Éclatements à la MacPherson-Procesi et produits de mélanges des valeurs zêta multiples

Le produit stuffle est motivique

Ismaël Soudères

Université Paris Diderot - Paris 7
Institut de Mathématiques de Jussieu

Séminaire d'algèbre de l'Institut Camille Jordan (Lyon 1)
19 novembre 2009

1. Introduction

2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
   - Mélange contractant (stuffle) et séries
   - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
   - Produit stuffle et intégrales

3. Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
   - Espaces de modules de courbes et MZV
   - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Une stratégie d'évitement : exemples
   - Stratégie : cas général
   - Éclatements, construction de X_n et stratification
   - Le mélange contractant est motivique

Définition des MZV

Pour tout p-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers avec $k_1 \geqslant 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

Relations de doubles mélanges

Ces nombres réels satisfont deux familles de relations quadratiques, appelées double mélange ou shuffle et stuffle.

- Le stuffle ou mélange contractant vient de la représentation en termes de séries ci dessus,
- le shuffle ou mélange vient d'une représentation en termes d'intégrales des valeurs zêta multiples.

Introduction

Motifs et MZVs

Motifs

On cherche à obtenir des objets motiviques qui ont le même comportement que les MZV (*valeurs zêta multiples motiviques*) car :

- On espère que des idées géométriques ainsi qu'une forte contrainte de structure permettront d'expliquer les propriétés des MZV.
- C'est avec la théorie des motifs qu'on obtient la borne supérieure de la conjecture de la dimension.

Motifs et espaces de modules de courbes [GM04]

D'une part $\zeta(k_1, \cdots, k_p) = \displaystyle\int_{\Phi_{\boldsymbol{n}}} \omega_{\mathbf{k}}$. et, il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut $\zeta(k_1, \cdots, k_p)$:

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{n}+\mathbf{3}}}(k_1, \cdots, k_p) = \left[\mathrm{H}^n\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}\right); [\omega_{\mathbf{k}}], [\Phi_n]\right].$$

on notera $B^{\boldsymbol{A}}$ pour $B \setminus (A \cap B)$

Introduction

Résultats et propriétés

Théorème

Soit **k** *et* **l** *deux uplets d'entiers de poids n et m avec* $k_1, l_1 \geqslant 2$ *on a*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{k})\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \text{ terme du shuffle}} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma)$$

$$\text{et} \quad \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbf{k})\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \text{ terme du stuffle}} \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma)$$

- On ne parlera ici que du stuffle

Étapes intermédiaires

- Adapter un théorème de Y. Hu sur les suites d'éclatements au cadre des motifs de Tate mixtes.
- Contrôler l'intersection d'hypersurfaces de la forme $1 - \prod x_i = 0$.
- Connaître la structure de Hodge mixte de certains groupes de cohomologie relative.

1. Introduction

2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
   - Mélange contractant (stuffle) et séries
   - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
   - Produit stuffle et intégrales

3. Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
   - Espaces de modules de courbes et MZV
   - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Une stratégie d'évitement : exemples
   - Stratégie : cas général
   - Éclatements, construction de X_n et stratification
   - Le mélange contractant est motivique

Mélange contractant (stuffle) et séries

Combinatoire du mélange contractant

Soit $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, k_p)$ ($\mathbf{k}_0 = (k_1, \ldots, k_{p-1})$) et $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_0, l_q)$ ($\mathbf{l}_0 = (l_1, \ldots, l_{q-1})$) deux uplets d'entiers.

Définition (Stuffle)

Le produit stuffle de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$ est défini de façon inductive par la formule

$$(\mathbf{k}) * (\mathbf{l}) = (\mathbf{k} * \mathbf{l}_0) \cdot l_q + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}) \cdot k_p + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}_0) \cdot (k_p + l_q) \qquad (1)$$

et $\mathbf{k} * () = () * \mathbf{k} = \mathbf{k}$.
On écrira $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ pour désigner un élément σ de la somme formelle $\mathbf{k} * \mathbf{l}$.

Exemple

$$(n) * (m) = (n, m) + (m, n) + (n + m)$$

$$(u)*(v, w) = (u, v, w)+(v, u, w)+(v, w, u)+(u+v, w)+(v, u+w).$$

Mélange contractant (stuffle) et séries

Stuffle et valeurs zêta multiple

Proposition (Relations de stuffle)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ *et* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ *deux uplets d'entiers avec* $k_1,\ l_1 \geqslant 2$. *On a alors l'égalité*

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \left(\sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}} \right) \left(\sum_{m_1 > \ldots > m_q > 0} \frac{1}{m_1^{l_1} \cdots m_q^{l_q}} \right)$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta(\sigma).$$

Exemple

$$\zeta(k)\zeta(l) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k m^l} = \sum_{n > m > 0} \frac{1}{n^k m^l} + \sum_{m > n > 0} \frac{1}{m^l n^k} + \sum_{n = m} \frac{1}{n^{k+l}}$$
$$= \zeta(k, l) + \zeta(l, k) + \zeta(k + l).$$

1. Introduction

2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
   - Mélange contractant (stuffle) et séries
   - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
   - Produit stuffle et intégrales

3. Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
   - Espaces de modules de courbes et MZV
   - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Une stratégie d'évitement : exemples
   - Stratégie : cas général
   - Éclatements, construction de X_n et stratification
   - Le mélange contractant est motivique

Produit stuffle et intégrales

MZV et intégrales simpliciales

À un p-uplet $\mathbf{k}$, de poids $n = k_1 + \cdots + k_p$, on associe le n-uplet

$$\overline{k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - 1 \text{ fois}}, 1, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_p - 1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_1).$$

En posant $\Delta_n = \{0 < t_1 < \ldots < t_n < 1\}$, on a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \underbrace{(-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}}_{= \omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\overline{k}}}.$$

Exemple

On a

$$\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1 - t_1}, \qquad \zeta(2,2) = \int_{\Delta_4} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_3}{1 - t_3} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1 - t_1},$$

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

Le changement de variables

$$t_n = x_1,\ t_{n-1} = x_1x_2,\ \dots,\ t_1 = x_1 \dots x_n, \tag{2}$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1}\frac{x_1\,dx_2}{1-x_1x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1\,dx_2}{1-x_1x_2},$$

et pour $n = 4$

$$\zeta(4) = \int_{[0,1]^4} \frac{\mathrm{d}^4x}{1-x_1x_2x_3x_4} \quad \zeta(2,2) = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1x_2\,\mathrm{d}^4x}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)}.$$

On a aussi

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{1-x_1x_2}\frac{1}{1-x_3x_4}\,\mathrm{d}^4x.$$

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

$\zeta(2)\zeta(2)$ par les intégrales

Pour toute variable α et β on a l'égalité

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} + \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\beta\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha\beta}. \tag{3}$$

En posant $\alpha = x_1x_2$ et $\beta = x_3x_4$ dans (3), on retrouve la relation de stuffle

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \left(\frac{x_1x_2}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)} + \frac{x_3x_4}{(1-x_3x_4)(1-x_3x_4x_1x_2)} + \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4} \right) \mathrm{d}^4x$$

c'est à dire,

$$\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(2,2) + \zeta(2,2) + \zeta(4).$$

Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$. On définit la fonction $f_{k_1,\ldots,k_p}$ de n variables sur $[0,1]^n$ comme

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{1 - x_1 \cdots x_{k_1}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1} x_{k_1+1} \cdots x_{k_1+k_2}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1+k_2}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+k_2+k_3}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+\ldots+k_{p-1}}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+\cdots+k_p}}.$$

Proposition

Pour tout p-uplet d'entiers $(k_1, \ldots, k_p)$ avec $k_1 \geqslant 2$, on a ($n = k_1 + \cdots + k_p$)

$$\zeta(k_1, \ldots, k_p) = \int_{[0,1]^n} f_{k_1,\ldots,k_p}(x_1,\ldots,x_n)\, \mathrm{d}^n x.$$

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$. On se donne n variables $x_1, \dots, x_n$.

Remarque

Soit $(k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ comme précédemment,

$$f_{k_1,\dots,k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1,\dots,k_{p-1}}(\mathbf{x}_0)\frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}} \tag{4}$$

avec $\mathbf{x}_0 = ((x_1, \dots, x_{n-k_p})), \quad \prod \mathbf{x}_0 = \prod_{i=1}^{n-k_p} x_i, \quad \prod \mathbf{x} = \prod_{i=1}^{n} x_i$

Proposition (Décomposition de Cartier)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets avec $n = k_1 + \cdots + k_p$ et $m = l_1 + \cdots + l_q$. On a alors

$$f_{k_1,\dots,k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1,\dots,l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} f_\sigma(y_\sigma).$$

1. Introduction
2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
   - Mélange contractant (stuffle) et séries
   - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
   - Produit stuffle et intégrales
3. Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
   - Espaces de modules de courbes et MZV
   - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$
4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Une stratégie d'évitement : exemples
   - Stratégie : cas général
   - Éclatements, construction de X_n et stratification
   - Le mélange contractant est motivique

Espaces de modules de courbes et MZV

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ avec $k_1 \geqslant 2$, $n = k_1 + \cdots k_p$.

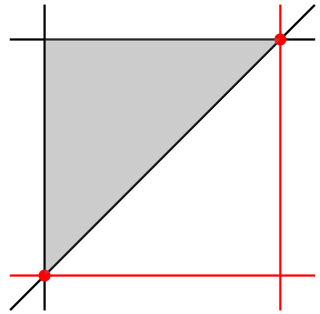
Objectifs

Il s'agit d'écrire

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}$$

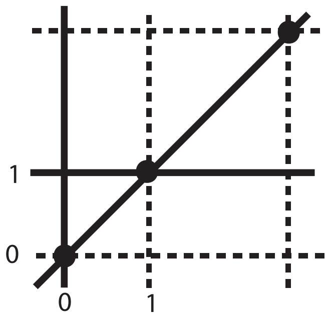
où le lieu $A_{\mathbf{k}}$ des singularités de $\omega_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de Φ_n.

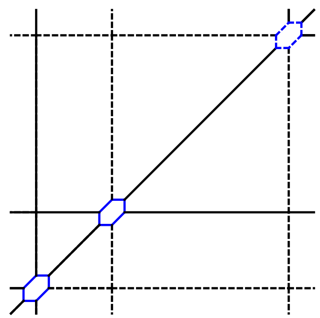
Ce n'est pas le cas dans la représentation



$$\zeta(2) = \int_{0<t_1<t_2<1} \frac{1}{t_2} \frac{1}{1-t_1} \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2.$$

Par contre après éclatement de $(0,0)$ $(1,1)$ (et (∞, ∞))





Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Définition

L'*espace de modules de courbes de genre* 0 *avec n points marqués* $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

Concrètement

L'ensemble des isomorphismes de la sphère de Riemann est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ d'où

$$\mathcal{M}_{0,n+3} = \{(z_0, \dots, z_{n+2}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ tel que } z_i \neq z_j\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ étant tri-transitif, on peut choisir de fixer 3 des points (z_0, z_{n+1} et z_{n+2} par ex.) sur 0, 1 et ∞ :

$$\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^n \setminus \{\text{grande diagonale}\}.$$

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Exemples

- Pour $n = 1$ on a $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- Pour $n = 2$ on a

$$\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\})^2 \setminus \{t_1 \neq t_2\}.$$

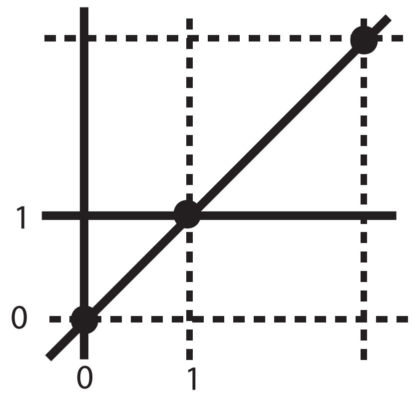


Fig.: $\mathcal{M}_{0,5}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^2$

Il existe une compactification $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ qui continue à être un espace de modules.

Théorème ([DM69],[Knu83])

$\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est projectif, irréductible lisse. Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est un diviseur à croisements normaux.

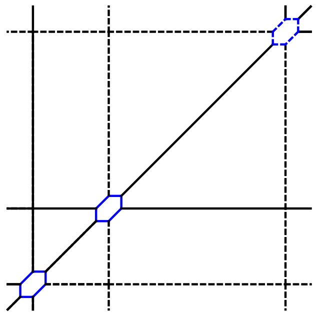


Fig.: $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}(\mathbb{R})$

Espaces de modules de courbes et MZV

Notations

On notera de façon générale sur $\mathcal{M}_{0,j+3}$

- t_i la coordonée (simpliciale) telle que

$$t_i(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty) = z_i,$$

- Φ_j la cellule ouverte de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ qui est envoyée sur Δ_j par l'application $\beta_j : \mathcal{M}_{0,j+3} \to (\mathbb{P}^1)^j$

$$(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty) \mapsto (z_1, \ldots, z_j).$$

Espaces de modules de courbes et MZV

Théorème ([GM04])

Soit $\mathbf{k}$ *un uplet d'entiers de poids n. On note* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *le pull-back* $\beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$ *et* Φ_n *la préimage* $\beta_n^{-1}(\Delta_n)$*. Le diviseur des singularités de* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$ *n'intersecte pas le bord de* Φ_n *et*

$$\zeta(k_1, \cdots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}.$$

Théorème ([GM04])

On note B_n *la clôture de Zariski du bord de* Φ_n *et* $A_{\mathbf{k}}$ *le diviseur des singularités de* $\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}$*. Il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut* $\zeta(k_1, \cdots, k_p)$ *:*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+3}}(k_1, \cdots, k_p) = \left[\mathrm{H}^n\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}\right); [\widetilde{\omega_{\mathbf{k}}}], [\Phi_n]\right].$$

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Produit stuffle

Coordonnées cubiques

Les coordonnées cubiques sur $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$ sont définies par $u_1 = t_r$ et $u_i = t_{r-i+1}/t_{r-i+2}$ pour $i < r$. Ce système de coordonnées est bien adapté pour exprimer le produit stuffle dans les espaces de module de courbes.

Soit $\delta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ l'application définie par

$$(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}, 1, \infty) \times (0, z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \infty).$$

Proposition

Le produit de mélange stuffle peut être interprété comme le changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}).$$

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Produit stuffle

Remarque

- Il faut cependant remarquer que la décomposition de Cartier ne reste pas (d'un point de vue algébrique) dans les espaces de module de courbes.
- En effet des formes différentielles qui ne sont pas holomorphes à l'intérieur de l'espace de module apparaissent.
- Par exemple dans la décomposition du produit $f_{2,1}(u_1, u_2, u_3)f_{2,1}(u_4, u_5, u_6)$ on trouve le terme

$$\frac{u_1 u_2 u_4 u_5 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6}{(1 - u_1 u_2 u_4 u_5)(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)}$$

  qui n'est pas holomorphe sur $\mathcal{M}_{0,9}$ (mais est holomorphe sur Φ_6).
- Il faut pouvoir permuter les u_i (ou les x_i)

1 Introduction

2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)

- Mélange contractant (stuffle) et séries
- Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
- Produit stuffle et intégrales

3 Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0

- Espaces de modules de courbes et MZV
- Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin

- Une stratégie d'évitement : exemples
- Stratégie : cas général
- Éclatements, construction de X_n et stratification
- Le mélange contractant est motivique

Stratégie

- Au vu de l'exemple précédent et de ce que l'on fait avec uniquement des intégrales, *il s'agit de pouvoir permuter les u_i*.
- Ce n'est pas possible de le faire sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ car les coordonnées cubiques sont extrêmement "locales" sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$.
- En effet, ces coordonnées proviennent d'une première suite d'éclatements de $(\mathbb{P}^1)^n$ et n'ont pas de signification globale sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ même si elle sont bien adaptées à l'étude de la cellule standard.

Pour $n = 2$, on a :

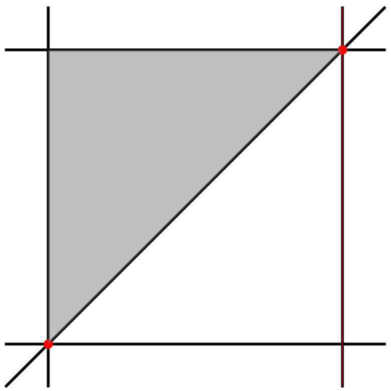


Fig.: $\mathbb{A}^2$

$\xleftarrow{\mathrm{Bl}_{(0,0)}\,\mathbb{A}^2}$

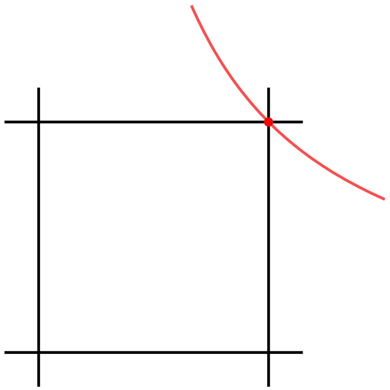
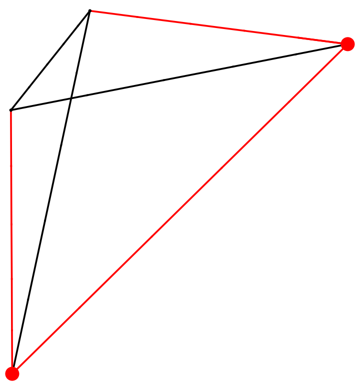


Fig.: vers $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$

Stratégie : le cas de $n = 3$

Description de la situation pour $\overline{\mathcal{M}_{0,6}}$



$$\xleftarrow[\textbf{puis de } (0,0,z)]{\textbf{éclatement de } (0,0,0)}$$

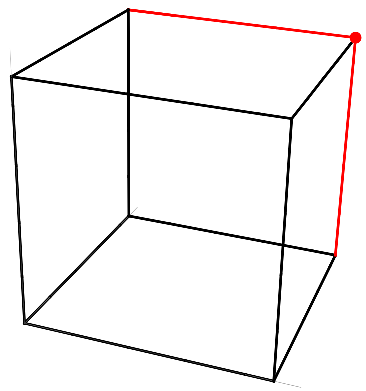


Fig.: $\mathbb{A}^3$ Fig.: vers $\overline{\mathcal{M}_{0,6}}$

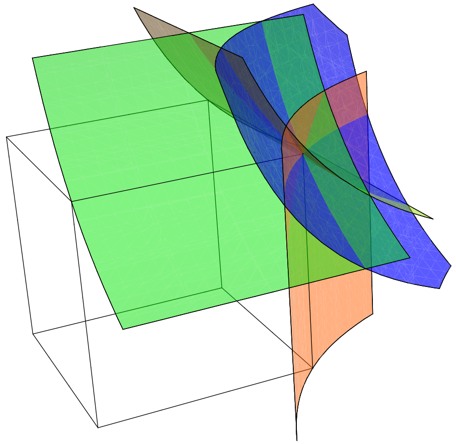
Le fait que la symétrie soit brisée apparaît nettement sur ces dessins.

Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.



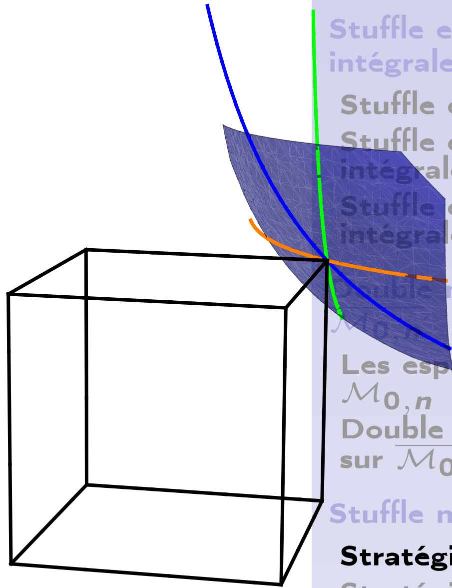
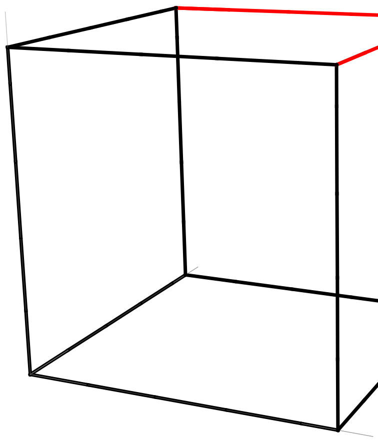


Fig.: $\mathbb{A}^3$



On doit donc éclater

- un point,
- 3 lignes,
- 3 courbes hyperboles.

Stratégie : cas général

Ce que l'on veut

On cherche à obtenir pour chaque uplet $\mathbf{k}$ ($k_1 \geqslant 2$) et pour toute permutation s un *motif de Tate mixte encadré*

$$\left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}^s_{\mathbf{k}}; \widehat{B}_n \setminus (\widehat{A}^s_{\mathbf{k}} \cap \widehat{B}_n)); [\omega_{\mathbf{k},s}]; [\widehat{C}_n]\right]$$

on notera $B^{\boldsymbol{A}}$ pour $B \setminus (A \cap B)$

- X_n est une variété issue d'une suite d'éclatements $p_n : X_n \longrightarrow \mathbb{A}^n$.
- la variété X_n admet une action naturelle du groupe symétrique « correspondant à la permutation des variables x_i »
- $\widehat{A}^s_{\mathbf{k}}$ est le diviseur des singularités de $\omega_{\mathbf{k},s}$ pull-back sur X_n de $f_{\mathbf{k}}(x_s)\,\mathrm{d}^n x$
- $\widehat{B}_n$ est la clôture de Zarisky du bord de $\widehat{C}_n$ préimage du cube $[0,1]^n$
- $\widehat{A}^s_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de $\widehat{C}_n$.

Stratégie : cas général

Obtenir un motif de Tate mixte [Gon02]

- $\mathcal{M}$ une variété quasi-projective (dim. n, def. sur $\mathbb{Q}$).
- $D = A \cup B$ un diviseur à croisements normaux à composantes irréductibles lisses, A et B sans composantes irréductibles communes.
- $\mathcal{M}$ ainsi que chaque composante irréductible de $A_I \cap B_J$ est une variété de Tate (leur motif est $\oplus_i \mathbb{Q}(m_i)[n_i]$) .

Théorème

On a un motif de Tate mixte

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A; B \setminus (B \cap A))$$

dont la réalisation de Hodge est le groupe de cohomologie relative correspondant.

Stratégie : cas général

Situation de départ

- l'espace affine $\mathbb{A}^n$
- des diviseurs $A_I : 1 - \prod_{i \in I} x_i = 0$; $D_n^1 = \cup_I A_I$
- un ensemble de strates :
  $\mathcal{D} = \{\text{comp. irr. de } A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_k} \text{ tel que } I_j \subset [\![1; n]\!]\}$

On cherche

- $p_n : X_n \longrightarrow \mathbb{A}^n$
- $X_n \setminus \widehat{D}_n^1 \simeq \mathbb{A}^n \setminus D_n^1$, avec $\widehat{D}_n^1$ d.c.n
- une forme différentielle $\omega_{\mathbf{k},\mathbf{s}}$ sur $X_n \setminus \widehat{D}_n^1$ telle que
  $$\int_{p_n^{-1}([0,1]^n)} \omega_{\mathbf{k},\mathbf{s}} = \zeta(\mathbf{k})$$
- Vérifier quelques propriétés.

Stratégie : cas général

Étapes

1. Construire $X_n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ ainsi que $\widehat{D}_n^1$ au-dessus de $\cup A_I$.
2. Décrire les formes $\omega_{\mathbf{k},s}$ et leurs comportements vis à vis de $\widehat{C}_n$.
3. Vérifier que X_n et les strates de $\widehat{D}_n$ sont des variétés de Tate.
4. Obtenir un motif de Tate mixte encadré associé à $\zeta(\mathbf{k})$ et X_n.

1. Introduction

2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
   - Mélange contractant (stuffle) et séries
   - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
   - Produit stuffle et intégrales

3. Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
   - Espaces de modules de courbes et MZV
   - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Une stratégie d'évitement : exemples
   - Stratégie : cas général
   - Éclatements, construction de X_n et stratification
   - Le mélange contractant est motivique

Éclatement et diviseurs à croisement normaux

Théorème (Hu [Hu03])

Soit X_0 ouvert de X lisse avec $X \setminus X_0 = \cup_{i\in I} D_i$ tel que

- *D_i fermée, lisse irréductible ;*
- *D_i et D_j se rencontrent proprement avec $D_i \cap D_j = \emptyset$ ou $\cup D_r$.*

En posant $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i\in I}$, il existe alors une suite d'éclatements

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant k-1}} X \to \cdots \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant 0}} X \to X$$

telle que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ soit lisse et $(\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X) \setminus X_0 = \bigcup_{i\in I} \widetilde{D_i}$ soit un diviseur à croisements normaux ;

Il faut adapter le théorème au cadre des motifs de Tate mixtes.

Proposition

Soit X et $\mathcal{D} = \cup D_i$ comme précédemment. Supposons de plus que X ainsi que tous les D_i sont des variétés de Tate.
Alors $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ ainsi que tous les intersections des $\widetilde{D_i}$ sont des variétés de Tate.

Éclatements et construction des espaces X_n

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On définit les diviseurs suivants dans $\mathbb{A}^n$:

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$ pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup_I A_I = \bigcup_i \{x_i = 1\} \bigcup (\bigcup_{I, |I| \geqslant 2} A_I)$

Lemme

Soit $I_1, \ldots I_k$ des sous ensemble des $[\![1, n]\!]$. L'intersection $A_{I_1} \cap A_{I_2} \cap \cdots \cap A_{I_k}$ est isomorphe à

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m{}^s \times \prod \{x^{e_i} = 1\}.$$

Construction de X_n

La variété $X_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}^n$ est définie comme le résultat de l'application du théorème de Hu à la situation $X = \mathbb{A}^n$ et

$$\mathcal{D} = \{\text{composantes irréductibles des intersections } D_n^1\}$$

En particulier $X_n \setminus \widehat{D}_n^1 \simeq \mathbb{A}^n \setminus D_n^1$ et $\widehat{D}_n^1$ est un d.c.n.

Propriétés des espaces X_n

Formes différentielles et domaine d'intégration

Proposition

Le diviseur

$$\widehat{A}_n = \widehat{D}_n^1 \setminus \{\textit{préimage dans } X_n \textit{ de l'union des } \{x_i = 1\}\}$$

n'intersecte pas le bord de $\widehat{C}_n$ (préimage de $[0,1]^n$) dans $X_n(\mathbb{R})$.

Définition

Soit $\mathbf{k}$ un uplet d'entiers positifs avec $k_1 \geqslant 2$ et s une permutation de $[\![1, n]\!]$. On définit la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k},s}$ sur $X_n \setminus \widehat{A}_n$ par

$$\omega_{\mathbf{k},s} = p_n^*(f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_s)\,\mathrm{d}^n x).$$

Proposition

Le diviseur des singularités $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s$ de $\omega_{\mathbf{k},s}$ est inclu dans $\widehat{A}_n$.
On a un énoncé similaire pour une forme du type $\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$.

Espaces X_n et stratification de Tate

X_n et la stratification $\widehat{D}_n$ sont de Tate

Lemme

Le diviseur $\widehat{D}_n = \widehat{B}_n^0 \cup \widehat{D}_n^1$ est un d.c.n. et munit X_n d'une stratification de Tate.

Démonstration.

- Tout d'abord on montre que toutes les strates de $\widehat{D}_n^1$ et X_n sont de Tate.
- Pour cela on se ramène à vérifier dans $\mathbb{A}^n$ que les composantes irréductibles des intersections $A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_k}$ sont de Tate.
- Or ces strates sont isomorphes à $\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m{}^s$.
- Il faut ensuite faire un peu attention afin de récupérer l'intersection de strates de $\widehat{B}_n^0$ et de $\widehat{D}_n^1$.

$\square$

1. Introduction

2. Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
   - Mélange contractant (stuffle) et séries
   - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
   - Produit stuffle et intégrales

3. Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
   - Espaces de modules de courbes et MZV
   - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Une stratégie d'évitement : exemples
   - Stratégie : cas général
   - Éclatements, construction de X_n et stratification
   - Le mélange contractant est motivique

MZV motiviques alternatives

Théorème

Soit $\mathbf{k}$ *(resp.* $\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{l}$*) un uplet d'entiers avec* $k_1 \geqslant 2$ *(resp.* $k_1, l_1 \geqslant 2$*) et* s *(resp.* s_1 *et* s_2*) une permutation de* $[\![1, n]\!]$*. Alors il existe un motif de Tate mixte encadré*

$$\zeta^{fr.,\mathcal{M}}_{X_{\boldsymbol{n}}}(\mathbf{k}, s) = \left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}^s_{\mathbf{k}}; \widehat{B}_n^{\widehat{A}^{\boldsymbol{s}}_{\mathbf{k}}}); [\omega_{\mathbf{k},s}]; [\widehat{C}_n]\right]$$

ayant pour période $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$ *ainsi qu'un motif de Tate mixte encadré* $\zeta^{fr.,\mathcal{M}}_{X_{\boldsymbol{n+m}}}(\mathbf{k}, s_1 | \mathbf{l}, s_2)$ *(*$\rightsquigarrow \omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$*).*

Proposition

Soit $\mathcal{M}$ *une variété (q.-p., lisse, dim.* $n \geqslant 2$*) et* $D = A \cup B$ *un d.c.n. à composantes irréductibles lisses avec* A *et* B *sans composantes irréductibles communes.*
On a alors les isomorphismes suivants

$$\mathrm{Gr}^W_{2n}(\mathrm{H}^n_{Hd}(\mathcal{M} \setminus A, B^A)) \simeq \mathrm{Gr}^W_{2n}(\mathrm{H}^n_{Hd}(\mathcal{M} \setminus A))$$
$$\mathrm{Gr}^W_{0}(\mathrm{H}^n_{Hd}(\mathcal{M} \setminus A, B^A)) \simeq \mathrm{Gr}^W_{0}(\mathrm{H}^n_{Hd}(\mathcal{M}, B)).$$

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$

Un léger souci

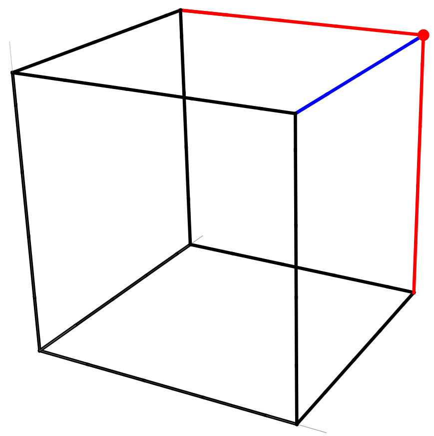
On ne peut pas obtenir le stuffle directement avec les espaces X_n car on ne sait pas relier $X_n \times X_m$ à X_{n+m}.

Lemme

Soit $r \geqslant 2$ un entier. On notera A_r une union particulière de composantes de $\partial\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus B_r$. Il existe alors une suite de drapeaux $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$, d'éléments de $\mathcal{D}_r^1$ vérifiant les conditions nécessaires

$$X_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_N,\ldots,\mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\alpha_r} \overline{\mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus A_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_r,\ldots,\mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\tilde{\delta}_r} \mathbb{A}^r.$$

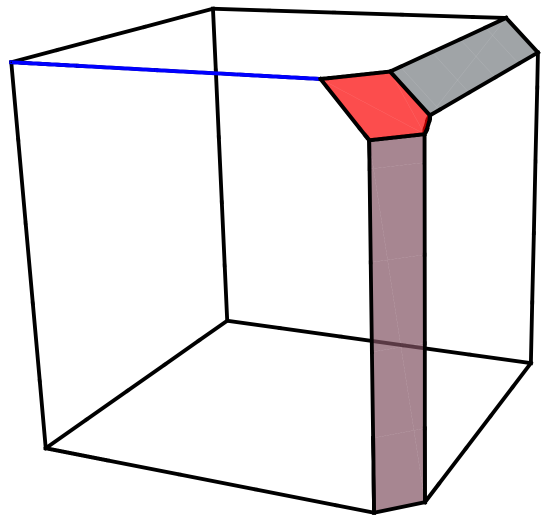
La situation cubique (simplexe après deux éclatements) de départ est :



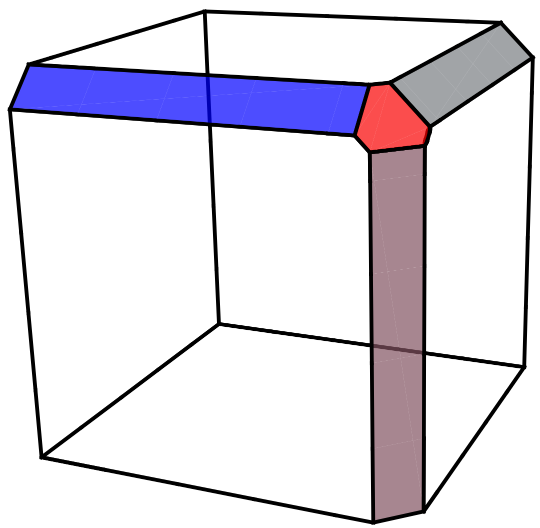
En éclatant :

- le point $(1,1,1)$
- les droites $(1,1,z)$ et $(x,1,1)$

on obtient $\overline{\mathcal{M}_{0,6}} \setminus A_3$.



Puis l'éclatement de la dernière ligne donne :



On éclate enfin le long des hyperboles (ce qui ne change pas le dessin).

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$: les MZV motiviques

Proposition

Avec $r = n + m$ la proposition précédente donne :

- *d'une part*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{X_{n+m}}(\mathbf{k}, \mathrm{id}) = \zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\mathbf{k})$$

- *et d'autre part*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{X_{n+m}}(\mathbf{k}, \mathrm{id}\,|\mathbf{l}, \mathrm{id}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, B^{A_{\mathbf{k},\mathbf{l}}}_{n+m}\right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

En particulier, pour tout $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, le motif encadré $\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\sigma)$ associé à $\zeta(\sigma)$ sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$ est égal à son avatar sur X_{n+m}, $\zeta^{fr.\mathcal{M}}_{X_{n+m}}(\sigma)$.

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Conclusion

Proposition

Soit $\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{l}$ *avec* $k_1, l_1 \geqslant 2$ *on a*

$$\zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{n}+\mathbf{3}}}(\mathbf{k})\zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{m}+\mathbf{3}}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}+\mathbf{3}}}(\sigma).$$

idée

$$\zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{n}+\mathbf{3}}}(\mathbf{k})\zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{m}+\mathbf{3}}}(\mathbf{l}) = \zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}+\mathbf{3}}}(\mathbf{k}|\mathbf{l}) = \zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}}(\mathbf{k},\mathrm{id}\,|\mathbf{l},\mathrm{id})$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} & \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \arrow[l] & X_{n+m} \arrow[l] \arrow[dll, dotted, bend left, "\text{décom-position}"] \\
X_{n+m} \arrow[r, "\text{permutation des } x_i"] & X_{n+m} \arrow[r] & \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}
\end{tikzcd}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathbf{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}}(\sigma, s_\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathbf{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}}(\sigma,\mathrm{id}) = \sum_{\sigma \in \mathbf{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta^{\mathit{fr}.\mathcal{M}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{0},\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}+\mathbf{3}}}(\sigma)$$

Pierre Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1969), no. 36, 75–109.

A. B. Goncharov and Yu. I. Manin, *Multiple ζ-motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$*, Compos. Math. **140** (2004), no. 1, 1–14.

A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, www.arxiv.org/abs/math.AG/0202154, May 2002.

Yi Hu, *A compactification of open varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 12, 4737–4753 (electronic).

Finn F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks $M_{g,n}$*, Math. Scand. **52** (1983), no. 2, 161–199.

Ismael Souderes, *Motivic double shuffle*, http ://arxiv.org/abs/0808.0248, 2008, accepted for publication in the International Journal of Number Theory.