Version motivique des relations de double mélange
Le cas des mots "convergents"

Ismaël Soudères

28 avril 2008

1. Introduction

2. Représentation intégrale du double mélange
   - Shuffle et représentation "simpliciale" des MZV
   - Mélange contractant et séries
   - Représentation intégrale du produit stuffle

3. Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
   - Le cas de shuffle
   - Le produit de mélange est motivique
   - Mélange contractant et espaces de module

4. Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
   - Une stratégie d'évitement
   - Stratification, éclatements et motifs de Tate mixtes
   - Le mélange contractant est motivique

Introduction

Pour tout p-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ d'entier avec $k_1 \geqslant 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

Ces nombre réels satisfont deux familles de relations quadratiques, appelées double mélange ou shuffle et stuffle.

- Le stuffle ou mélange contractant vient de la représentation en termes de séries ci dessus,
- le shuffle ou mélange vient de la représentation en termes d'intégrales des valeurs zêta multiples.

Le produit shuffle et les MZV

MZV et intégrales simpliciales

À un p-uplet $\mathbf{k}$, de poids $n = k_1 + \cdots + k_p$, on associe le n-uplet

$$\overline{k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - 1 \text{ fois}}, 1, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_p - 1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_1)$$

et la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\overline{k}} = (-1)^p \dfrac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}$.

En posant $\Delta_n = \{0 < t_1 < \ldots < t_n < 1\}$, on a $\zeta(\mathbf{k}) = \displaystyle\int_{\Delta_n} \omega_{\mathbf{k}}$.

Le produit shuffle

Le produit shuffle d'un n-uplet $\mathbf{e}$ et d'un m-uplet $\mathbf{f}$ de symboles est la somme formelle des $n + m$-uplets composé des $n + m$ symboles et préservant l'ordre de $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$.

Exemple

$XY ш AB = XYAB + XAYB + XABY + AXYB + AXBY + ABXY$

Représentation intégrale du produit shuffle

Proposition (Relations de shuffle)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ *et* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ *avec* $k_1,\ l_1 \geqslant 2$. *Alors*

$$\int_{\Delta_n} \omega_{\overline{k}} \int_{\Delta_m} \omega_{\overline{l}} = \sum_{\sigma \in \mathrm{sh}(\overline{k}, \overline{l})} \int_{\Delta_{n+m}} \omega_\sigma . \qquad (1)$$

Démonstration.

Soit $n = k_1 + \ldots + k_p$ et $m = l_1 + \ldots + l_q$, on a alors

$$\int_{\Delta_n} \omega_{\overline{k}} \int_{\Delta_m} \omega_{\overline{l}} = \int_{\Delta} \frac{dt_1}{1 - t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n} \frac{dt_{n+1}}{1 - t_{n+1}} \cdots \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}} .$$

L'ensemble
$\Delta = \{0 < t_1 < \ldots < t_n < 1\} \times \{0 < t_{n+1} < \ldots < t_{n+m} < 1\}$
peut être, à un ensemble de codimension 1 près, découpé en

$$\Delta = \coprod_{\sigma \in \mathrm{sh}([\![1,n]\!], [\![n+1,m]\!])} \underbrace{\{0 < t_{\sigma(1)} < t_{\sigma(2)} < \ldots < t_{\sigma(n+m)} < 1\}}_{\Delta_\sigma} .$$

Combinatoire du mélange contractant

Le produit stuffle d'un p-uplet $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, k_p)$ ($\mathbf{k}_0 = (k_1, \ldots, k_{p-1})$) et d'un q-uplet $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_0, l_q)$ ($\mathbf{l}_0 = (l_1, \ldots, l_{q-1})$) est défini de façon inductive par la formule

$$(\mathbf{k}) * (\mathbf{l}) = (\mathbf{k} * \mathbf{l}_0) \cdot l_q + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}) \cdot k_p + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}_0) \cdot (k_p + l_q) \qquad (2)$$

et $\mathbf{k} * () = () * \mathbf{k} = \mathbf{k}$.
On écrira $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ pour désigner un élément σ de la somme formelle $\mathbf{k} * \mathbf{l}$ (tous les coefficients étant égaux à 1).

Exemple

$$(n) * (m) = (n, m) + (m, n) + (n + m)$$

$$(u) * (v, w) = (u, v, w) + (v, u, w) + (v, w, u) + (u+v, w) + (v, u+w).$$

Stuffle et valeurs zêta multiple

Proposition (Relations de stuffle)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ *et* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ *deux uplets d'entiers avec* $k_1,\ l_1 \geqslant 2$*. On a alors l'égalité*

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \left(\sum_{n_1 > \ldots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}} \right) \left(\sum_{m_1 > \ldots > m_q > 0} \frac{1}{m_1^{l_1} \cdots m_q^{l_q}} \right)$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} \zeta(\sigma).$$

Stuffle et valeurs zêta multiples

Exemple

$$\begin{aligned}\zeta(k)\zeta(l) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k m^l}\\ &= \sum_{n>m>0}\frac{1}{n^k m^l} + \sum_{m>n>0}\frac{1}{m^l n^k} + \sum_{n=m}\frac{1}{n^{k+l}}\\ &= \zeta(k,l)+\zeta(l,k)+\zeta(k+l).\end{aligned}$$

Cas général.

On découpe le domaine de sommation du produit $\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$,

$$\{0<n_1<\ldots<n_p\}\times\{0<m_1<\ldots<m_q\}$$

en tous les domaines qui préservent les ordres respectifs des n_i et des m_j ; il faut alors ajouter les composantes correspondant au cas où certains n_i sont égaux à certains m_j. □

MZV comme intégrale sur un cube

Exemples de représentation cubique

On a vu que $\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$. Le changement de variables

$$t_n = x_1,\ t_{n-1} = x_1 x_2,\ \ldots,\ t_1 = x_1 \ldots x_n, \tag{3}$$

correspondant à une suite d'éclatement à l'origine, donne pour n=2

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1 - x_1 x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1 - x_1 x_2},$$

et pour $n = 4$

$$\zeta(4) = \int_{[0,1]^4} \frac{d^4 x}{1 - x_1 x_2 x_3 x_4} \quad \zeta(2,2) = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1 x_2 d^4 x}{(1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_2 x_3 x_4)}$$

$$\text{et } \zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{1 - x_1 x_2} \frac{1}{1 - x_3 x_4} d^4 x.$$

MZV comme intégrale sur un cube

Stuffle par les intégrales : un exemple

Pour toute variable α et β on a l'égalité

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} + \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\beta\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha\beta}. \quad (4)$$

En posant $\alpha = x_1x_2$ et $\beta = x_3x_4$ dans (4), on retrouve la relation de stuffle

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \left(\frac{x_1x_2}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)} + \frac{x_3x_4}{(1-x_3x_4)(1-x_3x_4x_1x_2)} + \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4} \right) d^4x \quad (5)$$

c'est à dire,

$$\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(2,2) + \zeta(2,2) + \zeta(4).$$

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$. On définit la fonction $f_{k_1,\ldots,k_p}$ de n variables sur $[0,1]^n$ comme

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{1 - x_1 \cdots x_{k_1}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1} x_{k_1+1} \cdots x_{k_1+k_2}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1+k_2}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+k_2+k_3}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+\ldots+k_{p-1}}}{1 - x_1 \cdots x_{k_1+\cdots+k_p}}. \quad (6)$$

Proposition

Pour tout p-uplet d'entiers $(k_1, \ldots, k_p)$ avec $k_1 \geqslant 2$, on a $(n = k_1 + \cdots + k_p)$

$$\zeta(k_1,\ldots,k_p) = \int_{[0,1]^n} f_{k_1,\ldots,k_p}(x_1,\ldots,x_n) d^n x. \quad (7)$$

Préliminaires

Afin d'obtenir une représentation intégrale du produit stuffle, nous allons utiliser les fonctions $f_{k_1,\ldots,k_p}$, et les notation suivantes
Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ un p-uplet d'entiers et $n = k_1 + \cdots + k_p$. On se donne n variables $x_1, \ldots, x_n$.

Notation

- Pour tout uplet $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r)$, on écrira $\prod \mathbf{a} = a_1 \cdots a_r$.
- On écrira $\mathbf{x}$ pour $(x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{x}_0$ pour $(x_1, \ldots, x_{n-k_p})$.
- Si $\mathbf{l}$ est un q-uplet avec $l_1 + \cdots + l_q = m$, on introduira m variable $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ et si $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ alors : y_σ désignera la suite en les variables x_i et x'_j, où certaines sous suites sont à leurs places respectives par rapport à la position des k_i et des l_j

Remarque

Soit $(k_1, \ldots, k_p) = (\mathbf{k_0}, k_p)$ comme précédemment,

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1,\ldots,k_{p-1}}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}}. \tag{8}$$

Représentation intégrale du Stuffle

Proposition

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ *et* $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ *deux uplets avec* $n = k_1 + \cdots + k_p$ *et* $m = l_1 + \cdots + l_q$*. On a alors*

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1,\ldots,l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k},\mathbf{l})} f_\sigma(y_\sigma). \tag{9}$$

On utilise une récurrence sur la longueur des suites. L'objectif va être de retrouver la formule de récurrence (2) du produit stuffle pour les fonctions $f_{k_1,\ldots,k_p}$.

Si $p = q = 1$**,** ce n'est rien d'autre que la formule (4) :

$$f_n(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}') = \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}} \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'} \overset{(4)}{=} \frac{\prod \mathbf{x}}{(1 - \prod \mathbf{x})(1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} + \frac{\prod \mathbf{x}'}{(1 - \prod \mathbf{x}')(1 - \prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x})} + \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'}. \tag{10}$$

Preuve

Pas de la récurrence Soit $(k_1,\ldots,k_p)=(\mathbf{k_0},k_p)$ et $(l_1,\ldots,l_q)=(\mathbf{l_0},l_q)$ deux uplets. La remarque (8) donne

$$f_{\mathbf{k_0},k_p}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}(\mathbf{k},p))f_{\mathbf{l_0},l_q}(\mathbf{x_0}',\mathbf{x}'(\mathbf{l},q))=f_{\mathbf{k_0}}(\mathbf{x}_0)\frac{\prod\mathbf{x}_0}{1-\prod\mathbf{x}}f_{\mathbf{l_0}}(\mathbf{x_0}')\frac{\prod\mathbf{x}'_0}{1-\prod\mathbf{x}'}.$$

En appliquant la formule (4) à $\alpha=\prod\mathbf{x}$ et $\beta=\prod\mathbf{x}'$, on trouve que le membre de droite de l'équation précédente est égal à

$$f_{\mathbf{k_0}}(\mathbf{x}_0)f_{\mathbf{l_0}}(\mathbf{x_0}')\cdot\left(\prod\mathbf{x}_0\cdot\prod\mathbf{x}'_0\right)\left(\frac{\prod\mathbf{x}}{(1-\prod\mathbf{x})(1-\prod\mathbf{x}\prod\mathbf{x}')}\right.$$

$$\left.+\frac{\prod\mathbf{x}'}{(1-\prod\mathbf{x}')(1-\prod\mathbf{x}'\prod\mathbf{x})}+\frac{1}{(1-\prod\mathbf{x}\prod\mathbf{x}')}\right).$$

Suite et fin

En développant et en utilisant la remarque (8) on obtient,

$$f_{\mathbf{k_0},k_p}(\mathbf{x})f_{\mathbf{l_0},l_q}(\mathbf{x}') = \left(f_{\mathbf{k_0},k_p}(\mathbf{x})f_{\mathbf{l_0}}(\mathbf{x_0}')\right) \cdot \frac{\prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'_0}{1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'} +$$

$$\left(f_{\mathbf{k_0}}(\mathbf{x}_0)f_{\mathbf{l_0},l_q}(\mathbf{x}')\right) \cdot \frac{\prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x}} +$$

$$\left(f_{\mathbf{k_0}}(\mathbf{x}_0)f_{\mathbf{l_0}}(\mathbf{x_0}')\right) \cdot \frac{\prod \mathbf{x}_0 \prod \mathbf{x}'_0}{1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'}.$$

On voit donc que le produit des fonctions $f_{k_1,\dots,k_p}$ et $f_{l_1,\dots,l_q}$ satisfait la relation de récurrence (2) qui définit le produit stuffle.

Produit Shuffle et espaces de module de courbes en genre 0

- Soit $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$ comme précédemment avec $n = k_1 + \cdots + k_p$ et $m = l_1 + \cdots + l_q$.
- On identifiera un point de $\mathcal{M}_{0,j+3}$ avec le uplet $(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty)$, les $z_i \in \mathbb{P}^1$ étant tous distincts et différents de $0, 1$ et ∞.
- On notera t_i la coordonée (simpliciale) telle que $t_i(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty) = z_i$
- On notera Φ_j la cellule ouverte de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ qui est envoyée sur Δ_j par l'application $\mathcal{M}_{0,j+3} \to (\mathbb{P}^1)^j$

$$(0, z_1, \ldots, z_j, 1, \infty) \mapsto (z_1, \ldots, z_j).$$

- En suivant Goncharov et Manin, si $\omega_{\mathbf{k}}$ est la forme différentielle vue précédemment (mais définit sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$) associée à $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ alors

$$\zeta(k_1, \ldots, k_p) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}.$$

Produit Shuffle et espaces de module de courbes en genre 0

Proposition

Soit $\beta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \to \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ *l'application définie par*

$$(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_1, \ldots, z_n, 1, \infty) \times (0, z_{n+1}, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty).$$

En notant t_i *la coordonnée telle que* $t_i(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) = z_i$*, on a*

$$\beta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}) = \frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n} \wedge \frac{dt_{n+1}}{1-t_{n+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$

De plus, pour $\sigma \in \mathrm{sh}([\![1,n]\!],[\![n+1,n+m]\!])$ *on note* Φ^σ_{n+m} *ou* Φ_σ *la cellule ouverte de* $\mathcal{M}_{0,n+m+3}(\mathbb{R})$ *dont les points sont dans l'ordre donné par celui de leur indice dans* σ*. On remarque alors que*

$$\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m) = \coprod_{\sigma \in \mathrm{sh}([\![1,n]\!],[\![n+1,n+m]\!])} \Phi^\sigma_{n+m}.$$

Proposition

Le produit de mélange shuffle peut être interprété comme le changement de variable :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \beta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}).$$

Démonstration.

D'après la proposition précédente, le membre de droite de l'égalité est égal à

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{sh}((1,\ldots,n),(n+1,\ldots,n+m))} \int_{\Phi^{\sigma}_{n+m}} \frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$

- On permute alors les variables et on les renumérote de façon à avoir une intégrale sur Φ_{n+m} pour chaque terme.
- Comme la forme différentielle $\frac{dt_{\sigma(1)}}{1-t_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_{\sigma(n+m)}}{t_{\sigma(n+m)}}$ n'a pas de pôle sur Φ^{σ}_{n+m} toutes les intégrales sont convergentes.

□

Le produit de mélange est motivique

Définition

Soit $\mathbf{k}$ un p-uplet avec $k_1 \geqslant 2$ et soit $A_{\mathbf{k}}$ le diviseur des singularités de $\omega_{\mathbf{k}}$. On note B_n la clôture de Zariski du bord de Φ_n. La valeur zêta multiple motivique est définie dans [GM04] par

$$\left[\mathrm{H}^n(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n]\right].$$

Proposition

Soit $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$ deux uplets d'entiers ($k_1, l_1 \geqslant 2$). On a une égalité de motifs encadrés

$$\left[\mathrm{H}^n\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}\right); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n]\right] \cdot \left[\mathrm{H}^m\left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_m^{A_{\mathbf{l}}}\right); [\omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_m]\right] =$$

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{sh}(\llbracket 1,n \rrbracket, \llbracket n+1, n+m \rrbracket)} \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_\sigma; B_{n+m}^{A_\sigma}\right); [\omega_\sigma]; [\Phi_{n+m}]\right].$$

Grandes lignes d'une preuve

- L'application β s'étend à la compactification :

$$\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}}.$$

- Le pull-back β^* donne une application

$$\mathrm{H}^n\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}\right) \otimes \mathrm{H}^m\left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_m^{A_{\mathbf{l}}}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_0^{A_0}\right).$$

- On utilise le fait que $\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)$ est "égal à" $\cup\Phi^{\sigma}_{n+m}$.
- Enfin l'action du groupe de permutation sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$ nous autorise à permuter les variables.

Mélange contractant et espaces de module

Les coordonnées cubiques sur $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$ sont définies par $u_1 = t_r$ et $u_i = t_{r-i+1}/t_{r-i+2}$ pour $i < r$. Ce système de coordonnées est bien adapté pour exprimer le produit stuffle dans les espaces de module de courbes.

Proposition

Soit $\delta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ *l'application définie par*

$$(0, z_1, \ldots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}, 1, \infty) \times (0, z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \infty).$$

Avec $\omega_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}(u_1, \ldots, u_n) d^n u$ *et* $\omega_{\mathbf{l}} = f_{\mathbf{l}}(u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}) d^m u$ *on a alors*

$$\delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}) = f_{k_1,\ldots,k_p}(u_1, \ldots, u_n) f_{l_1,\ldots,l_q}(u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}) d^{n+m} u$$

et

$$\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m) = \Phi_{n+m}.$$

Proposition

Le produit de mélange shuffle peut être interprété comme le changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}).$$

Remarque

- Il faut cependant remarquer que la décomposition de Cartier ne reste pas (d'un point de vue algébrique) dans les espaces de module de courbes.
- En effet des formes différentielles qui ne sont pas holomorphes à l'intérieur de l'espace de module apparaissent.
- Par exemple dans la décomposition du produit $f_{2,1}(u_1, u_2, u_3) f_{2,1}(u_4, u_5, u_6)$ on trouve le terme

$$\frac{u_1 u_2 u_4 u_5 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6}{(1 - u_1 u_2 u_4 u_5)(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)}$$

qui n'est pas holomorphe sur $\mathcal{M}_{0,6}$.

Stratégie

- Au vue de l'exemple précédent et de ce que l'on fait avec uniquement des intégrales, *il s'agit de pouvoir permuter les u_i*.
- Ce n'est pas possible de le faire sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ car les coordonnées cubiques sont extrêmement "locales" sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$.
- En effet, ces coordonnées proviennent d'une première suite d'éclatement de $(\mathbb{P}^1)^n$ et n'ont pas de signification globale sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ même si elle sont bien adaptées à l'étude de la cellule standard.

Pour $n = 2$, on a :

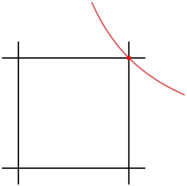


Fig.: vers $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$

$\xrightarrow{\mathrm{Bl}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})}\,\mathbb{A}^2}$

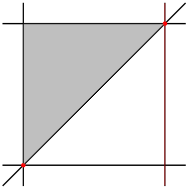
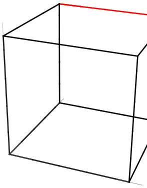


Fig.: $\mathbb{A}^2$

Stratégie : le cas de $n = 3$

Description de la situation pour $\overline{\mathcal{M}_{0,6}}$



$$\xrightarrow[\textbf{puis de } (0,0,z)]{\textbf{éclatement de } (0,0,0)}$$

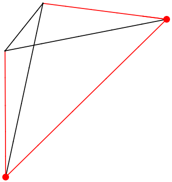


Fig.: vers $\overline{\mathcal{M}_{0,6}}$

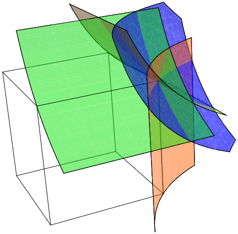
Fig.: $\mathbb{A}^3$

Le fait que la symétrie soit brisée apparaît nettement sur ces dessins.

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.



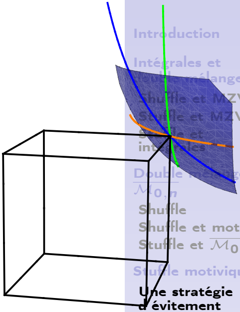
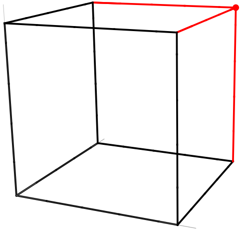


Fig.: $\mathbb{A}^3$



On doit donc éclater

- un point,
- 3 lignes,
- 3 courbes hyperboles

Éclatement et diviseurs à croisement normaux

Théorème (Hu [Hu03])

Soit X_0 un ouvert d'une variété algébrique non singulière X. On suppose que $X \setminus X_0 = \cup_{i \in I} D_i$ avec

1. *pour tout $i \in I$, D_i est une sous variété fermée, lisse irréductible ;*
2. *pour tout $i, j \in I$, D_i et D_j se rencontrent proprement, (intersection schématique lisse et $T_X(D_i) \cap T_X(D_j) = T_X(D_i \cap D_j)$) ;*
3. *pour tout $i, j \in I$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ ou $\cup D_l$.*

En posant $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$, il existe alors une suite d'éclatements

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant k-1}} X \to \cdots \to \mathrm{Bl}_{\mathcal{D}_{\leqslant 0}} X \to X$$

telle que

1. *$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ est lisse ; $(\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X) \setminus X_0 = \bigcup_{i \in I} \widetilde{D_i}$ est un diviseur à croisements normaux ;*
2. *Pour tout entier k, $\widetilde{D_{i_1}} \cup \cdots \cup \widetilde{D_{i_k}}$ est non vide si et seulement si $D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$ sont comparables.*

Résultats généraux : suite d'éclatements

Corollaire (suite d'éclatements par des drapeaux)

Soit X et $\mathcal{D}$ comme dans le théorème précédent. Soit $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ des drapeaux de sous-variétés de $\mathcal{D}$ tels que

1. *$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ est une partition $\mathcal{D}$,*
2. *Si D est un élément de $\mathcal{F}_i$, alors pour tout $D' < D$ il existe $j \leqslant i$ tel que $D' \in \mathcal{F}_j$.*

on a alors

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_k^{k-1}} (\cdots (\mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_1} X) \cdots)$$

$\mathcal{F}_j^i$ étant le drapeau des transformées strictes de $\mathcal{F}_j$ à l'étape i. On notera une telle suite d'éclatements $\mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_k, \ldots, \mathcal{F}_1} X$

Quelques idées des preuves.

1. La preuve du théorème se fait en un sens par induction.
2. Le diviseur exceptionnel de l'éclatement de X le long de Y est $\mathbb{P}(N_X Y)$ et repère donc la direction d'arrivée sur Y.
3. Le corollaire est dû au fait que les éclatements sont des constructions locales.

Résultats généraux : éclatements et motifs de Tate mixtes

Proposition

Soit X et $\mathcal{D} = \cup D_i$ comme précédemment, et vérifiant en plus que X ainsi que tous les D_i sont des variétés de Tate. Soit $\mathcal{E}^{r+1}$ l'ensemble des diviseurs exceptionnels de $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}^{\leqslant r}} X \to X$.
Alors toutes les intersections possibles des strates de $\mathcal{D}^{r+1} \cup \mathcal{E}^{r+1}$ sont des variétés de Tate ainsi que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}^{\leqslant r}} X$. En particulier $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ ainsi que tous les $\tilde{D}_i$ sont des variétés de Tate.

Quelques ingrédients.

1. Le contrôle des différentes strates à chaque étape se fait en suivant "pas à pas" la démonstration du théorème de Hu.
2. Le résultat est assuré par la "Formule de l'éclatement" :

$$\mathfrak{H}(\mathrm{Bl}_Z X) = \mathfrak{H}(X) \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathfrak{H}(Z)(-i)[-2i].$$

□

Construction des espaces X_n

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On définit les diviseurs suivant dans $\mathbb{A}^n$:

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$ pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup\limits_I A_I = \bigcup\limits_i \{x_i = 1\} \bigcup (\bigcup\limits_{I, |I| \geqslant 2} A_I)$
- $D_n^0 = \cup \{x_i = 0\}$ et $B_n = D_n^0 \bigcup (\bigcup_i \{x_i = 1\})$
- Enfin $D_n = D_n^0 \bigcup D_n^1$.

Remarque

Le diviseur B_n est la clôture de Zariski du bord du cube réel.

Construction des espaces X_n

Lemme

Soit $\mathcal{D}_n^1$ l'ensemble (ordonné par l'inclusion) de toutes les intersections possibles entre les diviseurs A_I. Alors $\mathcal{D}_n^1$ satisfait les hypothèse du théorèmes de Hu.

Définition

La variété $X_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}^n$ est définie comme le résultat de l'application du théorème de Hu à la situation $X = \mathbb{A}^n$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n^1$.

Lemme

- *La préimage $\widehat{D}_n^1$ de $\mathcal{D}_n^1$ est un diviseur à croisements normaux.*
- *Soit $\widehat{D}_n^0$ la préimage strictes de D_n^0 dans X_n. Le diviseur $\widehat{D}_n = \widehat{D}_n^1 \bigcup \widehat{D}_n^0$ est alors un diviseur à croisement normaux.*

Formes différentielles

Définition

Un (r-)drapeau distingué $(\mathcal{F}, i_1, \dots i_p)$ est un drapeau $\mathcal{F} = I_1 \subset \cdots \subset I_r$ de $[\![1, n]\!]$ avec la donnée d'éléments $i_1 < \ldots < i_p$ de $[\![1, r]\!]$.

Définition

Soit $(\mathcal{F}, i_1, \dots i_p)$ un r-drapeau distingué de $[\![1, n]\!]$. Soit $\Omega^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$ la forme différentielle de $\Omega^{\bullet}_{log}(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$ définit par

$$\Omega^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots i_p} = \bigwedge_{j=1}^{r} \mathrm{d}\log(g_j) \quad \text{où} \qquad g_j = \begin{cases} 1 - \prod_{i \in I_j} x_i \text{ si } j \in \{i_1, \dots, i_p\} \\ \prod_{i \in I_j} x_i \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ un uplet d'entier positif avec $k_1 \geqslant 2$ tel que $k_1 + \cdots + k_p = n$ et s une permutation de $[\![1, n]\!]$. On définit la forme différentielle $\Omega_{\mathbf{k},s} \in \Omega^{n}_{log}(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$ par

$$\Omega_{\mathbf{k},s} = f_{k_1,\dots,k_n}(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)})\, \mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_n$$

qui s'exprime aussi comme un cas particulier de $\Omega^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$.

Diviseurs des singularités

Définition

Soit $\widehat{B}_n$ la clôture de la préimage deB_n et $\widehat{A}_n$ le diviseur $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$.

Définition

On écrira $\omega^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$ et $\omega_{\mathbf{k},s}$ pour le pull-back sur $X_n \setminus \widehat{D}_n$ des formes $\Omega_{I_1,\dots,I_p}$ et $\Omega_{\mathbf{k},s}$.

Proposition

Si $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ est un drapeau maximal distingué $[\![1, n]\!]$ avec $i_1 \geqslant 2$ et $i_p = n$ alors :

- *Le diviseur des singularités $A^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$ de $\Omega^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$ est $A_{I_{i_1}} \cup \dots \cup A_{I_{i_p}}$.*
- *Le diviseur des singularités $\widehat{A}^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$ de $\omega^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$ est inclu dans $\widehat{A}_n$. En particulier, celui de $\omega_{\mathbf{k},s}$ est inclu dans $\widehat{A}_n$.*

On a un énoncé similaire pour $\omega^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p} \wedge \omega^{\mathcal{F}'}_{i'_1,\dots,i'_q}$.

Préimage du cube et diviseurs

Préimage du cube

Soit $\widehat{C}_n$ la préimage de $C_n = [0,1]^n$ dans X_n et $\overline{\widehat{C}_n}$ son adhérence.
Le diviseur $\widehat{B}_n$ est alors l'adhérence de Zariski du bord de $\overline{\widehat{C}_n}$ et $\widehat{C}_n$ donne une classe non nulle

$$[\widehat{C}_n] \in \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}^n(X_n, \widehat{B}_n). \tag{11}$$

Proposition

Le diviseur $\widehat{A}_n$ n'intersecte pas le bord de $\widehat{C}_n$ dans $X_n(R)$.

Quelques idées sur les preuves

- Le contrôle des diviseurs $\widehat{A}^{\mathcal{F}}_{i_1,\dots,i_p}$ s'obtient en appliquant une adaptation d'un lemme de Goncharov : "En éclatant le nombre de singularités ne font que diminuer".
- Pour montrer que l'on n'intersecte pas le bord du cube, on écrit les équations dans un système de coordonnées.

X_n et la stratification $\widehat{D}_n$ sont de Tate

Lemme

Le diviseur $\widehat{D}_n = \widehat{B}_n^0 \cup \widehat{D}_n^1$ munit X_n d'une stratification de Tate.

Démonstration.

- Tout d'abord on montre que toute les strates de $\widehat{D}_n^1$ et X_n sont de Tate.
- On se ramène à le vérifier dans $\mathbb{A}^n$ où les strates sont isomorphes a $\mathbb{A}^r \times {\mathbb{G}_m}^s$ car se sont des intersections d'hyperplans et d'hyperboles.
- Il faut ensuite faire un peu attention afin de récupérer l'intersection de strates de $\widehat{B}_n^0$ et de $\widehat{D}_n^1$.

$\square$

MZV motiviques alternatives

Théorème

Soit $\mathbf{k}$ *un uplet d'entier avec* $k_1 \geqslant 2$ *et* $k_1 + \ldots + k_p = n$ *et soit* s *une permutation de* $[\![1, n]\!]$*. Soit* $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s$ *le diviseur des singularités de la forme* $\omega_{\mathbf{k}}^s$*. Alors il existe un motif de Tate mixte encadré*

$$\zeta^{fr.,\mathcal{M}}(\mathbf{k}, s) = \left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{k}}^s; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s}); [\omega_{\mathbf{k}}^s], [\widehat{C}_n]\right]$$

ayant pour période $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$*.*

De plus si $(\mathcal{F}, i_j)$ *et* $(\mathcal{F}', i'_{j'})$ *sont deux drapeaux et si* $\widehat{A}_{i_j|i'_{j'}}^{\mathcal{F}|\mathcal{F}'}$ *est le diviseur des singularités* $\omega_{i_j}^{\mathcal{F}} \wedge \omega_{i'_{j'}}^{\mathcal{F}'}$ *alors il existe un motif de Tate mixte encadré*

$$\zeta^{fr.,\mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_j|\mathcal{F}', i'_{j'}) = \mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{i_j|i'_{j'}}^{\mathcal{F}|\mathcal{F}'}; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{i_j|i'_{j'}}^{\mathcal{F}|\mathcal{F}'}}).$$

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$

Un léger souci

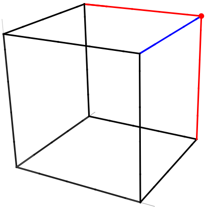
On pourrait vouloir obtenir le stuffle directement avec les espaces X_n. Cela impliquerait de savoir relier $X_n \times X_m$ à X_{n+m}.

Lemme

Soit $r \geqslant 2$ un entier. On notera A_r une union particulière de composante de $\partial\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus B_r$. Il existe alors une suite de drapeaux $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$, d'éléments de $\mathcal{D}_r^1$ vérifiant les conditions nécessaires

$$X_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_N,\ldots,\mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\alpha_r} \overline{\mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus A_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_r,\ldots,\mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\tilde{\delta}_r} \mathbb{A}^r \quad (12)$$

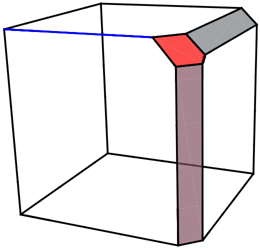
La situation cubique (simplexe après deux éclatements) de départ est :



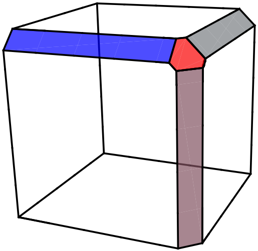
En éclatant :

- le point $(1, 1, 1)$
- les droites $(1, 1, z)$ et $(x, 1, 1)$

on obtient $\overline{\mathcal{M}_{0,6}} \setminus A_3$.



Puis l'éclatement de la dernière ligne donne :



On éclate enfin le long des hyperboles (ce qui ne change pas le dessin).

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$: les MZV motiviques

Corollaire

Avec $r = n+m$ la proposition précédente donne :

- *soit* $\mathbf{a}$ *unb-uplet d'entiers avec* $\sum a_i = n+m$. *On a une égalité de motifs encadrés*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathrm{id}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n}}n+m \setminus A_0; B^{A_0}_{n+m}\right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

- *Soit* $\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{l}$ *comme précédemment. Il existe alors deux drapeaux distingués* $(\mathcal{F}, i_1, \ldots, i_p)$ *et* $(\mathcal{F}', j_1, \ldots, j_q)$ *tels que*

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_j | \mathcal{F}', i'_{j'}) = \left[\mathrm{H}^{n+m}\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n}}n+m \setminus A_0, B^{A_0}_{n+m}\right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}]\right].$$

En particulier, pour tout $\sigma \in \mathrm{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, *le motif encadré associé à* $\zeta(\sigma)$ *sur* $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$ *est égal à son avatar sur* X_{n+m}, $\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma)$.

Conclusion

Pour conclure on utilise le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X_{n+m} \arrow[r, dotted, "\text{decom-position}"] \arrow[d] & X_{n+m} \arrow[r, "\text{permutation des } x_i"] & X_{n+m} \arrow[d] \\
\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \arrow[d] & & \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \\
\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} & &
\end{tikzcd}$$

A. B. Goncharov and Yu. I. Manin, *Multiple ζ-motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$*, Compos. Math. **140** (2004), no. 1, 1–14.

Yi Hu, *A compactification of open varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 12, 4737–4753 (electronic).