

# Version motivique des relations de double mélange

## Le cas des mots "convergenents"

Ismaël Soudères

12 Janvier 2009

## 1 Introduction

## 2 Représentation intégrale du double mélange

- Shuffle et représentation "simpliciale" des MZV
- Mélange contractant et séries
- Produit stuffle et intégrales :  $\zeta(2)\zeta(2)$
- Produit stuffle et intégrales

## 3 Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0

- Espaces de modules de courbes et MZV
- Applications d'oubli et produits de mélanges sur  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

## 4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin

- Une stratégie d'évitement
- Stratification, éclatements et motifs de Tate mixtes
- Les espaces  $X_n$
- Le mélange contractant est motivique

### Introduction

#### Intégrales et double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et  
intégrales : ex.

Stuffle et  
intégrales

#### Double mélange et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange  
sur  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

#### Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et  
motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs  
de Tate mixtes

## Définition des MZV

Pour tout  $p$ -uplet  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  d'entiers avec  $k_1 \geq 2$ , la valeur zêta multiple (MZV)  $\zeta(\mathbf{k})$  est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

### Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et  
intégrales : ex.

Stuffle et  
intégrales

Double mélange et  
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange  
sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et  
motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs  
de Tate mixtes

# Introduction

## Définition des MZV

Pour tout  $p$ -uplet  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  d'entiers avec  $k_1 \geq 2$ , la valeur zêta multiple (MZV)  $\zeta(\mathbf{k})$  est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

## Relations de doubles mélanges

Ces nombres réels satisfont deux familles de relations quadratiques, appelées double mélange ou shuffle et stuffle.

- Le stuffle ou mélange contractant vient de la représentation en termes de séries ci dessus,
- le shuffle ou mélange vient d'une représentation en termes d'intégrales des valeurs zêta multiples.

# Le produit shuffle et les MZV

## MZV et intégrales simpliciales

À un  $p$ -uplet  $\mathbf{k}$ , de poids  $n = k_1 + \dots + k_p$ , on associe le  $n$ -uplet

$$\bar{\mathbf{k}} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_1-1 \text{ fois}}, 1, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_p-1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1).$$

En posant  $\Delta_n = \{0 < t_1 < \dots < t_n < 1\}$ , on a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \underbrace{(-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}}_{=\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\bar{\mathbf{k}}}}.$$

# Le produit shuffle et les MZV

## MZV et intégrales simpliciales

À un  $p$ -uplet  $\mathbf{k}$ , de poids  $n = k_1 + \dots + k_p$ , on associe le  $n$ -uplet

$$\bar{\mathbf{k}} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_1-1 \text{ fois}}, 1, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_p-1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1).$$

En posant  $\Delta_n = \{0 < t_1 < \dots < t_n < 1\}$ , on a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \underbrace{(-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}}_{=\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\bar{\mathbf{k}}}}.$$

## Le produit shuffle

Le produit shuffle d'un  $n$ -uplet  $\mathbf{e}$  et d'un  $m$ -uplet  $\mathbf{f}$  de symboles est la somme formelle des  $n + m$ -uplets composés des  $n + m$  symboles et préservant l'ordre de  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{f}$ .

## Exemple

$$XY \sqcup AB = XYAB + XAYB + XABY + AXYB + AXBY + ABXY$$

# Le produit shuffle et les MZV

Représentation intégrale du produit shuffle

## Proposition (Relations de shuffle)

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  et  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$  avec  $k_1, l_1 \geq 2$ . Alors

$$\int_{\Delta_n} \omega_{\bar{\mathbf{k}}} \int_{\Delta_m} \omega_{\bar{\mathbf{l}}} = \sum_{\sigma \in \text{Sh}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{l}})} \int_{\Delta_{n+m}} \omega_{\sigma}. \quad (1)$$

Démonstration.

$$\int_{\Delta_n} \omega_{\bar{\mathbf{k}}} \int_{\Delta_m} \omega_{\bar{\mathbf{l}}} = \int_{\Delta} \frac{dt_1}{1-t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n} \frac{dt_{n+1}}{1-t_{n+1}} \cdots \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= \{0 < t_1 < \dots < t_n < 1\} \times \{0 < t_{n+1} < \dots < t_{n+m} < 1\} \\ &= \coprod_{\sigma \in \text{Sh}([1, n], [n+1, m])} \underbrace{\{0 < t_{\sigma(1)} < t_{\sigma(2)} < \dots < t_{\sigma(n+m)} < 1\}}_{\Delta_{\sigma}} \coprod \Delta_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$



# Produit stuffle ou mélange contractant

## Combinatoire du mélange contractant

Soit  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, k_p)$  ( $\mathbf{k}_0 = (k_1, \dots, k_{p-1})$ ) et  $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_0, l_q)$   
 ( $\mathbf{l}_0 = (l_1, \dots, l_{q-1})$ ) deux uplets d'entiers.

### Définition (Stuffle)

Le produit stuffle de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{l}$  est défini de façon inductive par la formule

$$(\mathbf{k}) * (\mathbf{l}) = (\mathbf{k} * \mathbf{l}_0) \cdot l_q + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}) \cdot k_p + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}_0) \cdot (k_p + l_q) \quad (2)$$

et  $\mathbf{k} * () = () * \mathbf{k} = \mathbf{k}$ .

On écrira  $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$  pour désigner un élément  $\sigma$  de la somme formelle  $\mathbf{k} * \mathbf{l}$ .

### Exemple

$$(n) * (m) = (n, m) + (m, n) + (n + m)$$

$$(u) * (v, w) = (u, v, w) + (v, u, w) + (v, w, u) + (u+v, w) + (v, u+w).$$



# Produit stuffle ou mélange contractant

Stuffle et valeurs zêta multiple

## Proposition (Relations de stuffle)

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  et  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$  deux uplets d'entiers avec  $k_1, l_1 \geq 2$ . On a alors l'égalité

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) &= \left( \sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_p^{k_p}} \right) \left( \sum_{m_1 > \dots > m_q > 0} \frac{1}{m_1^{l_1} \dots m_q^{l_q}} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta(\sigma).\end{aligned}$$

## Exemple

$$\begin{aligned}\zeta(k)\zeta(l) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k m^l} = \sum_{n > m > 0} \frac{1}{n^k m^l} + \sum_{m > n > 0} \frac{1}{m^l n^k} + \sum_{n=m} \frac{1}{n^{k+l}} \\ &= \zeta(k, l) + \zeta(l, k) + \zeta(k+l).\end{aligned}$$

# Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

On a vu que  $\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$ . Le changement de variables

$$t_n = x_1, t_{n-1} = x_1 x_2, \dots, t_1 = x_1 \dots x_n, \quad (3)$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour  $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1-x_1 x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1-x_1 x_2},$$

# Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

On a vu que  $\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$ . Le changement de variables

$$t_n = x_1, t_{n-1} = x_1 x_2, \dots, t_1 = x_1 \dots x_n, \quad (3)$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour  $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1-x_1 x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1-x_1 x_2},$$

et pour  $n = 4$

$$\zeta(4) = \int_{[0,1]^4} \frac{d^4 x}{1-x_1 x_2 x_3 x_4} \quad \zeta(2, 2) = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1 x_2 d^4 x}{(1-x_1 x_2)(1-x_1 x_2 x_3 x_4)}$$

$$\text{et } \zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{1-x_1 x_2} \frac{1}{1-x_3 x_4} d^4 x.$$

# Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

$\zeta(2)\zeta(2)$  par les intégrales

Pour toute variable  $\alpha$  et  $\beta$  on a l'égalité

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} + \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\beta\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha\beta}. \quad (4)$$

En posant  $\alpha = x_1x_2$  et  $\beta = x_3x_4$  dans (4), on retrouve la relation de stuffle

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \left( \frac{x_1x_2}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)} + \frac{x_3x_4}{(1-x_3x_4)(1-x_3x_4x_1x_2)} + \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4} \right) d^4x \quad (5)$$

c'est à dire,

$$\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(2, 2) + \zeta(2, 2) + \zeta(4).$$

# Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  un  $p$ -uplet d'entiers et  $n = k_1 + \dots + k_p$ .  
On définit la fonction  $f_{k_1, \dots, k_p}$  de  $n$  variables sur  $[0, 1]^n$  comme

$$f_{k_1, \dots, k_p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_1 \cdots x_{k_1}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1} x_{k_1+1} \cdots x_{k_1+k_2}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1+k_2}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+k_2+k_3}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+\dots+k_{p-1}}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+\dots+k_p}}. \quad (6)$$

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et  
intégrales : ex.

**Stuffle et  
intégrales**

Double mélange et  
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange  
sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et  
motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs  
de Tate mixtes

# Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  un  $p$ -uplet d'entiers et  $n = k_1 + \dots + k_p$ .  
On définit la fonction  $f_{k_1, \dots, k_p}$  de  $n$  variables sur  $[0, 1]^n$  comme

$$f_{k_1, \dots, k_p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_1 \cdots x_{k_1}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1} x_{k_1+1} \cdots x_{k_1+k_2}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+k_2}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+k_2+k_3}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+\dots+k_{p-1}}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+\dots+k_p}}. \quad (6)$$

## Proposition

Pour tout  $p$ -uplet d'entiers  $(k_1, \dots, k_p)$  avec  $k_1 \geq 2$ , on a  
( $n = k_1 + \dots + k_p$ )

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{[0,1]^n} f_{k_1, \dots, k_p}(x_1, \dots, x_n) d^n x. \quad (7)$$

# Produit stuffle et intégrales

## Préliminaires : notations

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k}_0, k_p)$  un  $p$ -uplet d'entiers et  $n = k_1 + \dots + k_p$ . On se donne  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ .

## Notation

- Pour tout uplet  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$ , on écrira  $\prod \mathbf{a} = a_1 \cdots a_r$ .
- On écrira  $\mathbf{x}$  pour  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{x}_0$  pour  $(x_1, \dots, x_{n-k_p})$ .
- Si  $\mathbf{l}$  est un  $q$ -uplet avec  $l_1 + \dots + l_q = m$ , on introduira  $m$  variables  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_m)$ .
- Si  $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$  alors  $y_\sigma$  est la suite en les  $x_i$  et  $x'_j$  telle que : certaines sous suites sont à leurs places respectives par rapport à la position des  $k_i$  et des  $l_j$ .

## Remarque

Soit  $(k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k}_0, k_p)$  comme précédemment,

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1, \dots, k_{p-1}}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}}. \quad (8)$$

# Produit stuffle et intégrales

## Représentation intégrale du Stuffle

### Proposition (Décomposition de Cartier)

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  et  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$  deux uplets avec  $n = k_1 + \dots + k_p$  et  $m = l_1 + \dots + l_q$ . On a alors

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1, \dots, l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} f_{\sigma}(y_{\sigma}). \quad (9)$$

### Idée

On utilise une récurrence sur la longueur des suites. L'objectif est de retrouver la formule de récurrence (2) du produit stuffle pour les fonctions  $f_{k_1, \dots, k_p}$ .



# Produit stuffle et intégrales

## Représentation intégrale du Stuffle

### Proposition (Décomposition de Cartier)

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  et  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$  deux uplets avec  $n = k_1 + \dots + k_p$  et  $m = l_1 + \dots + l_q$ . On a alors

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1, \dots, l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} f_{\sigma}(y_{\sigma}). \quad (9)$$

### Idée

On utilise une récurrence sur la longueur des suites. L'objectif est de retrouver la formule de récurrence (2) du produit stuffle pour les fonctions  $f_{k_1, \dots, k_p}$ .

Si  $p = q = 1$ ,

$$f_n(\mathbf{x})f_m(\mathbf{x}') = \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}} \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'} \stackrel{(4)}{=} \frac{\prod \mathbf{x}}{(1 - \prod \mathbf{x})(1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} + \frac{\prod \mathbf{x}'}{(1 - \prod \mathbf{x}')(1 - \prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x})} + \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'}. \quad (10)$$

# Produit stuffle et intégrales

## Représentation intégrale du Stuffle : preuve

### Pas de la récurrence

Soit  $(k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k}_0, k_p)$  et  $(l_1, \dots, l_q) = (\mathbf{l}_0, l_q)$  deux uplets. La remarque (8) donne

$$f_{\mathbf{k}_0, k_p}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\mathbf{k}, p)) f_{\mathbf{l}_0, l_q}(\mathbf{x}_0', \mathbf{x}'(\mathbf{l}, q)) = f_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}} f_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{x}_0') \frac{\prod \mathbf{x}'_0}{1 - \prod \mathbf{x}'}$$

En appliquant la formule (4) à  $\alpha = \prod \mathbf{x}$  et  $\beta = \prod \mathbf{x}'$ , on trouve que le membre de droite de l'équation précédente est égal à

$$f_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}_0) f_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{x}_0') \cdot (\prod \mathbf{x}_0 \cdot \prod \mathbf{x}'_0) \left( \frac{\prod \mathbf{x}}{(1 - \prod \mathbf{x})(1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} \right. \\ \left. + \frac{\prod \mathbf{x}'}{(1 - \prod \mathbf{x}')(1 - \prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x})} + \frac{1}{(1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} \right).$$

# Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle : preuve

$$f_{k_0}(x_0) f_{l_0}(x_0') (\prod x_0 \prod x_0') \left( \frac{\prod x}{(1 - \prod x)(1 - \prod x \prod x')} + \frac{\prod x'}{(1 - \prod x')(1 - \prod x' \prod x)} + \frac{1}{(1 - \prod x \prod x')} \right).$$

Double mélange  
motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et  
intégrales : ex.

**Stuffle et  
intégrales**

Double mélange et

$\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange  
sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et  
motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs  
de Tate mixtes

# Produit stuffle et intégrales

## Représentation intégrale du Stuffle : preuve

$$f_{k_0}(x_0) f_{l_0}(x'_0) (\prod x_0 \prod x'_0) \left( \frac{\prod x}{(1 - \prod x)(1 - \prod x \prod x')} + \frac{\prod x'}{(1 - \prod x')(1 - \prod x' \prod x)} + \frac{1}{(1 - \prod x \prod x')} \right).$$

## Suite et fin

En développant et en utilisant la remarque (8) on obtient,

$$f_{k_0, k_p}(x) f_{l_0, l_q}(x') = (f_{k_0, k_p}(x) f_{l_0}(x'_0)) \cdot \frac{\prod x \prod x'_0}{1 - \prod x \prod x'} +$$

$$(f_{k_0}(x_0) f_{l_0, l_q}(x')) \cdot \frac{\prod x' \prod x_0}{1 - \prod x' \prod x} +$$

$$(f_{k_0}(x_0) f_{l_0}(x'_0)) \cdot \frac{\prod x_0 \prod x'_0}{1 - \prod x \prod x'}.$$

On voit donc que le produit des fonctions  $f_{k_1, \dots, k_p}$  et  $f_{l_1, \dots, l_q}$  satisfait la relation de récurrence (2) qui définit le produit stuffle.

# Espaces de modules de courbes et MZV

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  avec  $k_1 \geq 2$ ,  $n = k_1 + \dots + k_p$ .

## Objectifs

Il s'agit d'écrire

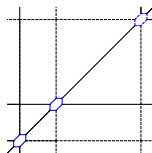
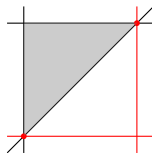
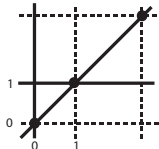
$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}$$

où le lieu  $A$  des singularités de  $\omega_{\mathbf{k}}$  n'intersecte pas le bord de  $\Phi_n$ .

Ce n'est pas le cas dans la représentation

$$\zeta(2) = \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{1}{t_2} \frac{1}{1-t_1} dt_1 dt_2.$$

Par contre après éclatement de  $(0,0)$   
 $(1,1)$  (et  $(\infty, \infty)$ )



# Espaces de modules de courbes et MZV

espaces  $\mathcal{M}_{0,n+3}$  et éclatements

## Définition

L'espace de modules de courbes de genre 0 avec  $n$  points marqués  $\mathcal{M}_{0,n}$  est l'ensemble des sphères de Riemann avec  $n$  points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

# Espaces de modules de courbes et MZV

espaces  $\mathcal{M}_{0,n+3}$  et éclatements

## Définition

L'espace de modules de courbes de genre 0 avec  $n$  points marqués  $\mathcal{M}_{0,n}$  est l'ensemble des sphères de Riemann avec  $n$  points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

## Concrètement

L'ensemble des isomorphismes de la sphère de Riemann est  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  d'où

$$\mathcal{M}_{0,n+3} = \{(z_0, \dots, z_{n+2}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ tel que } z_i \neq z_j\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Et  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  étant tri-transitif, on peut choisir de fixer 3 des points ( $z_0, z_{n+1}$  et  $z_{n+2}$  par ex.) sur 0, 1 et  $\infty$  :

$$\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^n \setminus \{\text{grande diagonale}\}.$$

# Espaces de modules de courbes et MZV

espaces  $\mathcal{M}_{0,n+3}$  et éclatements

## Exemples

- Pour  $n = 1$  on a  $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ .
- Pour  $n = 2$  on a  $\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^2 \setminus \{t_1 \neq t_2\}$ .

Il existe une compactification  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$  qui continue à être un espace de modules.

**Théorème ([DM69],[Knu83])**

$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$  est projectif, irréductible lisse. Le bord de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$  est un diviseur à croisements normaux.

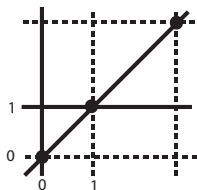


Fig.:  $\mathcal{M}_{0,5}$  in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^2$

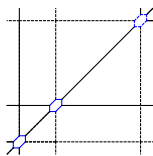


Fig.:  $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(\mathbb{R})$



## Notations

On notera de façon générale

- $t_i$  la coordonnée (simpliciale) telle que

$$t_i(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty) = z_i,$$

- $\Phi_j$  la cellule ouverte de  $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$  qui est envoyée sur  $\Delta_j$  par l'application  $\beta_j : \mathcal{M}_{0,j+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^j$

$$(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty) \mapsto (z_1, \dots, z_j).$$

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et

intégrales : ex.

Stuffle et

intégrales

Double mélange et  
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange

sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et

motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs

de Tate mixtes

## Théorème ([GM04])

Soit  $\mathbf{k}$  un uplet d'entiers de poids  $n$ . On note  $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  le pull-back  $\beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$  et  $\Phi_n$  la préimage  $\beta^{-1}(\Delta_n)$ . Le diviseur des singularités de  $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  n'intersecte pas le bord de  $\Phi_n$  et

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}.$$

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et  
intégrales : ex.

Stuffle et  
intégrales

Double mélange et  
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange  
sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et  
motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs  
de Tate mixtes

## Théorème ([GM04])

Soit  $\mathbf{k}$  un uplet d'entiers de poids  $n$ . On note  $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  le pull-back  $\beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$  et  $\Phi_n$  la préimage  $\beta^{-1}(\Delta_n)$ . Le diviseur des singularités de  $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  n'intersecte pas le bord de  $\Phi_n$  et

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}.$$

## Théorème ([GM04])

On note  $B_n$  la clôture de Zariski du bord de  $\Phi_n$  et  $A_0$  son complémentaire dans  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ . Il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut  $\zeta(k_1, \dots, k_p)$  :

$$\zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{\text{fr.}\mathcal{M}}(k_1, \dots, k_p) = [H^n(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_0; B_n^{A_0}); [\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}], [\Phi_n]].$$

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et

intégrales : ex.

Stuffle et

intégrales

Double mélange et  
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange

sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et

motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs

de Tate mixtes

# Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

## Produit shuffle

Soit  $\beta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \rightarrow \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$  l'application définie par

$$(0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty) \times (0, z_{n+1}, \dots, z_{n+m}, 1, \infty).$$

## Proposition

*Le produit de mélange shuffle peut être interprété comme le changement de variables :*

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_k \wedge \omega_l = \int_{\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \beta^*(\omega_k \wedge \omega_l).$$

## Démonstration.

Le membre de droite de l'égalité est égal à

$$\sum_{\sigma \in \text{Sh}((1, \dots, n), (n+1, \dots, n+m))} \int_{\Phi_{n+m}^\sigma} \frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$



# Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Produit stuffle

## Coordonnées cubiques

Les coordonnées cubiques sur  $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3}$  sont définies par  $u_1 = t_r$  et  $u_i = t_{r-i+1}/t_{r-i+2}$  pour  $i < r$ . Ce système de coordonnées est bien adapté pour exprimer le produit stuffle dans les espaces de module de courbes.

Soit  $\delta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$  l'application définie par

$$(0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_{m+1}, \dots, z_{m+n}, 1, \infty) \times \\ (0, z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \infty).$$

## Proposition

*Le produit de mélange shuffle peut être interprété comme le changement de variables :*

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_k \wedge \omega_l = \int_{\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \delta^*(\omega_k \wedge \omega_l).$$

Double mélange  
motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et

intégrales : ex.

Stuffle et

intégrales

Double mélange et  
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange  
sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et

motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs  
de Tate mixtes

# Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Produit stuffle

## Remarque

- Il faut cependant remarquer que la décomposition de Cartier ne reste pas (d'un point de vue algébrique) dans les espaces de module de courbes.
- En effet des formes différentielles qui ne sont pas holomorphes à l'intérieur de l'espace de module apparaissent.
- Par exemple dans la décomposition du produit  $f_{2,1}(u_1, u_2, u_3)f_{2,1}(u_4, u_5, u_6)$  on trouve le terme

$$\frac{u_1 u_2 u_4 u_5 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6}{(1 - u_1 u_2 u_4 u_5)(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)}$$

qui n'est pas holomorphe sur  $\mathcal{M}_{0,9}$  (mais est holomorphe sur  $\Phi_6$ ).

Double mélange  
motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et

intégrales : ex.

Stuffle et

intégrales

Double mélange et  
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

**Double mélange**

sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et

motifs de Tate

Les espaces  $X_n$

Stuffle et motifs

de Tate mixtes

# Stratégie

- Au vu de l'exemple précédent et de ce que l'on fait avec uniquement des intégrales, *il s'agit de pouvoir permuter les  $u_j$* .
- Ce n'est pas possible de le faire sur  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$  car les coordonnées cubiques sont extrêmement "locales" sur  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ .
- En effet, ces coordonnées proviennent d'une première suite d'éclatements de  $(\mathbb{P}^1)^n$  et n'ont pas de signification globale sur  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$  même si elle sont bien adaptées à l'étude de la cellule standard.

Pour  $n = 2$ , on a :

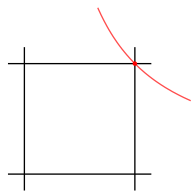


Fig.: vers  $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$

$\xrightarrow{\text{Bl}_{(0,0)} \mathbb{A}^2}$

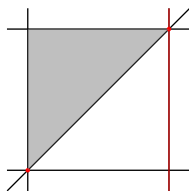


Fig.:  $\mathbb{A}^2$

# Stratégie : le cas de $n = 3$

Description de la situation pour  $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$

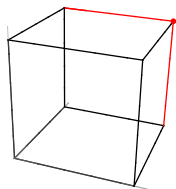


Fig.: vers  $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$

éclatement de  $(0,0,0)$   
→  
puis de  $(0,0,z)$

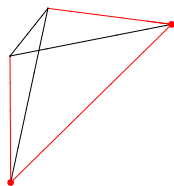


Fig.:  $\mathbb{A}^3$

Le fait que la symétrie soit brisée apparaît nettement sur ces dessins.



# Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs  $x_i = 1$ ,
- les 3 diviseurs  $1 - x_i x_j = 0$ ,
- le diviseur  $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$ .

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.

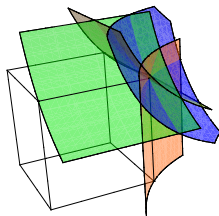


Fig.:  $\mathbb{A}^3$

# Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs  $x_i = 1$ ,
- les 3 diviseurs  $1 - x_i x_j = 0$ ,
- le diviseur  $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$ .

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.

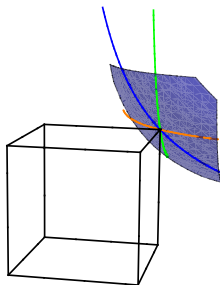
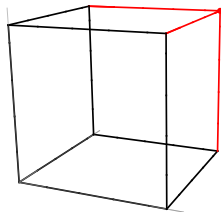


Fig.:  $\mathbb{A}^3$

On doit donc éclater

- un point,
- 3 lignes,
- 3 courbes hyperboles

# Éclatement et diviseurs à croisement normaux

## Théorème (Hu [Hu03])

Soit  $X_0$  un ouvert d'une variété algébrique non singulière  $X$ . On suppose que  $X \setminus X_0 = \cup_{i \in I} D_i$  avec

- 1 pour tout  $i \in I$ ,  $D_i$  est une sous variété fermée, lisse irréductible;
- 2 pour tout  $i, j \in I$ ,  $D_i$  et  $D_j$  se rencontrent proprement, (intersection schématique lisse et  $T_X(D_i) \cap T_X(D_j) = T_X(D_i \cap D_j)$ );
- 3 pour tout  $i, j \in I$ ,  $D_i \cap D_j = \emptyset$  ou  $\cup D_l$ .

En posant  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$ , il existe alors une suite d'éclatements

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X \rightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq k-1} X \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq 0} X \rightarrow X$$

telle que

- 1  $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$  est lisse;  $(\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X) \setminus X_0 = \cup_{i \in I} \widetilde{D}_i$  est un diviseur à croisements normaux;
- 2 Pour tout entier  $k$ ,  $\widetilde{D}_{i_1} \cup \cdots \cup \widetilde{D}_{i_k}$  est non vide si et seulement si  $D_{i_1}, \dots, D_{i_k}$  sont comparables.

# Résultats généraux : éclatements et motifs de Tate mixtes

## Proposition

Soit  $X$  et  $\mathcal{D} = \cup D_i$  comme précédemment, et vérifiant en plus que  $X$  ainsi que tous les  $D_i$  sont des variétés de Tate. Soit  $\mathcal{E}^{r+1}$

l'ensemble des diviseurs exceptionnels de  $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X \rightarrow X$ .

Alors toutes les intersections possibles des strates de  $\mathcal{D}^{r+1} \cup \mathcal{E}^{r+1}$  sont des variétés de Tate ainsi que  $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X$ . En particulier  $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$  ainsi que tous les  $\tilde{D}_i$  sont des variétés de Tate.

## Quelques ingrédients.

- 1 Le contrôle des différentes strates à chaque étape se fait en suivant "pas à pas" la démonstration du théorème de Hu.
- 2 Le résultat est assuré par la "Formule de l'éclatement" :

$$\mathfrak{h}(\mathrm{Bl}_Z X) = \mathfrak{h}(X) \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathfrak{h}(Z)(-i)[-2i].$$



# Construction des espaces $X_n$

Soit  $n \geq 2$  un entier. On définit les diviseurs suivants dans  $\mathbb{A}^n$  :

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$  pour tout  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup_I A_I = \bigcup_i \{x_i = 1\} \cup \left( \bigcup_{I, |I| \geq 2} A_I \right)$
- $D_n^0 = \cup \{x_i = 0\}$  et  $B_n = D_n^0 \cup \left( \bigcup_i \{x_i = 1\} \right)$
- Enfin  $D_n = D_n^0 \cup D_n^1$ .

# Construction des espaces $X_n$

Soit  $n \geq 2$  un entier. On définit les diviseurs suivants dans  $\mathbb{A}^n$  :

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$  pour tout  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup_I A_I = \bigcup_i \{x_i = 1\} \cup \left( \bigcup_{I, |I| \geq 2} A_I \right)$
- $D_n^0 = \cup \{x_i = 0\}$  et  $B_n = D_n^0 \cup (\cup_i \{x_i = 1\})$
- Enfin  $D_n = D_n^0 \cup D_n^1$ .

## Lemme

Soit  $I_1, \dots, I_k$  des sous ensemble des  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . L'intersection  $A_{I_1} \cap A_{I_2} \cap \dots \cap A_{I_k}$  est isomorphe à

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m^s \times \prod \{x^{e_i} = 1\}.$$

## Définition

La variété  $X_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}^n$  est définie comme le résultat de l'application du théorème de Hu à la situation  $X = \mathbb{A}^n$  et

$$\mathcal{D} = \{\text{composantes irréductibles des intersections } A_{I_1} \cap A_{I_2} \cap \dots \cap A_{I_k}\}$$

# Les espaces $X_n$

Formes différentielles et domaine d'intégration

## Définition

Soit  $\widehat{B}_n$  la clôture de la préimage de  $B_n$  et  $\widehat{A}_n$  le diviseur  $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$ .

Double mélange  
motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et  
double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et  
intégrales : ex.

Stuffle et  
intégrales

Double mélange et  
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces

$\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange  
sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie  
d'évitement

Éclatement et  
motifs de Tate

**Les espaces  $X_n$**

Stuffle et motifs  
de Tate mixtes

# Les espaces $X_n$

Formes différentielles et domaine d'intégration

## Définition

Soit  $\widehat{B}_n$  la clôture de la préimage de  $B_n$  et  $\widehat{A}_n$  le diviseur  $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$ .

## Définition

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  un uplet d'entiers positifs avec  $k_1 \geq 2$  tel que  $k_1 + \dots + k_p = n$  et  $s$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On définit la forme différentielle  $\Omega_{\mathbf{k},s} \in \Omega_{\log}^n(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$  par

$$\Omega_{\mathbf{k},s} = f_{k_1, \dots, k_n}(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et on écrira  $\omega_{\mathbf{k},s}$  pour le pull-back sur  $X_n \setminus \widehat{D}_n$  de  $\Omega_{\mathbf{k},s}$ .

## Proposition

Le diviseur des singularités  $\widehat{A}^{\mathbf{k},s}$  de  $\omega_{\mathbf{k},s}$  est inclu dans  $\widehat{A}_n$ .

On a un énoncé similaire pour une forme du type  $\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$ .



# Les espaces $X_n$

Formes différentielles et domaine d'intégration

## Définition

Soit  $\widehat{B}_n$  la clôture de la préimage de  $B_n$  et  $\widehat{A}_n$  le diviseur  $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$ .

## Définition

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$  un uplet d'entiers positifs avec  $k_1 \geq 2$  tel que  $k_1 + \dots + k_p = n$  et  $s$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On définit la forme différentielle  $\Omega_{\mathbf{k},s} \in \Omega_{\log}^n(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$  par

$$\Omega_{\mathbf{k},s} = f_{k_1, \dots, k_n}(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et on écrira  $\omega_{\mathbf{k},s}$  pour le pull-back sur  $X_n \setminus \widehat{D}_n$  de  $\Omega_{\mathbf{k},s}$ .

## Proposition

Le diviseur des singularités  $\widehat{A}^{\mathbf{k},s}$  de  $\omega_{\mathbf{k},s}$  est inclu dans  $\widehat{A}_n$ .

On a un énoncé similaire pour une forme du type  $\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$ .

## Proposition

Le diviseur  $\widehat{A}_n$  n'intersecte pas le bord de  $\widehat{C}_n$  (préimage de  $[0, 1]^n$ ) dans  $X_n(R)$ .

# Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

$X_n$  et la stratification  $\widehat{D}_n$  sont de Tate

## Lemme

Le diviseur  $\widehat{D}_n = \widehat{B}_n^0 \cup \widehat{D}_n^1$  munit  $X_n$  d'une stratification de Tate.

## Démonstration.

- Tout d'abord on montre que toutes les strates de  $\widehat{D}_n^1$  et  $X_n$  sont de Tate.
- On se ramène à le vérifier dans  $\mathbb{A}^n$  où les strates sont isomorphes à  $\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m^s$ .
- Il faut ensuite faire un peu attention afin de récupérer l'intersection de strates de  $\widehat{B}_n^0$  et de  $\widehat{D}_n^1$ .



## Théorème

Soit  $\mathbf{k}$  un uplet d'entiers avec  $k_1 \geq 2$  et  $k_1 + \dots + k_p = n$  et soit  $s$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s$  le diviseur des singularités de la forme  $\omega_{\mathbf{k}}^s$ . Alors il existe un motif de Tate mixte encadré

$$\zeta^{fr., \mathcal{M}}(\mathbf{k}, s) = \left[ H^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{k}}^s; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s}); [\omega_{\mathbf{k}}^s]; [\widehat{C}_n] \right]$$

ayant pour période  $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ .

De plus si  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{l}$  sont deux uplets d'entiers avec  $\sum k_i + \sum l_j = n$  et si  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) est une permutation de  $\llbracket 1, \sum k_i \rrbracket$  (resp.  $\llbracket 1, \sum l_j \rrbracket$ ), alors il existe un motif de Tate mixte encadré

$$\zeta^{fr., \mathcal{M}}(\mathbf{k}, s_1 | \mathbf{l}, s_2) = \left[ H^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{l}, s_2}^{\mathbf{k}, s_1}; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{l}, s_2}^{\mathbf{k}, s_1}}); [\omega_{\mathbf{k}, s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l}, s_2}]; [\widehat{C}_n] \right]$$

où  $\widehat{A}_{\mathbf{l}, s_2}^{\mathbf{k}, s_1}$  est le diviseur des singularités  $\omega_{\mathbf{k}, s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l}, s_2}$

# Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec  $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3}$

## Un léger souci

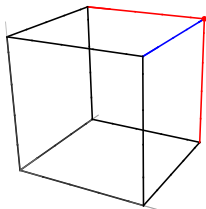
On pourrait vouloir obtenir le stuffle directement avec les espaces  $X_n$ . Cela impliquerait de savoir relier  $X_n \times X_m$  à  $X_{n+m}$ .

## Lemme

Soit  $r \geq 2$  un entier. On notera  $A_r$  une union particulière de composantes de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \setminus B_r$ . Il existe alors une suite de drapeaux  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$ , d'éléments de  $\mathcal{D}_r^1$  vérifiant les conditions nécessaires

$$X_r = \text{Bl}_{\mathcal{F}_N, \dots, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\alpha_r} \overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \setminus A_r = \text{Bl}_{\mathcal{F}_r, \dots, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\delta_r} \mathbb{A}^r \quad (11)$$

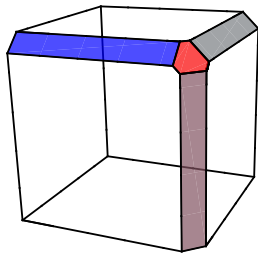
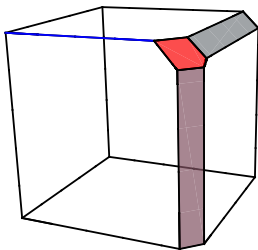
La situation cubique (simplexe après deux éclatements) de départ est :



En éclatant :

- le point  $(1, 1, 1)$
- les droites  $(1, 1, z)$  et  $(x, 1, 1)$

on obtient  $\overline{\mathcal{M}}_{0,6} \setminus A_3$ .



Puis l'éclatement de la dernière  
ligne donne :

On éclate enfin le long des hyperboles (ce qui ne change pas le dessin).

# Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$  : les MZV motiviques

## Corollaire

Avec  $r = n + m$  la proposition précédente donne :

- soit  $\mathbf{a}$  un  $b$ -uplet d'entiers avec  $\sum a_i = n + m$ . On a une égalité de motifs encadrés

$$\zeta^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \text{id}) = \left[ \mathbb{H}^{n+m} \left( \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

# Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$  : les MZV motiviques

## Corollaire

Avec  $r = n + m$  la proposition précédente donne :

- soit  $\mathbf{a}$  un  $b$ -uplet d'entiers avec  $\sum a_i = n + m$ . On a une égalité de motifs encadrés

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \text{id}) = \left[ \mathbb{H}^{n+m} \left( \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

- Soit  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{l}$  deux uplets d'entiers avec  $\sum k_i = n$  et  $\sum l_j = m$ .  
On a alors

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id} | \mathbf{l}, \text{id}) = \left[ \mathbb{H}^{n+m} \left( \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0, B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

# Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$  : les MZV motiviques

## Corollaire

Avec  $r = n + m$  la proposition précédente donne :

- soit  $\mathbf{a}$  un  $b$ -uplet d'entiers avec  $\sum a_i = n + m$ . On a une égalité de motifs encadrés

$$\zeta^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \text{id}) = \left[ \mathbb{H}^{n+m} \left( \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

- Soit  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{l}$  deux uplets d'entiers avec  $\sum k_i = n$  et  $\sum l_j = m$ . On a alors

$$\zeta^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id} | \mathbf{l}, \text{id}) = \left[ \mathbb{H}^{n+m} \left( \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0, B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

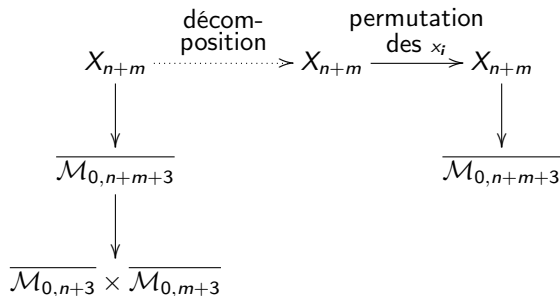
En particulier, pour tout  $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ , le motif encadré  $\zeta_{\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}}^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\mathbf{a})$  associé à  $\zeta(\sigma)$  sur  $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$  est égal à son avatar sur  $X_{n+m}$ ,  $\zeta^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\sigma)$ .



# Version motivique du double mélange

## Conclusion


Pour conclure on utilise le diagramme suivant





## Proposition

Soit  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{l}$  deux uplets d'entiers (avec  $k_1, l_1 \geq 2$  et  $n = \sum k_j$ ,  $m = \sum l_j$ ) on a l'égalité suivante entre motifs Tate mixtes encadrés


$$\zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\mathbf{k}) \zeta_{\mathcal{M}_{0,m+3}}^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}^{\text{fr.}\mathcal{M}}(\sigma).$$

 Pierre Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1969), no. 36, 75–109.

 A. B. Goncharov and Yu. I. Manin, *Multiple  $\zeta$ -motives and moduli spaces  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$* , Compos. Math. **140** (2004), no. 1, 1–14.

 Yi Hu, *A compactification of open varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 12, 4737–4753 (electronic).

 Finn F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks  $M_{g,n}$* , Math. Scand. **52** (1983), no. 2, 161–199.

 Ismael Soudères, *Motivic double shuffle*, <http://arxiv.org/abs/0808.0248>, 2008, accepted for publication in the International Journal of Number Theory.