Version motivique des relations de double mélange
Le cas des mots "convergents"

Ismaël Soudères

12 Janvier 2009

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales

Double mélange et $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Introduction

Définition des MZV

Pour tout p-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers avec $k_1 \geqslant 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

Introduction

Définition des MZV

Pour tout p-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers avec $k_1 \geqslant 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

Relations de doubles mélanges

Ces nombres réels satisfont deux familles de relations quadratiques, appelées double mélange ou shuffle et stuffle.

- Le stuffle ou mélange contractant vient de la représentation en termes de séries ci dessus,
- le shuffle ou mélange vient d'une représentation en termes d'intégrales des valeurs zêta multiples.

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie d'évitement

Éclatement et motifs de Tate

Les espaces X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

Le produit shuffle et les MZV

MZV et intégrales simpliciales

À un p-uplet $\mathbf{k}$, de poids $n = k_1 + \cdots + k_p$, on associe le n-uplet

$$\overline{k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - 1 \text{ fois}}, 1, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_p - 1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_1).$$

En posant $\Delta_n = \{0 < t_1 < \ldots < t_n < 1\}$, on a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \underbrace{(-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}}_{= \omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\overline{k}}}.$$

Le produit shuffle et les MZV

MZV et intégrales simpliciales

À un p-uplet $\mathbf{k}$, de poids $n = k_1 + \cdots + k_p$, on associe le n-uplet

$$\overline{k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - 1 \text{ fois}}, 1, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_p - 1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_1).$$

En posant $\Delta_n = \{0 < t_1 < \ldots < t_n < 1\}$, on a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \underbrace{(-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}}_{= \omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\overline{k}}}.$$

Le produit shuffle

Le produit shuffle d'un n-uplet $\mathbf{e}$ et d'un m-uplet $\mathbf{f}$ de symboles est la somme formelle des $n+m$-uplets composés des $n+m$ symboles et préservant l'ordre de $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$.

Exemple

$XY ш AB = XYAB + XAYB + XABY + AXYB + AXBY + ABXY$

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Shuffle et motifs de Tate mixtes

Le produit shuffle et les MZV

Représentation intégrale du produit shuffle

Proposition (Relations de shuffle)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ *et* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ *avec* $k_1,\ l_1 \geqslant 2$*. Alors*

$$\int_{\Delta_n} \omega_{\overline{k}} \int_{\Delta_m} \omega_{\overline{l}} = \sum_{\sigma \in \mathrm{sh}(\overline{k}, \overline{l})} \int_{\Delta_{n+m}} \omega_\sigma. \qquad (1)$$

Démonstration.

$$\int_{\Delta_n} \omega_{\overline{k}} \int_{\Delta_m} \omega_{\overline{l}} = \int_{\Delta} \frac{dt_1}{1-t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n} \frac{dt_{n+1}}{1-t_{n+1}} \cdots \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta &= \{0 < t_1 < \ldots < t_n < 1\} \times \{0 < t_{n+1} < \ldots < t_{n+m} < 1\} \\ &= \coprod_{\sigma \in \mathrm{sh}([\![1,n]\!],[\![n+1,m]\!])} \underbrace{\{0 < t_{\sigma(1)} < t_{\sigma(2)} < \ldots < t_{\sigma(n+m)} < 1\}}_{\Delta_\sigma} \coprod \Delta_C.\end{aligned}$$

□

Produit stuffle ou mélange contractant

Combinatoire du mélange contractant

Soit $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, k_p)$ $(\mathbf{k}_0 = (k_1, \ldots, k_{p-1}))$ et $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_0, l_q)$ $(\mathbf{l}_0 = (l_1, \ldots, l_{q-1}))$ deux uplets d'entiers.

Définition (Stuffle)

Le produit stuffle de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$ est défini de façon inductive par la formule

$$(\mathbf{k}) * (\mathbf{l}) = (\mathbf{k} * \mathbf{l}_0) \cdot l_q + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}) \cdot k_p + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}_0) \cdot (k_p + l_q) \qquad (2)$$

et $\mathbf{k} * () = () * \mathbf{k} = \mathbf{k}$.
On écrira $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ pour désigner un élément σ de la somme formelle $\mathbf{k} * \mathbf{l}$.

Exemple

$$(n) * (m) = (n, m) + (m, n) + (n + m)$$

$$(u)*(v, w) = (u, v, w)+(v, u, w)+(v, w, u)+(u+v, w)+(v, u+w).$$

Produit stuffle ou mélange contractant

Stuffle et valeurs zêta multiple

Proposition (Relations de stuffle)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ deux uplets d'entiers avec $k_1,\ l_1 \geqslant 2$. On a alors l'égalité

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \left(\sum_{n_1>\ldots>n_p>0} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_p^{k_p}}\right)\left(\sum_{m_1>\ldots>m_q>0} \frac{1}{m_1^{l_1}\cdots m_q^{l_q}}\right) = \sum_{\sigma\in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta(\sigma).$$

Exemple

$$\zeta(k)\zeta(l) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k m^l} = \sum_{n>m>0} \frac{1}{n^k m^l} + \sum_{m>n>0} \frac{1}{m^l n^k} + \sum_{n=m} \frac{1}{n^{k+l}} = \zeta(k,l) + \zeta(l,k) + \zeta(k+l).$$

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

On a vu que $\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_1}{1-t_1}$. Le changement de variables

$$t_n = x_1,\ t_{n-1} = x_1x_2,\ \ldots,\ t_1 = x_1 \ldots x_n, \tag{3}$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1}\frac{x_1\,dx_2}{1-x_1x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1\,dx_2}{1-x_1x_2},$$

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

On a vu que $\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_1}{1-t_1}$. Le changement de variables

$$t_n = x_1,\ t_{n-1} = x_1x_2,\ \dots,\ t_1 = x_1 \dots x_n, \tag{3}$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1}\frac{x_1\,dx_2}{1-x_1x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1\,dx_2}{1-x_1x_2},$$

et pour $n = 4$

$$\zeta(4) = \int_{[0,1]^4} \frac{\mathrm{d}^4x}{1-x_1x_2x_3x_4} \qquad \zeta(2,2) = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1x_2\,\mathrm{d}^4x}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)}$$

$$\text{et } \zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{1-x_1x_2}\frac{1}{1-x_3x_4}\,\mathrm{d}^4x.$$

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

$\zeta(2)\zeta(2)$ par les intégrales

Pour toute variable α et β on a l'égalité

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} + \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\beta\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha\beta}. \tag{4}$$

En posant $\alpha = x_1x_2$ et $\beta = x_3x_4$ dans (4), on retrouve la relation de stuffle

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \left(\frac{x_1x_2}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)} + \frac{x_3x_4}{(1-x_3x_4)(1-x_3x_4x_1x_2)} + \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4} \right) \mathrm{d}^4x \tag{5}$$

c'est à dire,

$$\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(2,2) + \zeta(2,2) + \zeta(4).$$

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$. On définit la fonction $f_{k_1,\ldots,k_p}$ de n variables sur $[0,1]^n$ comme

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{1 - x_1 \cdots x_{k_1}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1} x_{k_1+1} \cdots x_{k_1+k_2}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1+k_2}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+k_2+k_3}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+\ldots+k_{p-1}}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+\cdots+k_p}}. \qquad (6)$$

Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$. On définit la fonction $f_{k_1,\ldots,k_p}$ de n variables sur $[0,1]^n$ comme

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{1 - x_1 \cdots x_{k_1}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1} x_{k_1+1} \cdots x_{k_1+k_2}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1+k_2}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+k_2+k_3}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+\ldots+k_{p-1}}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+\cdots+k_p}}. \qquad (6)$$

Proposition

Pour tout p-uplet d'entiers $(k_1, \ldots, k_p)$ avec $k_1 \geqslant 2$, on a $(n = k_1 + \cdots + k_p)$

$$\zeta(k_1,\ldots,k_p) = \int_{[0,1]^n} f_{k_1,\ldots,k_p}(x_1,\ldots,x_n)\, \mathrm{d}^n x. \qquad (7)$$

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Produit stuffle et intégrales

Préliminaires : notations

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \dots + k_p$. On se donne n variables $x_1, \dots, x_n$.

Notation

- Pour tout uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$, on écrira $\prod \mathbf{a} = a_1 \cdots a_r$.
- On écrira $\mathbf{x}$ pour $(x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{x}_0$ pour $(x_1, \dots, x_{n-k_p})$.
- Si $\mathbf{l}$ est un q-uplet avec $l_1 + \dots + l_q = m$, on introduira m variables $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_m)$.
- Si $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ alors y_σ est la suite en les x_i et x'_j telle que : certaines sous suites sont à leurs places respectives par rapport à la position des k_i et des l_j.

Remarque

Soit $(k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ comme précédemment,

$$f_{k_1,\dots,k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1,\dots,k_{p-1}}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}}. \quad (8)$$

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle

Proposition (Décomposition de Cartier)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets avec $n = k_1 + \dots + k_p$ et $m = l_1 + \dots + l_q$. On a alors

$$f_{k_1,\dots,k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1,\dots,l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} f_\sigma(y_\sigma). \quad (9)$$

Idée

On utilise une récurrence sur la longueur des suites. L'objectif est de retrouver la formule de récurrence (2) du produit stuffle pour les fonctions $f_{k_1,\dots,k_p}$.

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle

Proposition (Décomposition de Cartier)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ deux uplets avec $n = k_1 + \cdots + k_p$ et $m = l_1 + \cdots + l_q$. On a alors

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1,\ldots,l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} f_\sigma(y_\sigma). \tag{9}$$

Idée

On utilise une récurrence sur la longueur des suites. L'objectif est de retrouver la formule de récurrence (2) du produit stuffle pour les fonctions $f_{k_1,\ldots,k_p}$.

Si $p = q = 1$,

$$f_n(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}') = \frac{1}{1-\prod \mathbf{x}} \frac{1}{1-\prod \mathbf{x}'} \stackrel{(4)}{=} \frac{\prod \mathbf{x}}{(1-\prod \mathbf{x})(1-\prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} + \frac{\prod \mathbf{x}'}{(1-\prod \mathbf{x}')(1-\prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x})} + \frac{1}{1-\prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'}. \tag{10}$$

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle : preuve

Pas de la récurrence

Soit $(k_1, \ldots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ et $(l_1, \ldots, l_q) = (\mathbf{l_0}, l_q)$ deux uplets. La remarque (8) donne

$$f_{\mathbf{k_0},k_p}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\mathbf{k}, p)) f_{\mathbf{l_0},l_q}(\mathbf{x}_0{}', \mathbf{x}'(\mathbf{l}, q)) = f_{\mathbf{k_0}}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1-\prod \mathbf{x}} f_{\mathbf{l_0}}(\mathbf{x}_0{}') \frac{\prod \mathbf{x}'_0}{1-\prod \mathbf{x}'}.$$

En appliquant la formule (4) à $\alpha = \prod \mathbf{x}$ et $\beta = \prod \mathbf{x}'$, on trouve que le membre de droite de l'équation précédente est égal à

$$f_{\mathbf{k_0}}(\mathbf{x}_0) f_{\mathbf{l_0}}(\mathbf{x}_0{}') \cdot \left(\prod \mathbf{x}_0 \cdot \prod \mathbf{x}'_0\right) \left(\frac{\prod \mathbf{x}}{(1-\prod \mathbf{x})(1-\prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} + \frac{\prod \mathbf{x}'}{(1-\prod \mathbf{x}')(1-\prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x})} + \frac{1}{(1-\prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} \right).$$

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie d'évitement

Éclatement et motifs de Tate

Les espaces X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle : preuve

$$f_{k_0}(x_0)f_{l_0}(x_0{}')(\prod x_0 \prod x'_0)\left(\frac{\prod x}{(1-\prod x)(1-\prod x \prod x')} + \frac{\prod x'}{(1-\prod x')(1-\prod x' \prod x)} + \frac{1}{(1-\prod x \prod x')}\right).$$

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle : preuve

$$f_{k_0}(x_0)f_{l_0}(x_0{}')(\prod x_0 \prod x'_0)\left(\frac{\prod x}{(1-\prod x)(1-\prod x \prod x')} + \frac{\prod x'}{(1-\prod x')(1-\prod x' \prod x)} + \frac{1}{(1-\prod x \prod x')}\right).$$

Suite et fin

En développant et en utilisant la remarque (8) on obtient,

$$f_{k_0,k_p}(\mathbf{x})f_{l_0,l_q}(\mathbf{x}') = \left(f_{k_0,k_p}(\mathbf{x})f_{l_0}(\mathbf{x}_0{}')\right)\cdot\frac{\prod \mathbf{x}\prod \mathbf{x}'_0}{1-\prod \mathbf{x}\prod \mathbf{x}'}+$$

$$\left(f_{k_0}(\mathbf{x}_0)f_{l_0,l_q}(\mathbf{x}')\right)\cdot\frac{\prod \mathbf{x}'\prod \mathbf{x}_0}{1-\prod \mathbf{x}'\prod \mathbf{x}}+$$

$$\left(f_{k_0}(\mathbf{x}_0)f_{l_0}(\mathbf{x}_0{}')\right)\cdot\frac{\prod \mathbf{x}_0\prod \mathbf{x}'_0}{1-\prod \mathbf{x}\prod \mathbf{x}'}.$$

On voit donc que le produit des fonctions $f_{k_1,\ldots,k_p}$ et $f_{l_1,\ldots,l_q}$ satisfait la relation de récurrence (2) qui définit le produit stuffle.

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie d'évitement

Éclatement et motifs de Tate

Les espaces X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

Espaces de modules de courbes et MZV

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ avec $k_1 \geqslant 2$, $n = k_1 + \cdots k_p$.

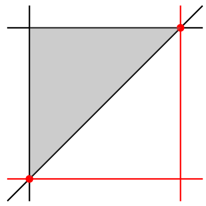
Objectifs

Il s'agit d'écrire

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}$$

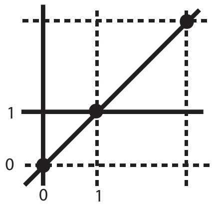
où le lieu A des singularités de $\omega_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de Φ_n.

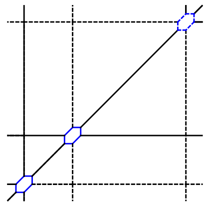
Ce n'est pas le cas dans la représentation



$$\zeta(2) = \int_{0<t_1<t_2<1} \frac{1}{t_2} \frac{1}{1-t_1} \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2.$$

Par contre après éclatement de $(0,0)$ $(1,1)$ (et (∞,∞))





Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Définition

L'*espace de modules de courbes de genre* 0 *avec* n *points marqués* $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Définition

L'*espace de modules de courbes de genre* 0 *avec n points marqués* $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

Concrètement

L'ensemble des isomorphismes de la sphère de Riemann est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ d'où

$$\mathcal{M}_{0,n+3} = \{(z_0, \dots, z_{n+2}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ tel que } z_i \neq z_j\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ étant tri-transitif, on peut choisir de fixer 3 des points (z_0, z_{n+1} et z_{n+2} par ex.) sur 0, 1 et ∞ :

$$\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^n \setminus \{\text{grande diagonale}\}.$$

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Exemples

- Pour $n = 1$ on a $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- Pour $n = 2$ on a

$$\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^2 \setminus \{t_1 \neq t_2\}.$$

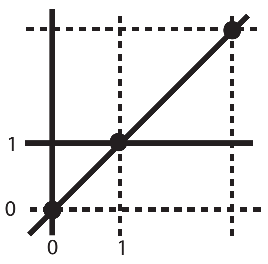


Fig.: $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^2$

Il existe une compactification $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ qui continue à être un espace de modules.

Théorème ([DM69],[Knu83])

$\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est projectif, irréductible lisse. Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est un diviseur à croisements normaux.

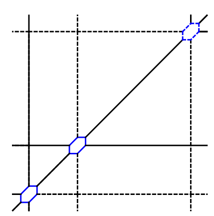


Fig.: $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}(\mathbb{R})$

Espaces de modules de courbes et MZV

Notations

On notera de façon générale

- t_i la coordonée (simpliciale) telle que

$$t_i(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty) = z_i,$$

- Φ_j la cellule ouverte de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ qui est envoyée sur Δ_j par l'application $\beta_j : \mathcal{M}_{0,j+3} \to (\mathbb{P}^1)^j$

$$(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty) \mapsto (z_1, \dots, z_j).$$

Espaces de modules de courbes et MZV

Théorème ([GM04])

Soit $\mathbf{k}$ *un uplet d'entiers de poids* n*. On note* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *le pull-back* $\beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$ *et* Φ_n *la préimage* $\beta^{-1}(\Delta_n)$*. Le diviseur des singularités de* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *n'intersecte pas le bord de* Φ_n *et*

$$\zeta(k_1, \cdots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}.$$

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange
- Shuffle et MZV
- Stuffle et MZV
- Stuffle et intégrales : ex.
- Stuffle et intégrales

Double mélange et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
- Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
- Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique
- Une stratégie d'évitement
- Éclatement et motifs de Tate
- Les espaces X_n
- Stuffle et motifs de Tate mixtes

Espaces de modules de courbes et MZV

Théorème ([GM04])

Soit $\mathbf{k}$ *un uplet d'entiers de poids* n. *On note* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *le pull-back* $\beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$ *et* Φ_n *la préimage* $\beta^{-1}(\Delta_n)$. *Le diviseur des singularités de* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *n'intersecte pas le bord de* Φ_n *et*

$$\zeta(k_1, \cdots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}.$$

Théorème ([GM04])

On note B_n *la clôture de Zariski du bord de* Φ_n *et* A_0 *son complémentaire dans* $\partial\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$. *Il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut* $\zeta(k_1, \cdots, k_p)$ *:*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(k_1, \cdots, k_p) = \left[\mathrm{H}^n\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_0; B_n^{A_0}\right); [\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}], [\Phi_n]\right].$$

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Produit shuffle

Soit $\beta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \to \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ l'application définie par

$$\begin{aligned}(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_1, \ldots, z_n, 1, \infty)\times \\ (0, z_{n+1}, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty).\end{aligned}$$

Proposition

Le produit de mélange shuffle peut être interprété comme le changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \beta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}).$$

Démonstration.

Le membre de droite de l'égalité est égal à

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{sh}((1,\ldots,n),(n+1,\ldots,n+m))} \int_{\Phi^{\sigma}_{n+m}} \frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$

□

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Une stratégie d'évitement

Éclatement et motifs de Tate

Les espaces X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Produit stuffle

Coordonnées cubiques

Les coordonnées cubiques sur $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$ sont définies par $u_1 = t_r$ et $u_i = t_{r-i+1}/t_{r-i+2}$ pour $i < r$. Ce système de coordonnées est bien adapté pour exprimer le produit stuffle dans les espaces de module de courbes.

Soit $\delta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ l'application définie par

$$(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}, 1, \infty) \times (0, z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \infty).$$

Proposition

Le produit de mélange shuffle peut être interprété comme le changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}).$$

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Produit stuffle

Remarque

- Il faut cependant remarquer que la décomposition de Cartier ne reste pas (d'un point de vue algébrique) dans les espaces de module de courbes.
- En effet des formes différentielles qui ne sont pas holomorphes à l'intérieur de l'espace de module apparaissent.
- Par exemple dans la décomposition du produit $f_{2,1}(u_1, u_2, u_3) f_{2,1}(u_4, u_5, u_6)$ on trouve le terme

$$\frac{u_1 u_2 u_4 u_5 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6}{(1 - u_1 u_2 u_4 u_5)(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)}$$

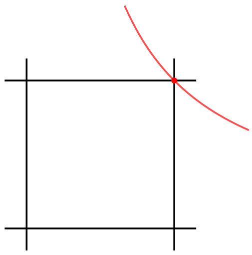
qui n'est pas holomorphe sur $\mathcal{M}_{0,9}$ (mais est holomorphe sur Φ_6).

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Stratégie

- Au vu de l'exemple précédent et de ce que l'on fait avec uniquement des intégrales, *il s'agit de pouvoir permuter les u_i*.
- Ce n'est pas possible de le faire sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ car les coordonnées cubiques sont extrêmement "locales" sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$.
- En effet, ces coordonnées proviennent d'une première suite d'éclatements de $(\mathbb{P}^1)^n$ et n'ont pas de signification globale sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ même si elle sont bien adaptées à l'étude de la cellule standard.

Pour $n = 2$, on a :



$\xrightarrow{\mathrm{Bl}_{(0,0)}\ \mathbb{A}^2}$

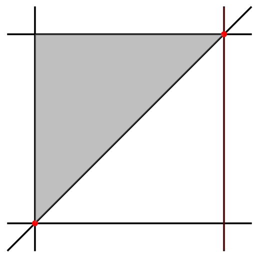
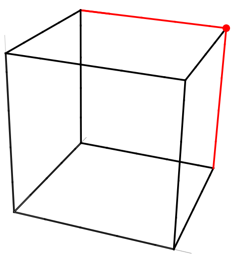


Fig.: vers $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$

Fig.: $\mathbb{A}^2$

Stratégie : le cas de $n = 3$

Description de la situation pour $\overline{\mathcal{M}_{0,6}}$



$\xrightarrow[\text{puis de } (0,0,z)]{\text{éclatement de } (0,0,0)}$

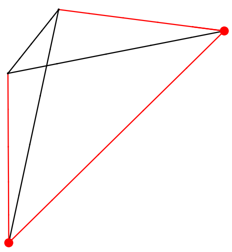


Fig.: vers $\overline{\mathcal{M}_{0,6}}$

Fig.: $\mathbb{A}^3$

Le fait que la symétrie soit brisée apparaît nettement sur ces dessins.

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a
- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.

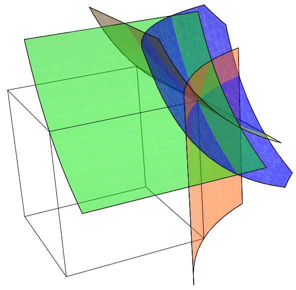


Fig.: $\mathbb{A}^3$

Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a
- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.

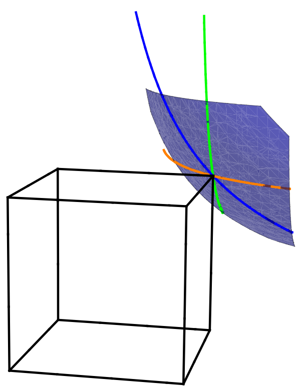
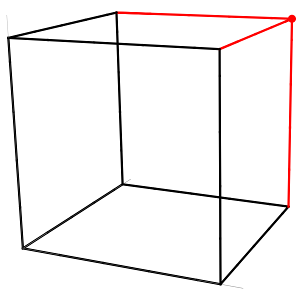


Fig.: $\mathbb{A}^3$



On doit donc éclater
- un point,
- 3 lignes,
- 3 courbes hyperboles

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Éclatement et diviseurs à croisement normaux

Théorème (Hu [Hu03])

Soit X_0 un ouvert d'une variété algébrique non singulière X. On suppose que $X \setminus X_0 = \cup_{i\in I} D_i$ avec

1. *pour tout $i \in I$, D_i est une sous variété fermée, lisse irréductible ;*
2. *pour tout $i, j \in I$, D_i et D_j se rencontrent proprement, (intersection schématique lisse et $T_X(D_i) \cap T_X(D_j) = T_X(D_i \cap D_j)$) ;*
3. *pour tout $i, j \in I$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ ou $\cup D_l$.*

En posant $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i\in I}$, il existe alors une suite d'éclatements

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant k-1}} X \to \cdots \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant 0}} X \to X$$

telle que

1. $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ *est lisse ;* $(\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X) \setminus X_0 = \bigcup_{i\in I} \widetilde{D_i}$ *est un diviseur à croisements normaux ;*
2. *Pour tout entier k, $\widetilde{D_{i_1}} \cup \cdots \cup \widetilde{D_{i_k}}$ est non vide si et seulement si $D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$ sont comparables.*

Résultats généraux : éclatements et motifs de Tate mixtes

Proposition

Soit X et $\mathcal{D} = \cup D_i$ comme précédemment, et vérifiant en plus que X ainsi que tous les D_i sont des variétés de Tate. Soit $\mathcal{E}^{r+1}$ l'ensemble des diviseurs exceptionnels de $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant r}} X \to X$. Alors toutes les intersections possibles des strates de $\mathcal{D}^{r+1} \cup \mathcal{E}^{r+1}$ sont des variétés de Tate ainsi que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant r}} X$. En particulier $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ ainsi que tous les $\tilde{D}_i$ sont des variétés de Tate.

Quelques ingrédients.

1. Le contrôle des différentes strates à chaque étape se fait en suivant "pas à pas" la démonstration du théorème de Hu.
2. Le résultat est assuré par la "Formule de l'éclatement" :

$$\mathfrak{H}(\mathrm{Bl}_Z X) = \mathfrak{H}(X) \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathfrak{H}(Z)(-i)[-2i].$$

$\square$

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Construction des espaces X_n

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On définit les diviseurs suivants dans $\mathbb{A}^n$:

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$ pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup_I A_I = \bigcup_i \{x_i = 1\} \bigcup \left(\bigcup_{I, |I| \geqslant 2} A_I \right)$
- $D_n^0 = \cup \{x_i = 0\}$ et $B_n = D_n^0 \bigcup (\bigcup_i \{x_i = 1\})$
- Enfin $D_n = D_n^0 \bigcup D_n^1$.

Construction des espaces X_n

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On définit les diviseurs suivants dans $\mathbb{A}^n$:

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$ pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup_I A_I = \bigcup_i \{x_i = 1\} \bigcup \left(\bigcup_{I, |I| \geqslant 2} A_I \right)$
- $D_n^0 = \cup \{x_i = 0\}$ et $B_n = D_n^0 \bigcup (\bigcup_i \{x_i = 1\})$
- Enfin $D_n = D_n^0 \bigcup D_n^1$.

Lemme

Soit $I_1, \dots I_k$ des sous ensemble des $[\![1, n]\!]$. L'intersection $A_{I_1} \cap A_{I_2} \cap \dots \cap A_{I_k}$ est isomorphe à

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m{}^s \times \prod \{x^{e_i} = 1\}.$$

Définition

La variété $X_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}^n$ est définie comme le résultat de l'application du théorème de Hu à la situation $X = \mathbb{A}^n$ et

$$\mathcal{D} = \{\text{composantes irréductibles des intersections } A_{I_1} \cap A_{I_2} \cap \dots \cap A_{I_k}\}$$

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Les espaces X_n

Formes différentielles et domaine d'intégration

Définition

Soit $\widehat{B}_n$ la clôture de la préimage de B_n et $\widehat{A}_n$ le diviseur $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$.

Les espaces X_n

Formes différentielles et domaine d'intégration

Définition

Soit $\widehat{B}_n$ la clôture de la préimage de B_n et $\widehat{A}_n$ le diviseur $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$.

Définition

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ un uplet d'entiers positifs avec $k_1 \geqslant 2$ tel que $k_1 + \cdots + k_p = n$ et s une permutation de $[\![1, n]\!]$. On définit la forme différentielle $\Omega_{\mathbf{k},s} \in \Omega^n_{log}(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$ par

$$\Omega_{\mathbf{k},s} = f_{k_1,\dots,k_n}(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) \, \mathrm{d}\, x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_n$$

et on écrira $\omega_{\mathbf{k},s}$ pour le pull-back sur $X_n \setminus \widehat{D}_n$ de $\Omega_{\mathbf{k},s}$.

Proposition

Le diviseur des singularités $\widehat{A}^{\mathbf{k},s}$ de $\omega_{\mathbf{k},s}$ est inclu dans $\widehat{A}_n$.
On a un énoncé similaire pour une forme du type $\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$.

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Une stratégie d'évitement

Éclatement et motifs de Tate

Les espaces X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

Les espaces X_n

Formes différentielles et domaine d'intégration

Définition

Soit $\widehat{B}_n$ la clôture de la préimage de B_n et $\widehat{A}_n$ le diviseur $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$.

Définition

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ un uplet d'entiers positifs avec $k_1 \geqslant 2$ tel que $k_1 + \cdots + k_p = n$ et s une permutation de $[\![1, n]\!]$. On définit la forme différentielle $\Omega_{\mathbf{k},s} \in \Omega^n_{log}(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$ par

$$\Omega_{\mathbf{k},s} = f_{k_1,\ldots,k_n}(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}) \, \mathrm{d}\, x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_n$$

et on écrira $\omega_{\mathbf{k},s}$ pour le pull-back sur $X_n \setminus \widehat{D}_n$ de $\Omega_{\mathbf{k},s}$.

Proposition

Le diviseur des singularités $\widehat{A}^{\mathbf{k},s}$ de $\omega_{\mathbf{k},s}$ est inclu dans $\widehat{A}_n$.
On a un énoncé similaire pour une forme du type $\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$.

Proposition

Le diviseur $\widehat{A}_n$ n'intersecte pas le bord de $\widehat{C}_n$ (préimage de $[0,1]^n$) dans $X_n(R)$.

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

X_n et la stratification $\widehat{D}_n$ sont de Tate

Lemme

Le diviseur $\widehat{D}_n = \widehat{B}^0_n \cup \widehat{D}^1_n$ munit X_n d'une stratification de Tate.

Démonstration.

- Tout d'abord on montre que toutes les strates de $\widehat{D}^1_n$ et X_n sont de Tate.
- On se ramène à le vérifier dans $\mathbb{A}^n$ où les strates sont isomorphes a $\mathbb{A}^r \times {\mathbb{G}_m}^s$.
- Il faut ensuite faire un peu attention afin de récupérer l'intersection de strates de $\widehat{B}^0_n$ et de $\widehat{D}^1_n$.

$\square$

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

MZV motiviques alternatives

Théorème

Soit $\mathbf{k}$ *un uplet d'entiers avec* $k_1 \geqslant 2$ *et* $k_1 + \ldots + k_p = n$ *et soit* s *une permutation de* $[\![1, n]\!]$. *Soit* $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s$ *le diviseur des singularités de la forme* $\omega_{\mathbf{k}}^s$. *Alors il existe un motif de Tate mixte encadré*

$$\zeta^{fr.,\mathcal{M}}(\mathbf{k}, s) = \left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{k}}^s; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s}); [\omega_{\mathbf{k}}^s]; [\widehat{C}_n]\right]$$

ayant pour période $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$.
De plus si $\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{l}$ *sont deux uplets d'entiers avec* $\sum k_i + \sum l_j = n$ *et si* s_1 *(resp.* s_2*) est une permutation de* $[\![1, \sum k_i]\!]$ *(resp.* $[\![1, \sum l_j]\!]$*) , alors il existe un motif de Tate mixte encadré*

$$\zeta^{fr.,\mathcal{M}}(\mathbf{k}, s_1|\mathbf{l}, s_2) = \left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{l},s_2}^{\mathbf{k},s_1}; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{l},s_2}^{\mathbf{k},s_1}}); [\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}]; [\widehat{C}_n]\right]$$

où $\widehat{A}_{\mathbf{l},s_2}^{\mathbf{k},s_1}$ *est le diviseur des singularités* $\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Un léger souci

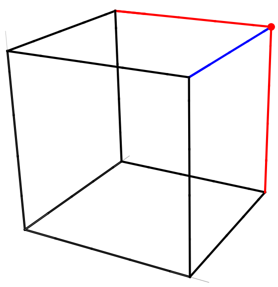
On pourrait vouloir obtenir le stuffle directement avec les espaces X_n. Cela impliquerait de savoir relier $X_n \times X_m$ à X_{n+m}.

Lemme

Soit $r \geqslant 2$ *un entier. On notera* A_r *une union particulière de composantes de* $\partial\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus B_r$. *Il existe alors une suite de drapeaux* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$, *d'éléments de* $\mathcal{D}_r^1$ *vérifiant les conditions nécessaires*

$$X_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_N,\ldots,\mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\alpha_r} \overline{\mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus A_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_r,\ldots,\mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\tilde{\delta}_r} \mathbb{A}^r \quad (11)$$

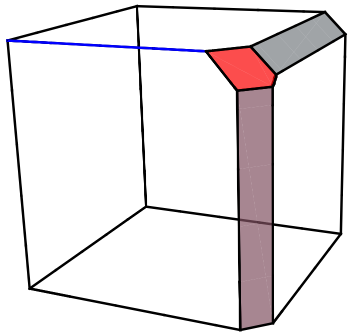
La situation cubique (simplexe après deux éclatements) de départ est :



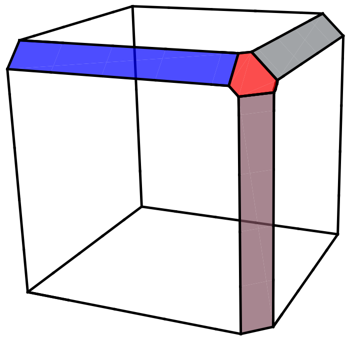
En éclatant :

- le point $(1,1,1)$
- les droites $(1,1,z)$ et $(x,1,1)$

on obtient $\overline{\mathcal{M}_{0,6}} \setminus A_3$.



Puis l'éclatement de la dernière ligne donne :



On éclate enfin le long des hyperboles (ce qui ne change pas le dessin).

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$: les MZV motiviques

Corollaire

Avec $r = n+m$ la proposition précédente donne :

- *soit $\mathbf{a}$ un b-uplet d'entiers avec $\sum a_i = n+m$. On a une égalité de motifs encadrés*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathrm{id}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0}\right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction

Intégrales et double mélange

Shuffle et MZV

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Une stratégie d'évitement

Éclatement et motifs de Tate

Les espaces X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$: les MZV motiviques

Corollaire

Avec $r = n+m$ la proposition précédente donne :

- *soit **a** un b-uplet d'entiers avec $\sum a_i = n+m$. On a une égalité de motifs encadrés*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathrm{id}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B^{A_0}_{n+m}\right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

- *Soit **k** et **l** deux uplets d'entiers avec $\sum k_i = n$ et $\sum l_j = m$. On a alors*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \mathrm{id}\,|\mathbf{l}, \mathrm{id}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0, B^{A_0}_{n+m}\right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

Double mélange motivique

I. Soudères

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$: les MZV motiviques

Corollaire

Avec $r = n+m$ la proposition précédente donne :

- *soit **a** un b-uplet d'entiers avec $\sum a_i = n+m$. On a une égalité de motifs encadrés*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathrm{id}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B^{A_0}_{n+m}\right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

- *Soit **k** et **l** deux uplets d'entiers avec $\sum k_i = n$ et $\sum l_j = m$. On a alors*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \mathrm{id}\,|\mathbf{l}, \mathrm{id}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0, B^{A_0}_{n+m}\right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

En particulier, pour tout $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, le motif encadré $\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{a})$ associé à $\zeta(\sigma)$ sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$ est égal à son avatar sur X_{n+m}, $\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma)$.

Double mélange motivique

I. Soudères

Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes

Version motivique du double mélange

Conclusion

Pour conclure on utilise le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X_{n+m} \arrow[r, dotted, "\text{décom-position}"] \arrow[d] & X_{n+m} \arrow[r, "\text{permutation des } x_i"] & X_{n+m} \arrow[d] \\
\overline{\mathcal{M}}_{0,n+m+3} \arrow[d] & & \overline{\mathcal{M}}_{0,n+m+3} \\
\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,m+3} & &
\end{tikzcd}$$

Proposition

Soit $\mathbf{l}$ *et* $\mathbf{l}$ *deux uplets d'entiers (avec* $k_1, l_1 \geqslant 2$ *et* $n = \sum k_i$*,* $m = \sum l_j$*) on a l'égalité suivante entre motifs Tate mixtes encadrés*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{k})\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma).$$

- Pierre Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1969), no. 36, 75–109.
- A. B. Goncharov and Yu. I. Manin, *Multiple ζ-motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$*, Compos. Math. **140** (2004), no. 1, 1–14.
- Yi Hu, *A compactification of open varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 12, 4737–4753 (electronic).
- Finn F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks $M_{g,n}$*, Math. Scand. **52** (1983), no. 2, 161–199.
- Ismael Souderes, *Motivic double shuffle*, http ://arxiv.org/abs/0808.0248, 2008, accepted for publication in the Internationnal Journal of Number Theory.

Double mélange motivique
I. Soudères
Introduction
Intégrales et double mélange
Shuffle et MZV
Stuffle et MZV
Stuffle et intégrales : ex.
Stuffle et intégrales
Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$
Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$
Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$
Stuffle motivique
Une stratégie d'évitement
Éclatement et motifs de Tate
Les espaces X_n
Stuffle et motifs de Tate mixtes