfrac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'}$
- On applique (3) à $\dfrac{1}{1 - \prod \mathbf{x}} \dfrac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'}$
- On réorganise pour remarquer que le produit $f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{l}}$ vérifie la même équation de récurrence que le produit stuffle.

Introduction

Stuffle et intégrales
- Stuffle et MZV
- Stuffle et intégrales : ex.
- Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
- Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
- Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
- Stratégie
- Construction des X_n
- Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets
- Associateurs et relations explicites entre MZV
- Géométrie et régularisation

1 Introduction

2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
- Mélange contractant (stuffle)
- Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
- Produit stuffle et intégrales

3 Le point de vue des espaces de modules de courbes en genre 0
- Espaces de modules de courbes et MZV
- Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
- Stratégie
- Construction des espaces X_n
- Le mélange contractant est motivique

5 En cours de rédaction et projets
- En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
- Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

Espaces de modules de courbes et MZV

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ avec $k_1 \geqslant 2$, $n = k_1 + \cdots k_p$.

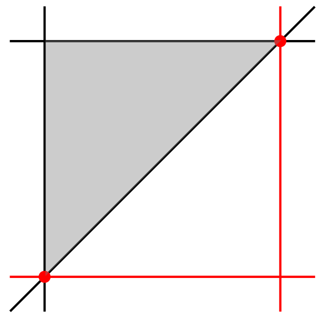
Objectifs

Il s'agit d'écrire

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}$$

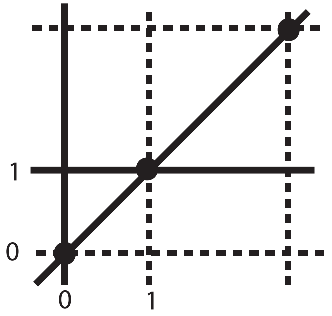
où le lieu $A_{\mathbf{k}}$ des singularités de $\omega_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de Φ_n.

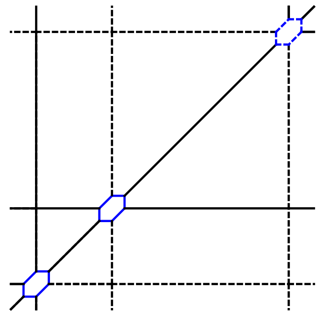
Ce n'est pas le cas dans la représentation



$$\zeta(2) = \int_{0<t_1<t_2<1} \frac{1}{t_2} \frac{1}{1-t_1} \,\mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}t_2.$$

Par contre après éclatement de $(0,0)$ $(1,1)$ (et (∞,∞))





MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Définition

L'*espace de modules de courbes de genre* 0 *avec* n *points marqués* $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Définition

L'*espace de modules de courbes de genre* 0 *avec n points marqués* $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

Concrètement

L'ensemble des isomorphismes de la sphère de Riemann est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ d'où

$$\mathcal{M}_{0,n+3} = \{(z_0, \ldots, z_{n+2}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ tel que } z_i \neq z_j\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ étant tri-transitif, on peut choisir de fixer 3 des points (z_0, z_{n+1} et z_{n+2} par ex.) sur 0, 1 et ∞ :

$$\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^n \setminus \{\text{grande diagonale}\}.$$

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Exemples

- Pour $n = 1$ on a $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}$.
- Pour $n = 2$ on a

$$\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\})^2 \setminus \{t_1 \neq t_2\}.$$

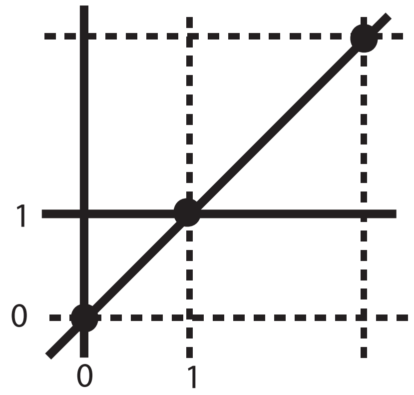


FIGURE: $\mathcal{M}_{0,5}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^2$

Il existe une compactification $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ qui continue à être un espace de modules.

Théorème ([DM69],[Knu83])

$\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est projectif, irréductible lisse. Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est un diviseur à croisements normaux.

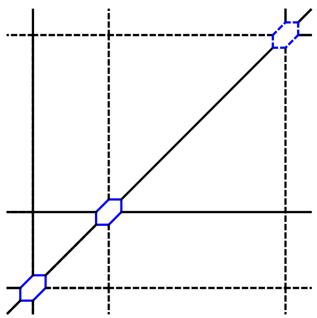


FIGURE: $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}(\mathbb{R})$

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
Stratégie
Construction des X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets
Associateurs et relations explicites entre MZV
Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

Notations générale sur $\mathcal{M}_{0,j+3}$

- On note t_i la coordonnée (simpliciale) telle que

$$t_i(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty) = z_i.$$

- L'ensemble des points réels $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_{0,j+3}$ n'est pas connexe.
- Une comp. connexe (cellule) de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ peut s'identifier à l'ordre (sur $\mathbb{R}$) dans lequel sont classés les points.
- On note $\beta_j : \mathcal{M}_{0,j+3} \to (\mathbb{P}^1)^j$ l'application

$$(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty) \mapsto (z_1, \ldots, z_j),$$

  et Φ_j la cellule ouverte (cellule standard) de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ envoyée sur Δ_j par β_j
  On a donc $(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty) \in \Phi_j$ ssi

$$0 < z_1 < \ldots < z_j < 1 < \infty.$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

Le travail de Goncharov et Manin

Théorème ([GM04])

Soit $\mathbf{k}$ *un uplet d'entiers de poids* n $(k_1 \geqslant 2)$*. On a*

$$\zeta(k_1, \cdots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$$

avec $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}} = \beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$ *et* $\Phi_n = \beta_n^{-1}(\Delta_n)$*.*
De plus, le diviseur $A_{\mathbf{k}}$ *des singularités de* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *n'intersecte pas le bord de* Φ_n*.*

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

Le travail de Goncharov et Manin

Théorème ([GM04])

Soit $\mathbf{k}$ *un uplet d'entiers de poids* n $(k_1 \geqslant 2)$*. On a*

$$\zeta(k_1, \cdots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$$

avec $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}} = \beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$ *et* $\Phi_n = \beta_n^{-1}(\Delta_n)$*.*
De plus, le diviseur $A_{\mathbf{k}}$ *des singularités de* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *n'intersecte pas le bord de* Φ_n*.*

Théorème ([GM04])

Il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut $\zeta(k_1, \cdots, k_p)$ *:*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(k_1, \cdots, k_p) = \left[\mathrm{H}^n\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}\right); [\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}], [\Phi_n]\right]$$

où B_n *est la clôture de Zariski du bord de* Φ_n*.*

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Produit shuffle

Soit $\beta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \to \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ l'application définie par

$$(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_1, \ldots, z_n, 1, \infty) \times (0, z_{n+1}, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty).$$

Proposition

Le produit de mélange shuffle peut être déduit du changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \widetilde{\omega_{\mathbf{k}}} \wedge \widetilde{\omega_{\mathbf{l}}} = \int_{\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \beta^*(\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}} \wedge \widetilde{\omega_{\mathbf{l}}}).$$

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Produit stuffle

Coordonnées cubiques

Les coordonnées cubiques sur $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$ sont définies par

$$u_1 = t_r, \; u_1 u_2 = t_{r-1}, \; \ldots, \; u_1 \cdots u_r = t_1.$$

Soit $\delta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \to \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ l'application définie par :

$$(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) \longmapsto (0, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}, 1, \infty) \times (0, z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \infty).$$

Proposition

Le produit de mélange stuffle peut être peut être déduit du changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}})$$

avec $\omega_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}(u_1, \ldots, u_n)\, \mathrm{d}^n u$ *et* $\omega_{\mathbf{l}} = f_{\mathbf{l}}(u_{n+1}, \ldots, u_{n+m})\, \mathrm{d}^m u$.

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Remarque

- La décomposition de Cartier ne reste pas (d'un point de vue algébrique) dans les espaces de module de courbes.
- En effet, des formes différentielles qui ne sont pas holomorphes à l'intérieur de l'espace de modules apparaissent.
- Par exemple dans la décomposition du produit $f_{2,1}(u_1, u_2, u_3) f_{2,1}(u_4, u_5, u_6)$ on trouve le terme

$$\frac{u_1 u_2 u_4 u_5 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6}{(1 - u_1 u_2 u_4 u_5)(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)}$$

  qui n'est pas holomorphe sur $\mathcal{M}_{0,9}$ (mais holomorphe sur Φ_6).
- Il faut séparer le diviseur des singularités du bord du domaine d'intégration.
- Il faut pouvoir permuter les u_i (ou les x_i).

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
Stratégie
Construction des X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets
Associateurs et relations explicites entre MZV
Géométrie et régularisation

1 Introduction

2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
- Mélange contractant (stuffle)
- Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
- Produit stuffle et intégrales

3 Le point de vue des espaces de modules de courbes en genre 0
- Espaces de modules de courbes et MZV
- Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
- Stratégie
- Construction des espaces X_n
- Le mélange contractant est motivique

5 En cours de rédaction et projets
- En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
- Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs *n'est pas* à croisements normaux.

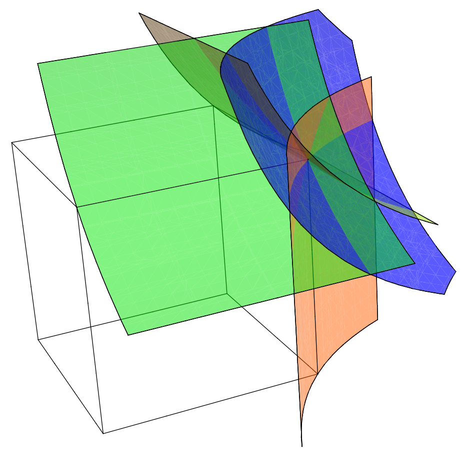


FIGURE: $\mathbb{A}^3$

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs *n'est pas* à croisements normaux.

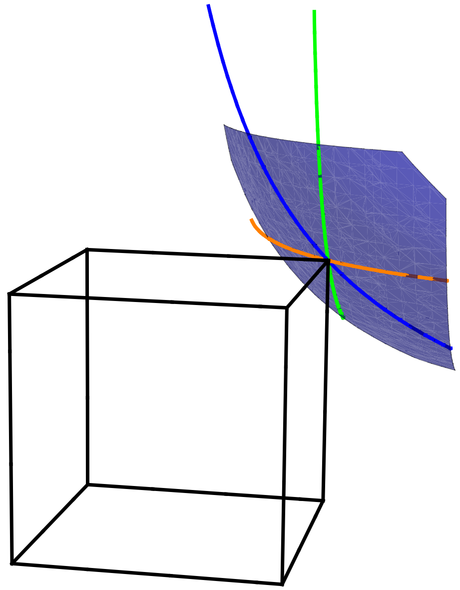
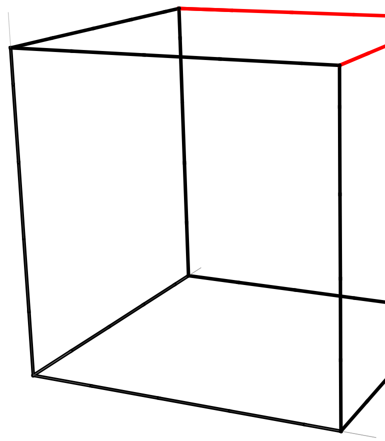


FIGURE: $\mathbb{A}^3$



On doit donc éclater

- un point,
- 3 lignes,
- 3 courbes hyperboles.

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Stratégie : ce que l'on veut

On cherche à obtenir pour chaque uplet $\mathbf{k}$ ($k_1 \geqslant 2$) et pour toute permutation s un *motif de Tate mixte encadré*

$$\left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}^s_{\mathbf{k}}; \widehat{B}_n \setminus (\widehat{A}^s_{\mathbf{k}} \cap \widehat{B}_n)); [\omega_{\mathbf{k},s}]; [\widehat{C}_n]\right]$$

où l'on note B^A pour $B \setminus (A \cap B)$.

- X_n est une variété issue d'une suite d'éclatements $p_n : X_n \longrightarrow \mathbb{A}^n$.
- X_n admet une action du groupe symétrique correspondant « à la permutation des variables x_i. »
- $\widehat{A}^s_{\mathbf{k}}$ est le diviseur des singularités de $\omega_{\mathbf{k},s}$ pull-back sur X_n de $f_{\mathbf{k}}(x_s)\,\mathrm{d}^n x$.
- $\widehat{B}_n$ est la clôture de Zariski du bord de $\widehat{C}_n$ préimage du cube $[0,1]^n$.
- $\widehat{A}^s_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de $\widehat{C}_n$.
- $\widehat{A}^s_{\mathbf{k}} \cup \widehat{B}_n$ est un diviseur à croisements normaux (d.c.n).

Stratégie : obtenir un motif de Tate mixte

Considérons :

- $\mathcal{M}$ une variété quasi-projective (dim. n, def. sur $\mathbb{Q}$).
- $D = A \cup B$ un diviseur à croisements normaux à composantes irréductibles lisses, A et B sans composantes irréductibles communes.
- $\mathcal{M}$ ainsi que chaque composante irréductible de $A_I \cap B_J$ est une variété de Tate (leur motif est $\oplus_i \mathbb{Q}(m_i)[n_i]$).

Sous ces hypothèses, on a :

Théorème (Goncharov [Gon02])

On a un motif de Tate mixte

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A; B \setminus (B \cap A))$$

dont la réalisation de Hodge est le groupe de cohomologie relative correspondant.

Introduction

Stuffle et intégrales
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
Stratégie
Construction des X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets
Associateurs et relations explicites entre MZV
Géométrie et régularisation

Construction des espaces X_n

Théorème (Hu [Hu03])

Soit X_0 ouvert de X lisse avec $X \setminus X_0 = \cup_{i \in I} D_i$ tel que

- *D_i fermée, lisse irréductible ;*
- *D_i et D_j se rencontrent proprement avec $D_i \cap D_j = \emptyset$ ou $\cup D_r$.*

En posant $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$, il existe alors une suite d'éclatements

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant k-1}} X \to \cdots \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant 0}} X \to X$$

telle que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ soit lisse et $(\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X) \setminus X_0 = \bigcup_{i \in I} \widetilde{D_i}$ soit un diviseur à croisements normaux ;

Il faut adapter le théorème au cadre des motifs de Tate mixtes.

Proposition ([Sou09])

Soit X et $\mathcal{D} = \cup D_i$ comme précédemment. Supposons de plus que X ainsi que tous les D_i soient des variétés de Tate.
Alors $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ ainsi que toutes les intersections des $\widetilde{D_i}$ sont des variétés de Tate.

Construction des espaces X_n

Lemme

Soit $I_1, \ldots, I_k$ *des sous-ensembles des* $[\![1, n]\!]$ *(*$n \geqslant 2$*) et* $A_{I_i} \subset \mathbb{A}^n$ *défini par* $\prod_{k \in I_i} x_k = 1$ *.*
L'intersection $A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_k}$ *est isomorphe à*

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m{}^s \times \prod \{x^{e_i} = 1\}.$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Construction des espaces X_n

Lemme

Soit $I_1, \dots, I_k$ des sous-ensembles des $[\![1,n]\!]$ ($n \geqslant 2$) et $A_{I_i} \subset \mathbb{A}^n$ défini par $\prod_{k \in I_i} x_k = 1$.
L'intersection $A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_k}$ est isomorphe à

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m{}^s \times \prod \{x^{e_i} = 1\}.$$

Construction de X_n

La variété $X_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}^n$ est définie comme le résultat de l'application du théorème de Hu à la situation $X = \mathbb{A}^n$ et

$$\mathcal{D} = \{\text{composantes irréductibles des intersections } A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_k}\}.$$

En particulier $\mathbb{A}^n \setminus (\cup_{I \subset [\![1,n]\!]} A_I) \simeq X_n \setminus \widehat{D}_n^1$ où $\widehat{D}_n^1$ est un d.c.n.

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

MZV motiviques alternatives

Proposition ([Sou09])

Soit $\mathcal{M}$ une variété (q.-p., lisse, dim. $n \geqslant 2$) et $D = A \cup B$ un d.c.n. à composantes irréductibles lisses avec A et B sans composantes irréductibles communes. On a alors :

$$\mathrm{Gr}^W_{2n}(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A, B^A)) \simeq \mathrm{Gr}^W_{2n}(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A))$$
$$\mathrm{Gr}^W_{0}(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A, B^A)) \simeq \mathrm{Gr}^W_{0}(\mathrm{H}^n(\mathcal{M}, B)).$$

Théorème ([Sou09])

Soit $\mathbf{k}$ un uplet d'entiers avec $k_1 \geqslant 2$ et s une permutation de $[\![1, n]\!]$. Alors il existe un motif de Tate mixte encadré

$$\zeta^{fr.,\mathcal{M}}_{X_n}(\mathbf{k}, s) = \left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}^s_{\mathbf{k}}; \widehat{B}_n^{\widehat{A}^s_{\mathbf{k}}}); [\omega_{\mathbf{k},s}]; [\widehat{C}_n]\right]$$

ayant pour période $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$.
De même on a un motif de Tate mixte encadré $\zeta^{fr.,\mathcal{M}}_{X_{n+m}}(\mathbf{k}, s_1|\mathbf{l}, s_2)$ ($\rightsquigarrow \omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$).

Introduction
Stuffle et intégrales
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$
Stuffle motivique
Stratégie
Construction des X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes
En cours de rédaction et projets
Associateurs et relations explicites entre MZV
Géométrie et régularisation

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Conclusion

Théorème

Soit $\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{l}$ *avec* $k_1, l_1 \geqslant 2$ *on a*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{k})\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma\in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma).$$

Idée

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{k})\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbf{l}) = \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\mathbf{k}|\mathbf{l}) = \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{X_{n+m}}(\mathbf{k},\mathrm{id}\,|\mathbf{l},\mathrm{id})$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} & \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \arrow[l] & X_{n+m} \arrow[l] \arrow[dll, dotted, "\text{décom-position}"] \\
X_{n+m} \arrow[r, "\text{permutation des } x_i"] & X_{n+m} \arrow[r] & \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}
\end{tikzcd}$$

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{X_{n+m}}(\sigma,s_\sigma) = \sum_{\sigma\in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{X_{n+m}}(\sigma,\mathrm{id}) = \sum_{\sigma\in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma)$$

1. Introduction

2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
   - Mélange contractant (stuffle)
   - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
   - Produit stuffle et intégrales

3. Le point de vue des espaces de modules de courbes en genre 0
   - Espaces de modules de courbes et MZV
   - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Stratégie
   - Construction des espaces X_n
   - Le mélange contractant est motivique

5. En cours de rédaction et projets
   - En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
   - Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Drinfel'd définit un élément Φ_{KZ} de $\mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ associé à une équation différentielle KZ.

Théorème ([Dri91])

L'élément Φ_{KZ} est « group-like »($\Delta(\Phi) = \Phi \otimes \Phi$) et

$$\Phi_{KZ}(X_0, X_1)\Phi_{KZ}(X_1, X_0) = 1 \qquad \text{(I)}$$

$$e^{i\pi X_0}\Phi_{KZ}(X_\infty, X_0)e^{i\pi X_\infty}\Phi_{KZ}(X_1, X_\infty)e^{i\pi X_1}\Phi_{KZ}(X_0, X_1) = 1 \qquad \text{(II)}$$

$$\Phi_{KZ}(X_{12}, X_{23}), \Phi_{KZ}(X_{34}, X_{45})\Phi_{KZ}(X_{51}, X_{12})\Phi_{KZ}(X_{23}, X_{34}) \Phi_{KZ}(X_{45}, X_{51}) = 1 \qquad \text{(III)}$$

où (III) *a lieu dans $U\mathfrak{B}_5 = \mathbb{C}\langle\langle X_{ij}\rangle\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant 5}/\mathcal{R}$.*

Théorème ([LM96], [Fur03])

$$\Phi_{KZ}(X_0, X_1) = \sum_{W\in\{X_0,X_1\}^*} (-1)^{wt(W)}\zeta^{\text{Ш}}(W)W$$

où $\zeta^{\text{Ш}}(W)$ est une extension de la définition des MZV.

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Les relations (I), (II) et (III) induisent des relations entre les coefficicients de la série $\Phi_{KZ}(X_0, X_1)$, c'est-à-dire entre les MZV $\zeta^{Ш}(W)$.

Proposition

La relation (I) *est équivalente à la famille de relations :*

$$\forall W \in \{X_0, X_1\}^*, \qquad \sum_{U_1 U_2 = W} (-1)^{|U_2|} \zeta^{Ш}(U_1) \zeta^{Ш}(\theta(U_2)) = 0$$

où $\theta(X_0) = X_1$ *et* $\theta(X_1) = X_0$ *.*

- On a de même une famille de relations explicites equivalente à (II).
- L'identification

$$U\mathfrak{B}_5 \simeq \mathbb{C}\langle\langle X_{24}, X_{34}, X_{45} \rangle\rangle \rtimes \mathbb{C}\langle\langle X_{12}, X_{23} \rangle\rangle$$

  donne une base, B_4 de $U\mathfrak{B}_5$. Cette base est formée des monômes de la forme $U_{24,34,45} V_{12,23}$.
- Pour un mot W en les X_{ij}, on a donc $W = \sum_{b_4} l_{b_4,W} b_4$.

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Théorème ([Sou10])

La relation (III) *est équivalente à la famille de relations :*

$$\forall b_4 \in B_4 \ (b_4 \neq 1) \qquad \sum_{W \in \{X_{24}, X_{34}, X_{45}, X_{12}, X_{23}\}^*} I_{b_4, W} C_{\mathrm{III}, W} = 0$$

où les coefficients $C_{\mathrm{III},W} = \sum \prod \zeta^{ш}(U)$ *sont explicites alors que les* $I_{b_4,W}$ *ne sont pas explicites.*

On veut comprendre la « géométrie » de ces relations et obtenir une famille explicite de relations.

Définition (Construction Bar [Bro06])

Un élément $\omega \in B(\mathcal{M}_{0,5})$ est une somme finie

$$\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})} c_{\mathbf{i},\mathbf{j}} [\omega_{i_1 j_1} | \cdots | \omega_{i_k j_k}] \qquad \text{avec } \omega_{ij} \in \Omega^1(\mathcal{M}_{0,5})$$

telle que pour tout chemin $\gamma \overset{\text{homo.}}{\sim} 0$ dans $\mathcal{M}_{0,5}$,
$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})} c_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \omega_{i_1 j_1} \circ \cdots \circ \omega_{i_k j_k} = 0.$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

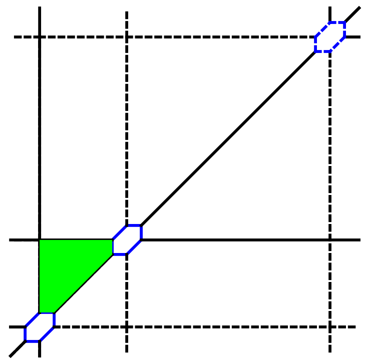
Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Proposition

À tout mot $W \in \{X_{24}, X_{34}, X_{45}, X_{12}, X_{23}\}^*$ *on associe le bar symbole* $\omega_W = [\omega_{i_1 j_1}| \cdots |\omega_{i_k j_k}]$ *où on a remplacé les* X_{ij} *par* $|\omega_{ij}|$*. On a alors :*



$$\int_{\pentagon} \omega_W = C_{\mathrm{III},W}$$

Où $\pentagon$ est le bord de la cellule standard Φ_5 sur $\mathcal{M}_{0,5}$.

Théorème ([Sou10])

La relation (III) *est équivalente à la famille de relations entre MZV donnée par*

$$\forall \omega \in B(\mathcal{M}_{0,5}) \qquad \int_{\pentagon} \omega = 0.$$

Question : Y-a-t-il une famille explicite de ω engendrant $B(\mathcal{M}_{0,5})$?

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Projets : Géométrie de la régularisation stuffle

Régularisation shuffle

Il existe une famille de réels $\zeta^{ш}(W)$ telle que $\zeta^{ш}(X_0) = \zeta^{ш}(X_1) = 0$,

- $\zeta^{ш}(W) = \zeta(W)$ pour tout $W \in X_0\{X_0, X_1\}^* X_1$,
- $\zeta^{ш}(V)\zeta^{ш}(W) = \sum_{U \in \mathrm{sh}(V,W)} \zeta^{ш}(U)$ pour tout $V, W \in \{X_0, X_1\}^*$.

À W on associe ω_W en remplaçant X_0 par $\frac{\mathrm{d}t}{t}$ et X_1 par $\frac{\mathrm{d}t}{1-t}$. On a alors

$$\int_{\Delta_\varepsilon} \omega_W = P_W(\varepsilon, \log(\varepsilon)) \qquad \text{avec } P_W \in \mathbb{C}[X, Y]$$

Théorème

Pour tout mot W en X_0 et X_1 le terme constant de P_W vaut $\zeta^{ш}(W)$.

La régularisation *shuffle* est compatible avec la représentation intégrale du shuffle sur les MZV ordinaires :

$$\int_{\Delta_1} \omega_{W_1} \int_{\Delta_2} \omega_{W_2} = \int_{\Delta_1 \times \Delta_2} \omega_{W_1} \wedge \omega_{W_2} = \sum_\sigma \int_{\Delta_\sigma} \omega_{W_1} \wedge \omega_{W_2} = \sum_\sigma \int_{\Delta} \omega_\sigma.$$

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Projets : Géométrie de la régularisation stuffle

La représentation intégrale du stuffle s'écrit avec des intégrales sur des cubes :

$$\int_{\square} f_{\mathbf{k}} \int_{\square} f_{\mathbf{l}} = \int_{\square} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{l}} = \int_{\square} \sum_{\sigma} f_{\sigma}.$$

Régularisation stuffle

Il existe une famille de réels $\zeta^*(\mathbf{k})$ avec $k_1 \geqslant 1$ telle que $\zeta^{\text{Ш}}(1) = 0$ et

- $\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$ pour tout $\mathbf{k}$ avec $k_1 \geqslant 2$,
- $\zeta^*(\mathbf{k})\zeta^*(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^*(\sigma)$ pour tout $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$ ($k_i, l_j > 0$).

Question

A-t-on pour tout uplet $\mathbf{k}$ ($k_1 \geqslant 1$)

$$\int_{\square_\varepsilon} f_{\mathbf{k}} = P_{\mathbf{k}}(\varepsilon, \log(\varepsilon)) \qquad \text{avec } P \in \mathbb{C}[X, Y]$$

avec $\zeta^*(\mathbf{k}) =$ terme constant de $P_{\mathbf{k}}(\varepsilon, \log(\varepsilon))$?

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Projets : Géométrie de la régularisation stuffle

Les deux régularisations peuvent-elle s'interpréter à l'aide de la géométrie des $\mathcal{M}_{o,n}$?

Régularisation shuffle :

Peut-on déduire $\zeta^{\text{ш}}(W)$ de $\int_{\Phi_{\text{ш}},\varepsilon} \omega_W$?

Est-ce compatible avec la famille d'application d'oubli β correspondant au shuffle ?

Régularisation stuffle :

Peut-on déduire $\zeta^{*}(\mathbf{k})$ de $\int_{\Phi_{*},\varepsilon} f_{\mathbf{k}}$?

Est-ce compatible avec la famille d'application d'oubli δ correspondant au stuffle ?

Renormalisation

- C'est une technique introduite en physique afin d'attribuer une valeur finie (un sens physique) à des intégrales divergentes.
- Il s'agit de compenser pas à pas les différents types de divergences d'une intégrale.
- A. Connes et D. Kreimer ont formalisé cette opération dans le cadre des algèbres de Hopf [CK98].
- L. Guo et B. Zhang l'ont mise en oeuvre dans les cas des MZVs avec le point de vue des séries.

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Projets : Géométrie de la régularisation stuffle

Espaces de modules et renomalisation

On veut construire une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_F$ à partir des $\mathrm{H}^\bullet(\mathcal{M}_{0,n})$ telle que

- le produit et le coproduit soient compatibles à une famille d'applications d'oubli F (celle du shuffle ou du stuffle) ;
- La régularisation ($\zeta^{ш}$ ou ζ^*) découle d'une renormalisation sur $\mathcal{H}_F$.

Projets à long termes

- Faire le lien entre $\mathcal{H}_F$ et le groupe fondamental motivique de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ de Deligne et Goncharov [DG05].
- Reprendre l'approche de Gangl, Goncharov et Levin sur les liens entre cycles algébriques et polylogarithmes mais en modifiant l'algèbre de Bloch et Kritz à l'aide des espaces de modules de courbes.
- Passer en genre 1, c'est à dire regarder les périodes elliptiques.

MZV, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Francis Brown, *Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}(\mathbb{R})$.*, Ph.D. thesis, Université de Bordeaux, arXiv :mmath/0606419, 2006.

Alain Connes and Dirk Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1998), no. 1, 203–242. MR MR1660199 (99h :81137)

Pierre Deligne and Alexander B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.

Pierre Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1969), no. 36, 75–109.

V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, translation in Leningrad Math. J. **2** (1991), no. 4, 829–860.

Hidekazu Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), no. 4, 695–720.

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Construction des X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation