

Géométrie des espaces de modules de courbes en genre 0

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Géométrie des espaces de modules en genre 0

Intérieur et bord

Fonctions et différentielles

Points réels de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

L'exemple le plus simple : $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Espace des différentielles de $\mathcal{M}_{0,n}$

Différentielles et cohomologie

L'anneau de cohomologie de l'espace de configuration du plan

Cas de l'espace de configuration de \mathbb{P}^1 moins trois points

Pôles des formes différentielles logarithmiques sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$

Bord et diviseur : un critère de convergence

Application dans un cas particulier.

Multi-zeta sur $\mathcal{M}_{0,n}$: études

Théorème

Le cas connu : $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Nouveaux exemples où la conjecture est vraie

Le premier exemple non-trivial

Autres exemples

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_0^n

$\mathbb{P}^1 \setminus$

trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Motivations.

Définition

L'espace de module de courbe de genre 0 à n points marqués est défini par :

$$\mathcal{M}_{0,n} = \{(z_0, \dots, z_{n+2}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ tel que } z_i \neq z_j\} / \text{PSL}_2(\mathbb{C})$$

Exemple ($n = 5$)

Comme $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ est trois transitif, on peut posé $z_0 = 0$, $z_1 = t_1$, $z_2 = t_2$, $z_3 = 1$ et $z_4 = \infty$. On a donc $\mathcal{M}_{0,5} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1\})^2 \setminus \{t_1 = t_2\}$. On retrouve :

Dessin

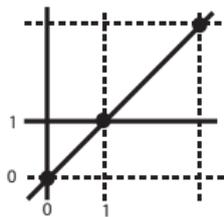


Fig.:

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Motivations

La représentation intégrale de $\zeta(2)$ est donnée par la formule suivante :

$$\zeta(2) = \int_0^1 \frac{1}{t_2} \left(\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) dt_2 = \int \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{dt_2}{t_2} \wedge \frac{dt_1}{1-t_1}$$

Considérons (t_1, t_2) comme les coordonnées affines sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Alors les singularités de la forme différentielle sont les droites :
 $t_1 = 1$, $t_1 = \infty$, $t_2 = 0$, $t_2 = \infty$

Dessin

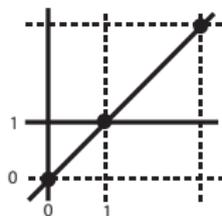


Fig.:

Seuls les points $(0; 0)$ et $(1; 1)$ posent problème

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées
Points réels
 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description
Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$
Pôles

Cohomologie

Différentielles
 \mathbb{C}_0^n
 $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs
Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème
 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple
Autres exemples

Motivations

- ① Nous avons déjà vu que :
 - le changement de variable $u_1 = t_2$, $u_1 u_2 = t_1$, supprime le problème en $(0, 0)$.
 - un nouveau changement de variable (passage en coordonnées polaire) résout le nouveau problème en $(1, 1)$
- ② Ces deux changements de variables correspondent à éclater les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$ respectivement.
- ③ Il reste encore un point : $(\infty; \infty)$ où le diviseur n'est pas à croisements normaux. Si on éclate ce point, on obtiens une variété projective à croisement normaux : $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$.

Définition

L'espace de modules de courbes de genre 0 avec n points marqués $\mathcal{M}_{g,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes.

Nous nous concentrerons sur le cas du genre 0

Exemple

- $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$
- $\mathcal{M}_{0,5} = (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^2 \setminus \{x_1 = x_2\}$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

②

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Description combinatoire des strates du bord

• Proposition

P. Deligne et D. Mumford ([DM69]) $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est irréductible. Le bord de $\overline{\mathcal{M}}_g$, n est un diviseur à croisements normaux.

• Stratification

$(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})_n$ admet une structure stratifiée

- Les composantes irréductibles du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ sont isomorphes à des produits de $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$ pour $k \leq n$.
- Les composantes de codimension 1 sont isomorphes à $\overline{\mathcal{M}}_{0,k} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n-k-1}$
- Réciproquement une composante de codimension k est l'intersubsection de k composantes irréductibles de codimension 1.

[BFLS99][I.2. pages 25 à 44].

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

ζ(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

- Un point dans une composante irréductible de dimension maximale de $\overline{\partial\mathcal{M}_{0,n}}$ est représenté par une surface de Riemann avec un point double de genre 0 et avec n points marqués :
- on a en fait deux sphères collées par ce point double, les points marqués se répartissant sur ces deux sphères.
- C'est la description de l'espace des modules à l'aide d'une découpe en pantalon qui permet de décrire ainsi les points du bord. Dans cette description les points marqués sont considérés comme enlevés.
- Une découpe en pantalon est donnée par $n - 3$ courbes simples
- En faisant tendre la longueur d'une de ces courbes vers 0, on obtient un point double reliant deux sphères.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Strates de codimension 1

- Lorsque l'on se déplace dans la strate, seuls les points marqués changent, la courbe "pincée" de la découpe reste la même.
- Une strate de codimension 1 est donc déterminée par un lacet entourant au moins deux points
- On obtient ainsi une 2-partition de l'ensemble des points marqués.
- On note $\{z_1, \dots, z_n\}$ l'ensemble des points marqués.
- On représentera une composante irréductible du bord par une 2-partition stable (i.e. chaque partie contient au moins deux éléments) $\sigma_1 | \sigma_2$ avec $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{z_1, \dots, z_n\}$ et $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$.
- Par exemple, dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ la 2-partition $z_1 z_3 | z_2 z_4$ correspond au lacet entourant z_1 et z_3 qui détermine une des strates du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Exemple

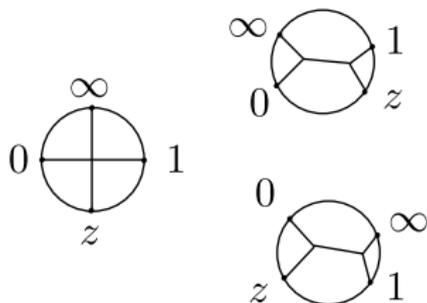


Fig.:

Une *composante de codimension k* , définie par l'annulation de k longueurs de k courbes distinctes, est *déterminée par k lacets entourant chacun au moins deux points marqués*.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Strates de codimension 1 $n = 5$ et $n = 6$ $n = 5$

- Une strate de codimension 1 est donnée par un lacet entourant 2 points
- on a donc $C_5^2 = 10$ possibilité.
-

strates	$1\infty 0z_1z_2$	$0\infty z_1z_21$	$01 z_1z_2\infty$	$0z_1 z_21\infty$	$0z_2 z_11\infty$
strates	$1z_1 z_20\infty$	$1z_2 \infty0z_1$	$\infty z_1 z_210$	$\infty z_2 z_110$	$z_1z_2 01\infty$

- $\mathcal{M}_{0,5} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \text{sept droites}$
- $\overline{\mathcal{M}_{0,5}} = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \{\text{sept droites}\}) \cup \{\text{dix droites}\}$
- Codimension 2

 $n = 6$

Un lacet peut entourer :

- 2 point (ou 4 par symétrie) donc $C_6^2 = 15$ possibilités.
- 3 points (ou 3 par symétrie) donc $C_6^3/2 = 10$ possibilités.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 C_0^n $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Arbre de droites projectives.

- Les points d'une strate de codimension k représentent tous $k + 1$ copies de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ "collées" par des points doubles.
- Les points marqués se répartissent sur les $k \mathbb{P}^1$ de telle sorte qu'il y ait au moins trois points spéciaux (marqué ou double) sur chaque \mathbb{P}^1 .
- Cette répartition ne change pas lorsque l'on se déplace dans une strate.
- Une strate est donc entièrement déterminée par la donnée d'un arbre de droite projective (les intersubsections représentent les points doubles) et d'une répartition des n points marqués sur les branches.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Quelques exemples :

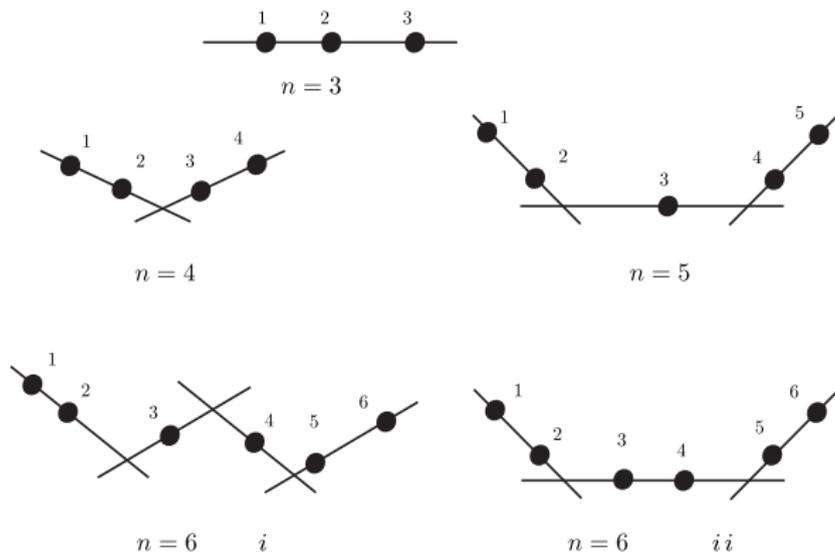


Fig.: À part le cas $n = 6$ ii , nous n'avons ici représenté que des exemples de strates maximalement dégénérées (codimension $n - 3$). La strate du cas $n = 6$ ii est de codimension 2.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

$\mathbb{C}P^n$

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

- C'est la représentation duale de la précédente :
- Les points spéciaux (points marqués ou points doubles) sont représentés par des arêtes.
- Deux arêtes se rencontrent si et seulement si les deux points spéciaux qu'elles représentent appartiennent à une même sphère (à un même \mathbb{P}^1).
- Les points marqués sont donc représentés par des arêtes terminales.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

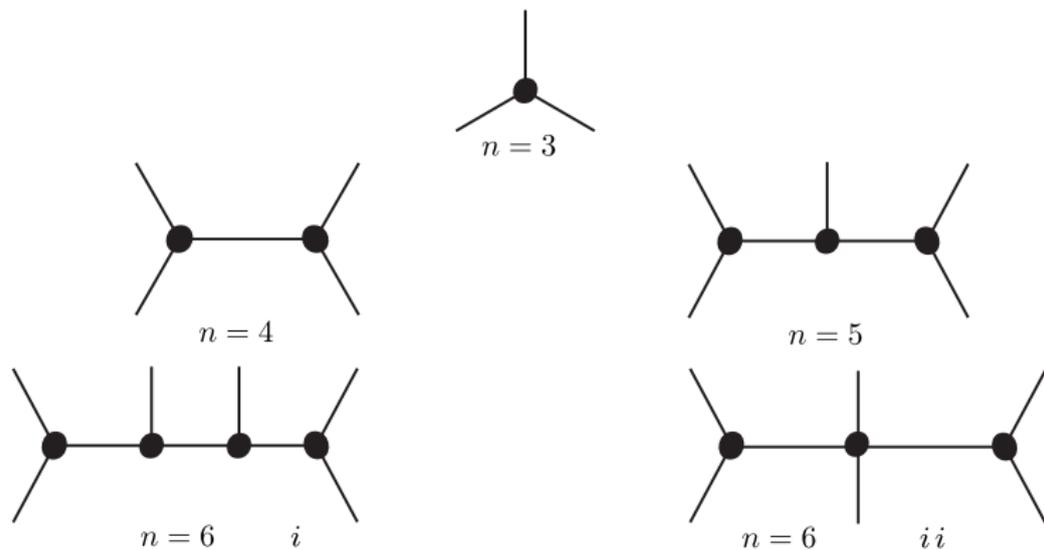


Fig.:

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_D^n
 $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

- Un point dans l'intérieur de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ est un \mathbb{P}^1 avec $n + 3$ points marqués modulo isomorphisme.
- En numérotant les points marqués et en choisissant trois points, on fixe un système de représentants ayant trois points marqués fixés une fois pour toutes comme étant $0, 1, \infty$.
- On note un représentant par un $n + 3$ -uplet en faisant figurer quels sont les points marqués fixes : par exemple $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$.
- On a des fonctions coordonnées t_i tel que si un point X de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ est représenté par $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$ alors $t_i(X) = z_i \in \mathbb{P}^1$.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

On considère l'application d'oubli : $\mathcal{M}_{0,n+3} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ qui oublie tous les points sauf 0, 1, ∞ et s . L'espace d'arrivée est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ (isomorphisme donné par le système de représentants associé à celui sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$). Sur \mathbb{P}^1 on dispose déjà d'une coordonnée affine, on la tire dans un premier temps sur $\overline{\mathcal{M}_{0,4}}$ (elle prend les valeurs 0, 1, ∞ aux strates de bord respectives $s0|1\infty$, $s1|0\infty$ et $s\infty|01$). On la remonte ensuite sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$, ce dernier pull-back définit t_s . En général, dans ce mémoire, on choisira implicitement (sauf mention du contraire) le système de représentants donné par les $n+3$ -uplets de la forme $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$. On fera la plupart du temps l'abus de notation suivant $z_i = t_i$ car c'est en effet la valeur que prend la fonction. De même on notera des différentielles $\frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} \dots$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

⊂(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Proposition

On trouve la proposition suivante décrivant la structure réelle de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ dans l'article [GM02][prop.2.1] :

1

L'ensemble $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ est une variété réelle fermée et connexe (*elle est aussi compacte*). Les composantes connexes des intersections de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ avec les strates du bord complexe donnent une décomposition cellulaire. Les cellules sont en correspondance bijective avec les arbres marqués stables localement plans. La relation "une cellule est une composante de codimension 1 du bord d'une autre cellule" correspond à la relation "un arbre localement plan produit un autre arbre localement plan en contractant une arête intérieure".

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

◁(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{D}^n \mathbb{P}^1

\ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Proposition

2

Fixer un ordre (cyclique, non orienté) particulier sur les $n + 3$ points marqués détermine un cellule ouverte (de dimension maximale) particulière, celle où les points sont dans l'ordre. Réciproquement à une telle cellule correspond un seul ordre.

3

La clôture de chaque cellule ouverte à une structure de "Stasheff polytope". En particulier les strates de bord de codimension 1 sont indexées par les 2-partitions des points marqués qui respectent l'ordre de la cellule en question. Cela revient à couper l'équateur en deux arcs connexes.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

§(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Avec les mains

Nous avons déjà décrit comment construire combinatoirement le bord de $\mathcal{M}_{0,n+3}$. Faisons le analytiquement.

- On tend vers le bord cela en faisant tendre la longueur d'une géodésique vers 0.
- En restant dans $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$, cette géodésique intersecte l'équateur en deux points.
- À la limite l'équateur a dégénéré en deux équateurs réels.
- La partition correspondante s'obtient donc en séparant l'équateur réel en deux arcs.
- La partition conserve l'ordre de la cellule depuis laquelle on est partie.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

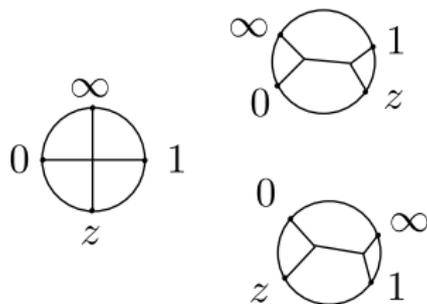
$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

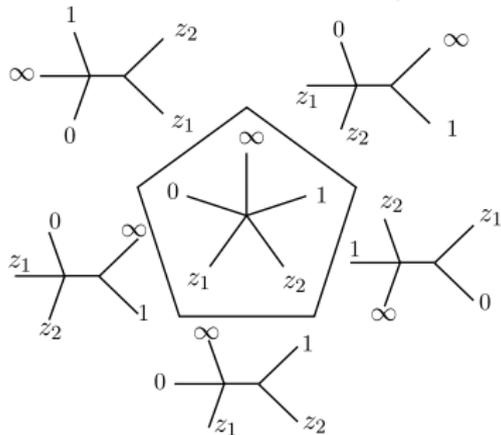
Premiers exemple

Autres exemples

Exemple



Cas $n = 1$. Bord de la cellule définie par $0 < z < 1 < \infty$



Cas $n = 2$. Strates de codimension 1 du bord de la cellule définie par $0 < z_1 < z_2 < 1 < \infty$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_0^n

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Eclatements

Nous allons faire un rappel sur la notion d'éclatement. Nous nous limiterons au cas qui nous intéresse c'est à dire à celui de l'éclatement d'un point ou plus généralement d'une sous-variété donnée localement par des équations affines dans $(\mathbb{P}^1)^n$. Nous traiterons le problème d'une façon géométrique qui sera amplement suffisante pour les utilisations que nous en ferons.

Proposition

On se donne X une variété projective. On se donne Z une sous-variété isomorphe à \mathbb{P}^m pour un certain $m \geq n - 2$. Alors il existe un unique couple $(\widehat{X}; \varepsilon)$ (à difféomorphisme près) tel que :

- 1 $\varepsilon : \widehat{X} \rightarrow X$
- 2 $\widehat{X} \setminus \varepsilon^{-1}(Z) \simeq X \setminus Z$
- 3 $\varepsilon^{-1}(Z) \simeq Z \times \mathbb{P}^{k-1}$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

La projection $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$

La projection $p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$ peut se voir de deux façons.
 Cette application est dans les deux cas le prolongement au bord de la projection qui envoie $(0, z_1, \dots, z_n, 1\infty)$ sur (z_1, \dots, z_n) .

Première approche

On efface graphiquement ou calligraphiquement $0, 1$ et ∞ :

$$(0, z_1, \dots, z_n, 1\infty) \mapsto (z_1, \dots, z_n).$$

Cette présentation à le mérite d'être simple mais n'est pas pratique pour décrire le prolongement au bord.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

ζ(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

question

En effet par exemple pour $n = 3$ quelle est l'image de la composante de bord donnée par la partition $0z_1z_3|z_21\infty$?

- On part d'une courbe lisse de référence $S = S_{0,6}$ avec les points marqués $0, z_1, z_2, z_3, 1$ et ∞ , une géodésique homotopiquement équivalente à un lacet entourant $0, z_1$, et z_3
- On se déplace dans $\mathcal{M}_{0,6}$ en faisant tendre la longueur de cette géodésique vers 0
- On tombe dans la composante voulue
- Symboliquement on a $0 = z_1 = z_3$ qui est l'équation d'une droite dans \mathbb{P}^3 . La composante $0z_1z_3|z_21\infty$ s'envoie justement sur cette droite...

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

§(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Pour obtenir les images des composantes de codimension 1 du bord par p , on dit que les points entourés par un lacet sont égaux. On obtient la description suivante dans $(\mathbb{P}^1)^n$:

- les bords de la forme $s_i s_j | \dots, s_i \varepsilon | \dots$ avec $\varepsilon \in \{0, 1, \infty\}$, donnent les hyperplans $x_i = x_j$ et $x_i = 0, 1, \infty$ respectivement ;
- les lacets autour de trois points (dont l'un au plus est égal à $0, 1, \infty$) donnent des espaces affines de codimension 2 ;
- les lacets autour de quatre points (l'un au plus peut être égal à $0, 1, \infty$) donnent des espaces affines codimension 3 ;
- ...
- les lacets autour de $n + 1$ points (un seul étant égal à $0, 1, \infty$) donnent les points $(0, \dots, 0)$ $(1, \dots, 1)$ et (∞, \dots, ∞) .

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Présentation itérative

On fixe $n \geq 3$. On note S un ensemble fini, on va noter $\mathcal{M}_{0,S}$ pour $\mathcal{M}_{0,|S|}$. On se donne un sous-ensemble S' de S avec $|S'| \geq 3$ on a un morphisme canonique d'oubli $\Phi_T : \overline{\mathcal{M}_{0,S}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,S'}}$ (avec $T = S \setminus S'$) qui supprime les points marqués indexés par les éléments de T et contracte les composantes "instables". Les morphismes oubliant des sous-ensembles disjoints commutent et leurs composées correspondent aux morphismes oubliant l'union de ces sous-ensembles.

Exemple avec $\mathcal{M}_{0,5}$

- Prendre l'exemple du point $(0, 0)$.
- $0z_1z_2|1_\infty \mapsto \underbrace{0z_1|1_\infty}_{t_1=0} \times \underbrace{0z_2|1_\infty}_{t_2=0}$

Géométrie

Intérieur et bord
Coordonnées
Points réels
 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

C(2)

Description
Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$
Pôles

Cohomologie

Différentielles
 \mathbb{C}^n
 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs
Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème
 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

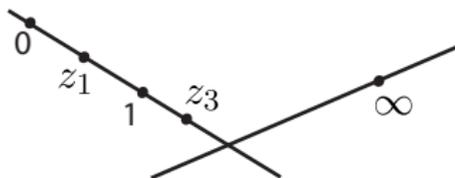
Premiers exemple
Autres exemples

Quelques dessins

On est dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$, $S = \{0, z_1, z_2, z_3, 1, \infty\}$, $T = \{z_2\}$ et on regarde la composante de codimension 1 définie par la partition $z_2 \infty | 0 z_1 z_3 1$:



la courbe est stable.



on oublie z_2 , la courbe n'est pas stable.

Fig.:

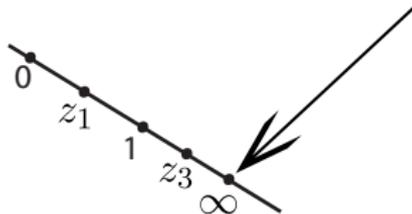


Fig.:

on contracte en remplaçant le point de nœud par le point marqué restant.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

C(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Diviseur écrasés pour $\mathcal{M}_{0,5}$ et $\mathcal{M}_{0,6}$ $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$

- $01|z_1z_2\infty$
- $1\infty|0z_1z_2$
- $0\infty|z_1z_21$

exemples dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$

- $01|z_1z_2z_3\infty \mapsto$ point
- $1\infty|0z_1z_2z_3 \mapsto$ point
- $0\infty|z_1z_2z_31 \mapsto$ point
- $01z_3|z_1z_2\infty \mapsto$ droite
- $z_1z_2z_3|01\infty \mapsto$ droite
- ...

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

La projection $p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$ est aussi une itération d'un morphisme birationnel :

$$\beta : \overline{\mathcal{M}}_{0,\{0,z_1,\dots,z_n,1,\infty\}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,\{0,z_1,\dots,z_{n-1},1,\infty\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,\{0,z_n,1,\infty\}}.$$

Comme les morphismes d'oubli d'ensembles disjoints commutent on peut aussi les faire tous en même temps mais cette séparation des étapes peut être utile pour des démonstrations par récurrence comme celle que font Goncharov et Manin [GM02][prop 3.1]. Nous déduisons dans ce rapport cette même proposition (voir prop. 4.2) comme corollaire de la proposition 4.1.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

◁(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 $\mathbb{C}P^n$ \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

L'exemple de $\zeta(2)$

La représentation intégrale de $\zeta(2)$ est donnée par la formule suivante (voir chapitre voir ?? pour des rappels sur les valeurs multi-zeta) :

$$\zeta(2) = \int_0^1 \frac{1}{t_2} \left(\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) dt_2 = \int \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{dt_2}{t_2} \wedge \frac{dt_1}{1-t_1}$$

Considérons (t_1, t_2) comme les coordonnées affines sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Alors les singularités de l'intégrale sont les droites : $t_1 = 1$, $t_1 = \infty$, $t_2 = 0$, $t_2 = \infty$ (représentées en pointillés sur la figure 9) et le bord du domaine d'intégration est un triangle (en plein sur la même figure).

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$ **Description**Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

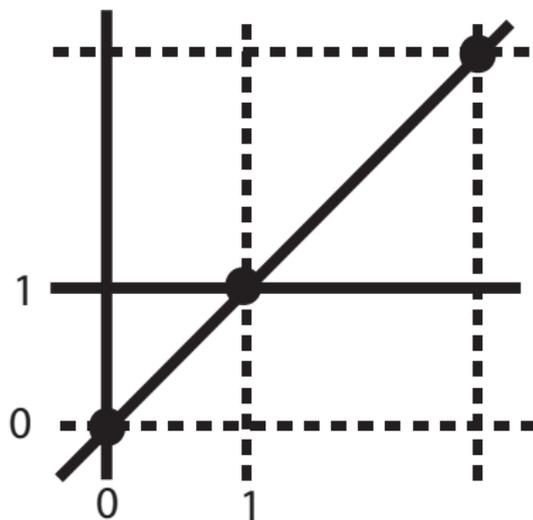


Fig.:

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_D^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

- $\mathcal{M}_{0,5}$ est identifié aux quintuplets $(0, z_1, z_2, 1, \infty)$ tels que $z_1 \neq z_2$ et $z_1, z_2 \neq 0, 1, \infty$ (choix d'un système de représentants des classes modulo $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$).
- Grâce à $p : \mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $(0, z_1, z_2, 1, \infty) \mapsto (z_1, z_2)$.
- On considère l'intégrale précédente sur $\mathcal{M}_{0,5}$ en la "remontant".

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{D} $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Quelques propositions

Proposition

Soit ω une forme différentielle analytique sur une variété compacte X . Alors l'intégrale

$$\int_X \omega$$

est convergente.

Corollaire

Soit ω une forme méromorphe sur une variété compacte X . Soit $\Delta \subset X$ une sous-variété ouverte. Alors l'intégrale

$$\int_{\Delta} \omega$$

est convergente si et seulement si le bord de Δ est disjoint du diviseur des pôles de ω .

Se pose alors la question d'identifier le bord du domaine d'intégration dans $\mathcal{M}_{0,n}$ ainsi que le diviseur des pôles ω .

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

C(2)

DescriptionBord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0_5}}$:

- $\mathcal{M}_{0,5} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \text{sept droites}$:

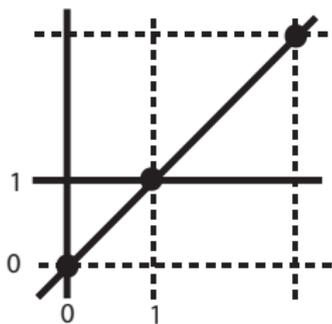


Fig.:

- $\partial \overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ n'est pas seulement constitué des sept droites manquantes sur la figure 10. L'union de ces sept droites n'est pas un diviseur à croisements normaux ;
- Les points "à problèmes" sont $(0, 0)$, $(1, 1)$, (∞, ∞) . Le bord de $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ contient trois droites supplémentaires : les droites exceptionnelles de l'éclatement aux trois points à problèmes.
- $\overline{\mathcal{M}_{0,5}} = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \{\text{sept droites}\}) \cup \{\text{dix droites}\}$:

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Les 10 strates de codimension 1

On donne ici la liste des 10 strates de codimension 1 qui composent le bord de $\mathcal{M}_{0,5}$:

strates	$1\infty 0z_1z_2$	$0\infty z_1z_21$	$01 z_1z_2\infty$	$0z_1 z_21\infty$	$0z_2 z_11\infty$
image dans $(\mathbb{P}^1)^2$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	(∞, ∞)	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$
strates	$1z_1 z_20\infty$	$1z_2 \infty0z_1$	$\infty z_1 z_210$	$\infty z_2 z_110$	$z_1z_2 01\infty$
image dans $(\mathbb{P}^1)^2$	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_1 = \infty$	$x_2 = \infty$	$x_1 = x_2$

Géométrie

Intérieur et bord
Coordonnées
Points réels
 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

 $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$
Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_0^n
 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs
Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème
 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple
Autres exemples

Diviseur des pôles

On appelle A le diviseur correspondant aux singularités dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ de la différentielle

$$\omega = \frac{dz_2}{z_2} \wedge \frac{dz_1}{1-z_1}.$$

- Les singularités de ω dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ ne sont pas toutes les préimages des singularités dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.
- les éclatements en $(0,0)$ et en $(1,1)$ donnent lieu à des composantes superflues (calcul dans des coordonnées locales suite à l'éclatement).
- Les strates du bord de $\mathcal{M}_{0,5}$ se divisent en deux catégories :
- 5 strates forment le diviseur A
- 5 autres forment le bord B du domaine d'intégration.

diviseur A des pôles de ω	$0z_2 z_11\infty$	$1z_1 z_20\infty$	$\infty z_1 z_210$	$\infty z_2 z_110$
				$01 z_1z_2\infty$
le bord B	$0z_1 z_21\infty$	$z_1z_2 01\infty$	$1z_2 \infty 0z_1$	$1\infty 0z_1z_2$
				$0\infty z_1z_21$

On a noté en gras les diviseurs exceptionnels.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$ **Pôles**

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0,1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Un dessin

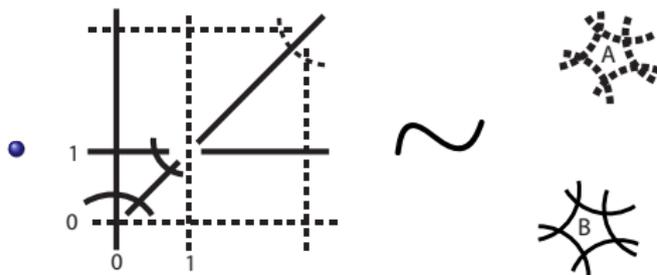


Fig.:

- Apparaît ici les problèmes que pose la connaissance du diviseur des singularités du pull-back d'une différentielle par une suite d'éclatements.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Différentielles logarithmiques

Soit X une variété complexe et D une hypersurface dans X qui est un diviseur à croisements normaux. On définit alors le complexe de de Rham holomorphe à singularité logarithmique le long de D :

Définition

Soit $\Omega_X^k(\log D)$ le sous-faisceau du faisceau $\Omega_X^k(*D)$ des formes différentielles méromorphes sur X , holomorphes sur $X \setminus D$, défini par la condition :

Si α est une forme méromorphe sur U holomorphe sur $U \setminus D$, $\alpha \in \Omega_X^k(\log D)|_U$ si α admet un pôle au plus d'ordre 1 le long de $U \cap D$.

On notera parfois simplement $\Omega_{\log}^k(D)$ pour $\Omega_X^k(\log D)$ si le contexte le permet.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

◁(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles \mathbb{C}_D^n $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Résultat

Le résultat suivant est dû à Deligne ([Del68]) :

Proposition

On a un isomorphisme canonique :

$$H^k(U, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D)) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quelques précisions :

- $H^k(U; \mathbb{C})$ désigne le k -ième groupe de cohomologie du faisceau des fonctions localement constantes à valeur dans \mathbb{C} .
En d'autre terme la cohomologie habituelle de U .
- $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D))$ est défini par

$$\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D)) = R^k \Gamma(\Omega_X^\bullet(\log D)).$$

On trouvera des démonstrations de cela, par exemple, dans le livre de C. Voisin [Voi02][pages186-187]

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

ζ(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_D^n $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Notation

Soit M une variété holomorphe. On notera $M_0^n \subset M^n$ l'ensemble des n -uplets (z_1, \dots, z_n) tel que $z_i \in M \forall i$ et que $z_i \neq z_j \forall i \neq j$. On notera en conséquence \mathbb{C}_0^n l'espace de configuration du plan. Par la suite on sera amené à considérer $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$.

On note A_n l'anneau gradué anticommutatif engendré par les éléments de degré 1 $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$, avec $1 \leq k \neq l \leq n$ et la relation :

$$\omega_{k,l}\omega_{l,m} + \omega_{l,m}\omega_{m,k} + \omega_{m,k}\omega_{k,l} = 0 \quad (1)$$

On a alors le théorème suivant

Théorème

On a un isomorphisme $H^\bullet(\mathbb{C}_0^n) \simeq A_n$ donné par :

$$\omega_{k,l} = \frac{1}{2i\pi} \frac{dz_k - dz_l}{z_k - z_l} \quad (2)$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

◁(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

- 1 **Supprimer toute la symétrie dès le départ.** On identifiera donc ici $\mathcal{M}_{0,n+3}$ à l'ensemble des $(n+3)$ -uplets de la forme $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$.
- 2 C'est à dire $\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq (\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$.
- 3 Calculer la cohomologie de $(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$ qui nous donnera directement celle de $\mathcal{M}_{0,n+3}$.
- 4 Cette solution fait bien apparaître les formes différentielles logarithmiques $\frac{dz_i}{z_i}$ et $\frac{dz_i}{1-z_i}$.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_0^n

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Le cas de \mathbb{P}^1 moins trois points :

La fibration étudiée est à nouveau l'oubli de la dernière variable :

$$\begin{array}{ccc}
 p : \mathcal{M}_{0,n+3} & & \\
 \downarrow & p^{-1}(0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1, \infty) = & \\
 & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1, \infty\} & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{M}_{0,n+2} & \\
 \\
 p : (\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n & & \\
 \downarrow & p^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) = & \\
 & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, \dots, z_{n-1}, 1, \infty\} & \\
 & \downarrow & \\
 & (\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^{n-1} &
 \end{array}$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Suite spectrale et dégénérescence :

Ici, comme dans le cas de \mathbb{C}_0^n l'existence d'une section assure la dégénérescence de la suite spectrale de Leray. Une subsection étant donnée par exemple par :

$$z_n = \frac{z_{n-1}}{|z_{n-1}|} \left(|z_{n-1}| - \frac{\min_{1 \leq i \neq j \leq n-1} \{|z_i - z_j|, |z_i|, |1 - z_i|\}}{3} \right)$$

Le groupe fondamental de la fibre est facile à caractériser. Le π_1 de $(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^n$ est lui plus compliqué mais c'est un sous-groupe du groupe des tresses colorées de la sphère à $n+3$ brins qui agit trivialement sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{n+2 \text{ points}\}$. Son action sur le H^1 de la fibre est donc elle aussi triviale. On trouve alors que $E_2^{p,q} = H^p((\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})_0^{n-1}) \otimes H^q(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, z_1, \dots, z_{n-1}, \infty\})$. On a donc :

$$H^k(\mathcal{M}_{0,n+3}) = H^k(\mathcal{M}_{0,n+2}) \oplus H^{k-1}(\mathcal{M}_{0,n+2}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_i, 1, \infty\})$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

C(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Base additive de $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+3})$ ($n \geq 1$)

On montre par récurrence qu'une base additive de $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+3})$ ($n \geq 1$) est formée des produits de la forme :

$$\omega_{k_1, l_1} \dots \omega_{k_p, l_p} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} -1 \leq k_s < l_s \\ 1 \leq l_s \leq n \\ l_1 < \dots < l_p \end{array} .$$

On peut rajouter à chaque fois un générateur $\omega_{-2,j}$, il faut alors ajouter une relation :

$$\sum_{i=-2}^{j-1} \omega_{i,j} = 0$$

qui vient du fait que l'on travaille avec des sphères.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

◊(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Le calcul des premiers termes peut aider à la compréhension :

$n = 1$

- $H^0(\mathcal{M}_{0,4}) = \mathbb{C}$

- $H^1(\mathcal{M}_{0,4})$

$$\begin{aligned}
 H^1(\mathcal{M}_{0,4}) &= H^1(\mathcal{M}_{0,3}) \oplus H^0(\mathcal{M}_{0,3}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}) \\
 &= H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\})
 \end{aligned}$$

$dz_1/(z_1 - 1)$	$\omega_{-1,1}$
dz_1/z_1	$\omega_{0,1}$
	$\omega_{-2,1}$
	$\omega_{0,1}\omega_{-1,1}\omega_{-2,1} = 0$

- $H^2(\mathcal{M}_{0,4}) = 0$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

ζ(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

$$n = 2$$

$$\bullet H^0(\mathcal{M}_{0,5}) = \mathbb{C}$$

$$\bullet H^1(\mathcal{M}_{0,5})$$

$$\begin{aligned}
 H^1(\mathcal{M}_{0,5}) &= H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \oplus H^0(\mathcal{M}_{0,4}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\}) \\
 &= H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \oplus H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\})
 \end{aligned}$$

$\frac{dz_2}{(z_2-1)}$	$\omega_{-1,2}$
$\frac{dz_2}{z_2}$	$\omega_{0,2}$
$\frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1}$	$\omega_{1,2}$
	$\omega_{-2,1}$
$\omega_{1,2}\omega_{0,1}\omega_{-1,1}\omega_{-2,1} = 0$	

$$\bullet H^2$$

$$\begin{aligned}
 H^2(\mathcal{M}_{0,5}) &= H^2(\mathcal{M}_{0,4}) \oplus H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\}) \\
 &= H^1(\mathcal{M}_{0,4}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, 1, \infty\})
 \end{aligned}$$

$\frac{dz_1}{(z_1-1)}$	$\frac{dz_2}{(z_2-1)}$
$\frac{dz_1}{z_1}$	$\frac{dz_2}{z_2}$
	$\frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1}$

$$\bullet H^3(\mathcal{M}_{0,5}) = 0$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

§(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

$n = 3$

- $H^0(\mathcal{M}_{0,6}) = \mathbb{C}$
- $H^1(\mathcal{M}_{0,6})$

$$\begin{aligned}
 H^1(\mathcal{M}_{0,6}) &= H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^0(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\
 &= H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\})
 \end{aligned}$$

$\frac{dz_3}{(z_3-1)}$	$\omega_{-1,3}$
$\frac{dz_3}{z_3}$	$\omega_{0,3}$
$\frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$	$\omega_{1,3}$
$\frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$	$\omega_{2,3}$
	$\omega_{-2,3}$
	$\omega_{2,3}\omega_{1,3}\dots\omega_{-2,3} = 0$

- H^2

$$\begin{aligned}
 H^2(\mathcal{M}_{0,6}) &= H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\
 &= H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^1(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\})
 \end{aligned}$$

$\frac{dz_1}{(z_1-1)}$	$\frac{dz_3}{(z_3-1)}$
$\frac{dz_1}{z_1}$	$\frac{dz_3}{z_3}$
$\frac{dz_2}{(z_2-1)}$	$\frac{dz_3 - dz_1}{z_3 - z_1}$
$\frac{dz_2}{z_2}$	$\frac{dz_3 - dz_2}{z_3 - z_2}$
$\frac{dz_2 - dz_1}{z_2 - z_1}$	

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

◁(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

$n = 3$, suite

- $H^3(\mathcal{M}_{0,6})$

$$\begin{aligned} H^3(\mathcal{M}_{0,6}) &= H^3(\mathcal{M}_{0,5}) \oplus H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \\ &= H^2(\mathcal{M}_{0,5}) \otimes H^1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, 1, \infty\}) \end{aligned}$$

- $H^4(\mathcal{M}_{0,6}) = 0$

Géométrie

Intérieur et bord
Coordonnées
Points réels
 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

 $\zeta(2)$

Description
Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$
Pôles

Cohomologie

Différentielles
 \mathbb{C}_D^n
 $\mathbb{P}^1 \setminus$ **trois points**

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs
Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème
 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple
Autres exemples

Nous avons ici montré le résultat suivant :

Proposition

Soit \mathcal{A}_n^2 l'anneau gradué anticommutatif engendré par les éléments de degré 1 $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$ pour $1 \leq k \neq l \leq n$ et $\omega_{k,l}$ pour $k = -1, 0$ et $1 \leq l \leq n$ avec les relations :

$$\begin{aligned} \omega_{k,l}\omega_{l,m} + \omega_{l,m}\omega_{m,k} + \omega_{m,k}\omega_{k,l} &= 0 && \text{pour } -1 \leq k \leq n ; 1 \leq l \leq n \quad (3) \\ \omega_{k_1,l}\omega_{k_2,l} &= 0 && \text{pour } k_1, k_2 = -1, 0 \text{ et } 1 \leq l \leq n \quad (\#) \end{aligned}$$

On a un isomorphisme $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+3}) \simeq \mathcal{A}_n^2$ donné par les formules ?? . \mathcal{A}_n^2 étant d'autre part isomorphe à l'anneau des formes différentielles logarithmiques, on a prouvé que ces dernières (et non leurs classes de cohomologie) calculent la cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n+3}$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

C(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

- 1
 - On fixe $n \geq 3$ et on choisit le système de représentants habituel
 - On se donne l'ordre : $\rho : 0 < z_1 \dots < z_n < 1 < \infty$. On identifie la cellule $\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})$ de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ avec Δ_n^0 .
 - $p : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$ tel que $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$. et la restriction de p aux points réels :
 $p_{\mathbb{R}} : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n(\mathbb{R})$.

- 2
 - On cherche à déterminer un critère de convergence pour **les intégrales de la forme** $\int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})} \omega$ où $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$.
En vertu du corollaire 2.2,
 - on cherche à connaître le diviseur des singularités d'une forme différentielle dans $\Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$.

- 3 Ensuite se posera le problème de connaître la valeur de l'intégrale $\int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})} \omega$ lorsque celle-ci converge.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_0^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemples

Autres exemples

Théorème

Soit $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$. Soit D une composante irréductible du bord dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$. D s'envoie dans $(\mathbb{P}^1)^n$ sur D' . Soit i la codimension de D' dans $(\mathbb{P}^1)^n$. D appartient au diviseur des pôles de ω dans $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ ssi $p_*(\omega)$ à un pôle d'ordre $\geq i$ le long de D' .

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Application

Le théorème précédent (4.1) permet d'obtenir une description combinatoire explicite des diviseurs des pôles d'une forme différentielle logarithmique ω quand elle peut s'écrire sous la forme :

$$\omega = \frac{dz_n}{z_n - \varepsilon_n} \wedge \dots \wedge \frac{dz_1}{z_1 - \varepsilon_1} \quad \text{avec } \varepsilon_i \in \{0, 1, z_j \text{ tel que } j \neq i\}$$

Le cas particulier que l'on regarde ici est celui où tous les ε_i sont dans $\{0, 1\}$. Soit une fonction $\varepsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$, $i \mapsto \varepsilon_i$. On pose alors :

$$\Omega(\varepsilon) = \bigwedge_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i - \varepsilon_i}$$

Pour α dans $\{0, 1, \infty\}$ on définit $S(\alpha, \varepsilon)$ par :

$$S(0, \varepsilon) = \{z_i \mid \varepsilon_i = 0\} \quad S(1, \varepsilon) = \{z_i \mid \varepsilon_i = 1\}$$

$$S(\infty, \varepsilon) = S(0, \varepsilon) \cup S(1, \varepsilon) = \{z_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Définition

On dira qu'une 2-partition de $S = \{0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty\}$ est de *type* α *respectant* ε si l'une de ses parties est de la forme $\alpha \cup T$ avec $T \subset S(\alpha, \varepsilon)$

Le résultat suivant, démontré dans [GM02][prop 3.1], découle facilement du théorème 4.1. ci-dessus :

Proposition

Le diviseur des singularités de $\Omega(\varepsilon)$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ est l'union $A(\varepsilon)$ des diviseurs de bord correspondant aux 2-partitions stables de $\{0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty\}$ (composantes du bord de codimension 1) qui sont d'un type respectant ε .

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_D^n $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Périodes des espaces de modules

- On note $\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})$ la cellule de $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ correspondant à l'ordre standard
- Soit $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}})$.
- On note $A(\omega)$ le diviseur des singularités de ω .
- On note Z_n l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} engendré par les valeurs multi-zeta de poids n .

Théorème

Si $A(\omega)$ est disjoint de $\partial\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})$ alors l'intégrale suivante converge et :

$$\int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(\mathbb{R})} \omega \in Z_n.$$

On cherche à répondre à cette question dans un premier temps pour ω de la forme :

$$\omega = \frac{dz_1}{z_1 - \varepsilon_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n - \varepsilon_n} \quad \varepsilon_i \in \{0, 1, z_j \text{ tel que } j \neq i\}.$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

◊(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$ **Théorème** $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Le cas des MZV

Quelques notations

On se donne, ici, une fonction $\varepsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$, $i \mapsto \varepsilon_i$. On pose alors :

$$\Omega(\varepsilon) = \bigwedge_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i - \varepsilon_i}.$$

On a déjà vu la proposition suivante 4.2, redémontrant le résultat de Goncharov ([GM02][prop. 3.1]) :

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Proposition

Le diviseur des singularités de $\Omega(\varepsilon)$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ est l'union $A(\varepsilon)$ des diviseurs de bord correspondant aux 2-partitions stables de $\{0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty\}$ (composantes du bord de codimension 1) qui sont d'un type respectant ε .

Goncharov note $\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho(R)$ la cellule de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ correspondant à l'ordre cyclique $\rho : 0 < z_1 < \dots < z_n < 1 < \infty < 0$ (cf 3), il obtient alors le corollaire suivant :

Corollaire ([GM02][page 10, coro. 3.2])

On suppose que $n \geq 2$ et que ε vérifie $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_n = 0$. Alors $A(\varepsilon)$ n'intersecte pas de bord de $\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho$.

De plus, $\Omega(\varepsilon)$ est holomorphe sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A(\varepsilon)$, et l'on a :

$$\zeta(n_1, \dots, n_m) = (-1)^m \int_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\rho} \Omega(\varepsilon). \quad (5)$$

La correspondance entre le m -uplet qui définit la valeur multi-zeta et la forme différentielle étant la même que pour les intégrales itérées. Donc en particulier, on a $\text{wt}((n_1, \dots, n_m)) = n$.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

ζ(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Déduction du corollaire ([GM02][page 10]).

Supposons que l'intersubsection est non vide. Elle doit donc contenir au moins une strate de dégénérescence maximale. Cette strate correspond à un arbre plan trivalent dessiné à l'intérieur d'un cercle et dont les feuilles sont les points marqués mis dans l'ordre ρ . Chaque diviseur de bord (strate de codimension 1) contenant une telle strate peut être obtenu en choisissant une arête intérieure ; en supprimant l'arête on définit une partition de S associée aux deux composantes connexes de l'arbre moins l'arête.

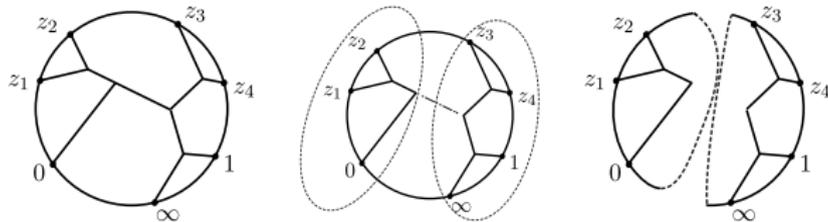


Fig.:

Il suffit donc de montrer qu'aucun des arcs ne contient que des points formant un ensemble du type $\{\alpha\} \cup T$ avec $T \subset S(\alpha, \varepsilon)$. Le point important est que comme les points sont placés dans l'ordre, un arc contenant un des points contient aussi forcément l'un des ces voisins dans l'écriture

$0 < z_1 < \dots < z_n < 1 < \infty < 0$. Si un arc contient $\alpha = \infty$ alors il contient aussi ou 0 ou 1 et ne peut donc être de la forme $\{\infty\} \cup \{z_{i_1}, \dots, z_{i_p}\}$ avec $z_{i_k} \in S(\infty, \varepsilon)$. Si un des arcs contient $\alpha = 0$ alors il

Le premier exemple non-trivial

Le premier exemple "nouveau" apparaît pour $n = 6$. Il s'agit d'une forme différentielle $\omega \in \Omega_{\log}^3(\overline{\partial\mathcal{M}_{0,6}})$ qui n'est pas de la forme

$\bigwedge \frac{dt_i}{t_i - \varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ mais telle que $\int_{\mathcal{M}_{0,6}^\rho} \omega$. Cet exemple est traité en 6.1.

On a :

$$\omega = \frac{dt_3}{t_3} \wedge \frac{dt_2}{1 - t_2} \wedge \frac{dt_1}{t_3 - t_1}$$

Une approche empirique (Maple) nous conduit à supposer que $\int_{\mathcal{M}_{0,6}^\rho} \omega = 2\zeta(3)$, c'est ce que nous allons montrer ici.

Exemple

$$I = \int_{\mathcal{M}_{0,6}^\rho} \omega = \int_0^1 \frac{dt_3}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{1 - t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{t_3 - t_1} = 2\zeta(3) \quad (6)$$

on rappelle que $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_0^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Les calculs

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3-t_1} = \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3} \frac{1}{1-\frac{t_1}{t_3}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t_1}{t_3}\right)^k = \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3^{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} t_1^k \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \sum_{k=0}^{\infty} t_1^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \frac{t_2^{k+1}}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} t_2^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} t_2^l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \int_0^{t_3} \sum_{l=0}^{\infty} t_2^{l+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{t_3} t_2^{l+k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{1}{t_3^{k+2}} \frac{t_3^{l+k+2}}{l+k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(l+k+2)} \int_0^1 t_3^l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(l+k+2)} \frac{1}{l+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl(l+k)} \end{aligned}$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

(2)

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_0^n

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

ce qui donne :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t_3} \int_0^{t_3} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_3-t_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl(l+k)} \quad (7)$$

On remarque alors que :

$$\frac{1}{kl(l+k)} = \frac{1}{k^2l} - \frac{1}{k^2(l+k)} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{l^2k} - \frac{1}{l^2(l+k)} \quad (9)$$

d'autre part :

$$\frac{1}{l^2(l+k)} = -\frac{1}{k^2l} + \frac{1}{l^2k} + \frac{1}{k^2(l+k)} \quad (10)$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$ $\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

 \mathbb{C}_D^n \mathbb{P}^1 $\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

On a donc :

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl(l+k)} \\
 &= \sum_{k>l \geq 1} \frac{1}{kl(l+k)} + \sum_{l>k \geq 1} \frac{1}{lk(l+k)} + \sum_{k=l \geq 1} \frac{1}{kl(l+k)} \\
 \text{8 et 9} &\equiv \sum_{k>l \geq 1} \frac{1}{k^2 l} - \frac{1}{k^2(l+k)} + \sum_{l>k \geq 1} \frac{1}{l^2 k} - \frac{1}{l^2(l+k)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
 &= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2(l+k)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
 \text{10} &\equiv 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{l^2 k} + \frac{1}{k^2(l+k)} \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
 &= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l^2 k} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3} \\
 &= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) \\
 &\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2 k} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3}
 \end{aligned}$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

$\mathbb{C}P^n$

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

$$= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2 k} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^2 k} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3}}_{=0 \text{ car } \zeta(3)=\zeta(1,2)}$$

$$\zeta(3) \stackrel{=}{=} \zeta(1,2) \quad 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p^3}$$

$$= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \frac{1}{k^2(l+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right)$$

$$= 2\zeta(1,2) - \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{k^2(l+k)} + \sum_{l=k+1}^{\infty} -\frac{1}{k^2 l} + \frac{1}{k^2(l+k)} \right)}$$

$$l = 2\zeta(3) \quad = 0 \forall k : \text{ pour tout } k \text{ traiter la parenthèse comme une série}$$

Géométrie

Intérieur et bord
Coordonnées
Points réels
 $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

 $\zeta(2)$

Description
Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$
Pôles

Cohomologie

Différentielles
 \mathbb{C}_0^n
 $\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs
Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème
 $\varepsilon_i \in \{0,1\}$

Exemples

Premiers exemple
Autres exemples

On peut cependant faire le calcul en considérant les intégrales :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{0 < t_1 < t_2 < t_3} \frac{dt_3}{t_3} \frac{dt_2}{1-t_2} \frac{dt_1}{t_3-t_1} \\
 &= \int_0^1 \int_0^{t_3} \frac{dt_3}{t_3} \frac{dt_2}{1-t_2} (\ln(t_3) - \ln(t_3-t_2)) \\
 &= \int_{[0;1]^2} \frac{dudv}{1-uv} (-\ln(1-v)) \\
 \text{inté de u} &= \int_0^1 \frac{\ln(1-v)^2}{v} dv = \int_0^1 \frac{2 \operatorname{Li}_{yy}(v)}{v} dv = 2\zeta(2, 1)
 \end{aligned}$$

On rappelle :

Proposition (rappel)

Les fonctions $\operatorname{Li}(z)$ sont définies par la famille d'équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Li}_y(z) = -\ln(1-z) \\ \left\{ \begin{array}{l} d \operatorname{Li}_{xw} = \operatorname{Li}_w(z) \\ \frac{dz}{d \operatorname{Li}_{yw}} = \frac{z}{1-z} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus \text{trois points}$

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Un autre exemple est :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{0 < t_1 < t_2 < t_3} \frac{dt_3}{t_3 - t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1 - t_1} = \sum_{k, l \geq 1} \frac{1}{k(k+l)^2} \\
 &= \int_{[0,1]^3} \frac{du_1}{u_1 - u_1 u_2 u_3} \frac{u_1 du_2}{u_1 u_2} \frac{u_1 u_2 du_3}{1 - u_1 u_2 u_3} \\
 &= \int_{[0,1]^3} \frac{(1 - vw)(1 - uvw)}{dudvdw} \\
 \text{inté de u} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(1 - vw) dv dw}{1 - vw} + \frac{-\ln(1 - vw) dv dw}{vw} \\
 &= \int_0^1 \frac{\text{Li}_{yy}(v) dv}{v} + \frac{\text{Li}_{xy}(v) dv}{v} = \zeta(2, 1) + \zeta(3)
 \end{aligned}$$

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}_0^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

En dimension 4 :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\Delta} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_3}{t_3 - t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1 - t_1} = \sum_{k, l \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2 (k+l+1)^2} \\
 &= \int_{[0,1]^4} \frac{du_1}{u_1} \frac{u_1 du_2}{u_1 u_2 - u_1 u_2 u_3} \frac{u_1 u_2 du_3}{u_1 u_2 u_3} \frac{u_1 u_2 u_3 du_4}{1 - u_1 u_2 u_3 u_4} \\
 &= \int_{[0,1]^4} \frac{(1-wx)(1-uvwx)}{-\ln(1-vwx)} dv dw dx \\
 &\stackrel{\text{inté de u}}{=} \int_{[0,1]^3} \frac{(1-wx)(vwx)}{\text{Li}_{xy}(wx)} dx dw \\
 &= \int_{[0,1]^2} \frac{\text{Li}_{xy}(wx) dx dw}{(1-wx)(wx)} \\
 &\stackrel{\text{cf calcul précédent}}{=} \text{Li}_{xyxy}(1) + \text{Li}_{xyxy}(1) = \zeta(2, 2) + \zeta(4)
 \end{aligned}$$

Je vais essayer d'en faire peut-être un autre mais les calculs deviennent de plus en plus dur si on veut trouver la bonne manipulation ou cela se passe bien.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et pôles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemples

Autres exemples

-  V. I. Arnol'd, *The cohomology ring of colored braid group*, Mat. Zametki, no. 5, 1969.
-  X. Buf, J. Fehrenbach, P. Lochak, and L. Schneps, *Espace de modules de courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, Panorama et Synthèse, no. 7, SMF, 1999.
-  Pierre Deligne, *Théorie de hodge 2*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1968), no. 35.
-  Pierre Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1969), no. 36.
-  A. B. Goncharov and Yu. I Manin, *Multiple ζ -motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$* , e-print, www.arxiv.org/abs/math.AG/0204102, April 2002.
-  Claire Voisin, *Théorie de hodge et géométrie algébrique complexe*, première ed., Société Mathématique de France, 2002.

Géométrie

Intérieur et bord

Coordonnées

Points réels

$\mathcal{M}_{0,n+3}$ et $(\mathbb{P}^1)^n$

$\zeta(2)$

Description

Bord de $\mathcal{M}_{0,5}$

Pôles

Cohomologie

Différentielles

\mathbb{C}^n

\mathbb{P}^1

$\mathbb{P}^1 \setminus$ trois points

Diviseurs et poles

Bord et diviseurs

Application

MZV sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Théorème

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

Exemples

Premiers exemple

Autres exemples

Nous allons redonner ici la preuve d'Arnol'd
[Arn69] :

Etape 1 :

- on calcule récursivement la cohomologie de \mathbb{C}_0^n .
- on a une fibration :

$$\begin{array}{ccc}
 p : & \mathbb{C}_0^n & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathbb{C}_0^{n-1} & \\
 & \text{fibres} & \\
 & p^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\} &
 \end{array}$$

- Le groupe fondamental de la fibre est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ ($n - 1$ fois).
- Le groupe fondamental de la base est le groupe des tresses colorées à $n - 1$ brins, I_{n-1} .
- on a une subsection donnée par :

$$z_n = \frac{z_1 + \dots + z_{n-1}}{n-1} + 2 \max_{1 \leq i, j \leq n-1} |z_i - z_j| + 1$$

Etape 1

On étudie ensuite la suite spectrale de Leray associée à la fibration.

- La suite dégénère en $E_2^{*,*}$.
- Le groupe I_n agit trivialement sur le H^1 du plan moins $n - 1$ points.
- On a (ces deux groupes sont sans torsion) :
 $E_2^{*,*} = H^*(\mathbb{C}_0^{n-1}) \otimes H^*(\mathbb{C} \setminus \{y_1, \dots, y_{n-1}\})$ où les y_i sont $n - 1$ points arbitraires dans le plan.
- On construit une base additive de $H^*(\mathbb{C}_0^n)$. Comme $H^q(\mathbb{C} \setminus \{y_1, \dots, y_k\}) = 0$ si $q \neq 0, 1$ le calcul est assez simple et l'on trouve :

$$H^m(\mathbb{C}_0^n) \simeq H^m(\mathbb{C}_0^{n-1}) \oplus H^{m-1}(\mathbb{C}_0^{n-1}) \otimes H^1(\mathbb{C} \setminus \{y_1, \dots, y_{n-1}\})$$

- Comme $\mathbb{C}_0^1 = \mathbb{C}$, une base additive de $H^*(\mathbb{C}_0^n)$ est alors donnée par les produits :

$$\omega_{k_1, l_1} \omega_{k_2, l_2} \dots \omega_{k_p, l_p} \quad \text{avec } k_s < l_s, l_1 < \dots < l_p, 1 \leq k_s, l_s \leq n \quad (11)$$

- Les symboles $\omega_{k,l}$ représentent les classes des différentielles $\frac{1}{2i\pi} \frac{dz_k - dz_l}{z_k - z_l}$ quand on calcule la cohomologie par les différentielles logarithmiques.

Etape 2

On construit un isomorphisme $\varphi : A_n \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$. Un calcul direct montre que les formes différentielles vérifient la relation 1. Donc les classes de cohomologie vérifient aussi cette relation (voir corollaire 3.1) et l'on a un homomorphisme d'anneau $\varphi : A_n \rightarrow H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$ en associant à un générateur $\omega_{k,l}$ la forme différentielle définie par la formule 2.

On vérifie ensuite que ce morphisme est bijectif. Il est surjectif car tout élément de la base donnée plus haut admet un antécédent. Arnol'd utilise ensuite le fait suivant :

Lemme

L'anneau A_n est additivement engendré par les produits de la forme 11

En effet l'anticommutativité de A_n et le fait que $\omega_{k,l} = \omega_{l,k}$ permet d'écrire tout élément de A_n comme combinaison linéaire de produits de la forme $\omega_{k_1,l_1} \omega_{k_2,l_2} \dots \omega_{k_p,l_p}$ avec $k_s < l_s$, $l_s \leq l_{s+1}$. La relation 1 permet d'obtenir une égalité stricte. On se donne $k_1, k_2 < l$ et par exemple $k_1 < k_2$, alors :

$$\omega_{k_1,l} \omega_{k_2,l} = \omega_{k_1,k_2} \omega_{k_2,l} - \omega_{k_1,k_2} \omega_{k_1,l}$$

Revenons au morphisme φ . Si un élément x est dans le noyau, on l'écrit comme combinaison linéaire des produits 11. Son image, nulle, est une combinaison linéaire d'éléments indépendants (cf. plus haut) et tous les coefficients sont nuls. x est donc nul dans A_n . On a donc $\ker \varphi = 0$ et φ est un isomorphisme.

Remarque

On a au passage démontré que les différentielles logarithmiques (et non leurs classes de cohomologie) donnent directement la cohomologie de l'espace.

Preuve de 4.1

Sans restreindre la généralité, par un changement de variable affine on peut supposer que D' est donné par $0 = y_1 = \dots = y_i$ dans les nouvelles coordonnées y_1, \dots, y_n :

1 on pose :

$$\begin{aligned} y_s &= x_s - x_{s+1} && \text{pour } 1 \leq s \leq i \\ y_s &= x_s && \text{sinon.} \end{aligned}$$

x_i est ici "normalisé", c'est à dire égal à $[X'_i, 1]$ ou $[1; 0]$ suivant que $x_i \neq \infty$ ou $x_i = \infty$.

1 si $\varepsilon \neq \infty$, on pose :

$$\begin{aligned} y_s &= x_s - \varepsilon && \text{pour } 1 \leq s \leq i \\ y_s &= x_s && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si $\varepsilon = \infty$, comme $x_i = [X_i, Y_i]$, cela signifie que D' est donné par :

$$\begin{aligned} y_s &= [1; Y'_s] - [1; 0] && \text{pour } 1 \leq s \leq i \\ y_s &= [1, Y'_s] && \text{sinon} \end{aligned}$$

sur l'ouvert $X_s \neq 0 \quad \forall s$.

Admettons provisoirement le lemme suivant (voir plus loin pour une démonstration).

Lemme

Localement au voisinage de D' , $p_*(\omega)$ est donné par :

On suppose que l'ordre k de ω le long de D' est $< i = \text{codim}(D')$.

Par hypothèse, localement $p_*(\omega)$ est donnée par :

$$\frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dy_2}{y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dy_k}{y_k} \wedge f(y_1, \dots, y_n) dy_{k+1} \wedge \dots \wedge dy_n \quad \text{avec } k < i$$

et f holomorphe (localement au tour de D').

Si D' est un hyperplan, $p_*(\omega)$ est holomorphe au voisinage de D' et donc ω est holomorphe au voisinage de D , D n'est donc pas dans le diviseur des pôles de ω . On suppose donc que $i \geq 2$. D est la préimage de D' par un certain nombre d'éclatements. On suppose que pour savoir ce qui se passe dans $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ il suffit de regarder quand on éclate le long de D' . Ceci est assuré par le lemme 6.4 (voir un peu plus loin). En éclatant le long de D' on utilise les variables $y_1, y_1 X_2, \dots, y_1 X_i, y_{i+1}, \dots, y_n$.

Sur l'éclaté ω est donné par :

$$\omega = \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_k}{X_k} \wedge f(y_1, y_1 X_2, \dots, y_1 X_i, y_{i+1}, \dots, y_n) y_1^{i-k} \frac{dX_{k+1}}{X_{k+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_n}{X_n} \wedge dy_{i+1} \wedge \dots \wedge dy_n$$

D est donné par $y_1 = 0$ donc w a un zéro d'ordre $i - k - 1 \geq 0$, D n'est donc pas dans le diviseur des pôles de ω .

Le cas $k \geq i$

se traite exactement de la même façon sauf qu'on trouve un pôle d'ordre 1 :

$$\omega = \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_i}{X_i} \wedge \frac{dy_{i+1}}{y_{i+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dy_k}{y_k} \wedge f(y_1, y_1 X_2, \dots, y_1 X_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \wedge dy_{k+1} \wedge \dots \wedge dy_n$$

Il reste à montrer que faire un éclatement suffit. C'est l'objet du lemme suivant dont la démonstration donne les calculs de façon explicite.

Le contexte et les notations :

Soit $Z_1 \subset \dots \subset Z_k \subset Z_{k+1} \subset \dots \subset Z_n \subset X$, X est une variété de dimension N , les Z_i sont des sous-variétés données par des équations affines. On note

$\pi_1 : X_1 \rightarrow X$	l'éclatement de	X	le long de	Z_1
$\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$	"	X_1	"	$\pi_1^{-1}(Z_2)$
$\pi_3 : X_3 \rightarrow X_2$	"	X_2	"	$(\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(Z_3)$

...

On pose $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$, $\tilde{Z}_i = \pi^{-1}(Z_i)$. On note encore $\hat{\pi}_i$ l'éclatement $\hat{X}_i \rightarrow X$ le long de Z_i et $\hat{Z}_i = \hat{\pi}_i^{-1}(Z_i)$. On pose encore $d_i = \text{codim}(Z_i)$ et on suppose que Z_i est donné localement par $0 = z_1 = z_2 = \dots = z_{d_i}$ (z_1, \dots, z_N sont des coordonnées locales) et on a $d_1 > d_2 > \dots > d_n \geq 2$

Enfin on se donne une différentielle :

$$\omega = \frac{dz_{a_1}}{z_{a_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{a_s}}{z_{a_s}} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_{a_1}} \wedge \dots \wedge dz_i \wedge \dots \wedge \widehat{dz_{a_s}} \wedge \dots \wedge dz_N$$

avec f holomorphe au voisinage de Z_k .

Lemme

L'ordre du pôle, si pôle il y a, de $\pi^(\omega)$ le long de \widetilde{Z}_k est le même que celui de $\widehat{\pi}^*(\omega)$ le long de \widehat{Z}_k . Si l'une des deux différentielles n'a pas de pôle, l'autre non plus et les ordres des zéros sont égaux.*

preuve 1

preuve 2

Démonstration

Calcul de l'ordre du pôle ou du zéro de $\widehat{\pi}^*(\omega)$ le long de \widehat{Z}_i .

Quitte à réordonner les variables, Z_k est donné par $0 = z_1 = \dots = z_{d_k}$ et $\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N$ (f holomorphe au voisinage de Z_k). On a

$$\widehat{X}_k \subset X \times \mathbb{P}^{i-1} \quad \text{donné par } X_i z_j = X_j z_i$$

On se place par exemple sur l'ouvert affine $X_1 = 1$ (les calculs sont similaires sur les ouverts affines $X_j = 1$). Les nouvelles coordonnées sont donc :

$z_1, X_2, \dots, X_{d_k}, z_{d_k+1}, \dots, z_N$.

si $s = d_k$

$$\widehat{\pi}^*(\omega) = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_k}}{X_{d_k}} \wedge f(z_1, z_1 X_2, \dots, z_1 X_{d_k}, z_{d_k+1}, \dots, z_N) dz_{d_k+1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

On trouve un pôle d'ordre 1 le long de $\widehat{\pi}^{-1}(Z_k)$ qui est donné par $z_1 = 0$.

si $s > d_k$

$$\widehat{\pi}^*(\omega) = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_k}}{X_{d_k}} \wedge \frac{dz_{d_k+1}}{z_{d_k+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, z_1 X_2, \dots, z_1 X_{d_k}, \dots, dz_{s+1})$$

On trouve un pôle d'ordre 1 le long de $\widehat{\pi}^{-1}(Z_k)$.

Calcul de l'ordre du pôle ou du zéro de $\pi^*(\omega)$ le long de \widetilde{Z}_k

On commence par regarder les éclatements π_α pour $\alpha < k$.

Le cas $\alpha = 1$.

Z_1 est donné par $z_1 = \dots z_{d_1} = 0$. On se place, cette fois, dans l'ouvert affine de l'éclatement $X_{d_1} = 1$ et on a comme nouvelles variables $X_1, \dots, X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N$ (les calculs sont "plus lisibles").

$\pi_1^{-1}(Z_j)$ est donné par :

$$\pi_1^{-1}(Z_j) : X_1 = \dots = X_{d_j} = 0 \quad \text{pour } j > 1.$$

si $s < d_k$ alors on peut supposer que

$$\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N \text{ avec } s < d_k < d_1. \text{ On a alors :}$$

$$\widehat{\pi}^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} f(z_{d_1} X_1, \dots, z_{d_1} X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N) dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge \dots \wedge dz_N$$

Relativement à Z_k et $\pi_1^{-1}(Z_k)$ la situation n'a pas changé.

On peut donc itérer l'opération pour π_2, \dots, π_{k-1} .

si $s = d_k$ Ce cas se traite exactement comme le précédent.

si $s > d_k$ Dans ce cas il faut raffiner un peu les calculs car ω s'écrit

$$\frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{d_k}}{z_{d_k}} \wedge \frac{dz_{d_k+1}}{z_{d_k+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_s}{z_s} \wedge f(z_1, \dots, z_N) dz_{s+1} \wedge \dots \wedge dz_N.$$

Si $d_1 > s$. Les calculs sont cependant les mêmes que

On est ramené à la situation suivante : $k = 1$.

si $s = d_1$ Dans l'ouvert affine $X_{d_1} = 1$ on a :

$$\pi_1^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{d_1}}{z_{d_1}} \wedge f(X_1 z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, z_{d_1+1}, \dots, z_N) dz_{d_1+1} \wedge \dots$$

preuve 1

preuve 2

$\pi_1^{-1}(Z_2)$ est donné par $X_1 = \dots = X_{d_2} = 0$. On éclate le long de $\pi_1^{-1}(Z_2)$ et on se place dans l'ouvert $Y_{d_2} = 1$ avec les variables $X_{d_2}, Y_1, \dots, Y_{d_2-1}, X_{d_2+1}, \dots, X_{d_1-1}, z_{d_1}, \dots, z_N$. On a alors ($d_2 < d_1$) :

$$\pi_2^* \pi_1^*(\omega) = \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dY_{d_2-1}}{Y_{d_2-1}} \wedge \frac{dX_{d_2}}{X_{d_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_{d_1-1}}{X_{d_1-1}} \wedge \frac{dz_{d_1}}{z_{d_1}} \wedge f(Y_1 X_{d_2} z_{d_1}, \dots, Y_{d_2-1} X_{d_2} z_{d_1}, X_{d_2} z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, dz_{d_1+1} \wedge \dots \wedge dz_N)$$

Comme $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$ la situation n'a pas bougé. On recommence avec $\alpha = 3$ et $d_3 < d_2$. On trouve au final un pôle d'ordre 1 le long de \widetilde{Z}_1 .

si $s > d_1$ Ce cas se traite comme le précédent et l'on trouve aussi un pôle d'ordre 1 le long de \widetilde{Z}_1

si $s < d_1$ On a :

$$\pi_1^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dX_2}{X_2} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} f(X_1 z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_N$$

On doit ici distinguer deux cas :

$$s \geq d_2$$

On trouve alors en éclatant le long de $\pi_1^{-1}(Z_2) : X_1 = \dots = X_{d_2}$ et en regardant dans l'ouvert $Y_{d_2} = 1$:

$$\pi_2^* \pi_1^*(\omega) = \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \frac{dY_2}{Y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dY_{d_2-1}}{Y_{d_2-1}} \wedge \frac{dX_{d_2}}{X_{d_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_s}{X_s} \wedge z_{d_1}^{d_1-s-1} \\ f(Y_1 X_{d_2} z_{d_1}, \dots, Y_{d_2-1} X_{d_2} z_{d_1}, X_{d_2} z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) \\ dX_{s+1} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N$$

Comme $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$ on voit que l'ordre du zéro est resté constant égal à $d_1 - s - 1$.

On doit ici distinguer deux cas :

$$s < d_2$$

Le même calcul que précédemment donne cette fois :

$$\begin{aligned} \pi_2^* \pi_1^*(\omega) &= \frac{dY_1}{Y_1} \wedge \frac{dY_2}{Y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dY_s}{Y_s} \wedge X_{d_2}^{d_2-s-1} z_{d_1}^{d_1-s-1} \\ &\quad f(Y_1 X_{d_2} z_{d_1}, \dots, Y_{d_2-1} X_{d_2} z_{d_1}, X_{d_2} z_{d_1}, \dots, X_{d_1-1} z_{d_1}, z_{d_1}, \dots, z_N) \\ &\quad dY_{s+1} \wedge \dots \wedge dY_{d_2-1} \wedge dX_{d_2} \wedge \dots \wedge dX_{d_1-1} \wedge dz_{d_1} \wedge dz_N \end{aligned}$$

Comme $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$ est donné par $z_{d_1} = 0$, on voit que l'ordre du zéro est resté constant égal à $d_1 - s - 1$.

Dans les deux cas la situation n'a pas changé relativement à $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(Z_1)$.

Les éclatements successifs pour $i \geq 3$ ne changeront en rien l'ordre du zéro le long de l'image réciproque de Z_1 . D'où le lemme.

Démonstration du lemme 6.3

Soit $\omega \in \Omega_{\log}^n(\partial\mathcal{M}_{0,n+3})$. Soit D une composante irréductible du bord dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$. D s'envoie (par p) dans $(\mathbb{P}^1)^n$ sur D' . On va montrer qu'au voisinage de D' , $p_*(\omega)$ s'écrit :

$$p_*(\omega) = \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dy_2}{y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dy_k}{y_k} \wedge f(y_1, \dots, y_n) dy_{k+1} \wedge \dots \wedge dy_n$$

où les y_i sont des coordonnées locales définissant D' par $y_1 = \dots = y_{\text{codim}(D')} = 0$ et f est holomorphe au voisinage de D' . On pose $i = \text{codim}(D')$. On est dans la situation suivante :

$$Z_1 \subset \dots \subset Z_{n-i+1} = D' \subset \dots \subset Z_n$$

avec $\text{codim}(Z_j) = n - j + 1$, les Z_j étant donnés par des équations affines. Sans restreindre la généralité on peut supposer que :

$$Z_j : y_1 = \dots = y_{n-j+1} = 0.$$

Avec ces notations, $p_*(\omega)$ s'écrit :

$$\varpi = p_*(\omega) = \frac{dy_1}{y_1^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dy_n}{y_n^{\alpha_n}} f(y_1, \dots, y_n) \quad f \text{ holomorphe au voisinage de } D'$$

Démonstration du lemme 6.3

On veut montrer que $\alpha_j \leq 1 \quad \forall j$. Raisonnons par l'absurde. Soit k tel que $\alpha_k \geq 2$. On va montrer que ω n'est pas une forme différentielle logarithmique. On reprend les notations précédentes pour la suite d'éclatements nécessaire pour remonter dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$. On va montrer que ω a un pôle d'ordre supérieur à 2. Après les éclatements π_1, \dots, π_{n-k} , on a, en gardant toujours la variable avec l'indice le plus grand, et en renommant les variables :

$$(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k})^*(\omega) = \frac{dX_1}{X_1^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dX_k}{X_k^{\alpha_k}} \wedge \underbrace{g(z_{k+1}, \dots, z_n)}_{\text{méromorphe}} \underbrace{f'(X_1, \dots, X_k, z_{k+1}, \dots, z_n)}_{\text{holomorphe}} dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_n.$$

On fait maintenant l'éclatement le long de $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k})^{-1}(Z_{n-k+1})$ qui est donné par l'équation $X_1 = \dots = X_k = 0$. On se place dans l'ouvert U défini par $Y_1 = 1$ avec les coordonnées $X_1, Y_2, \dots, Y_k, z_{k+1}, \dots, z_n$.

Démonstration du lemme 6.3

On obtient alors :

$$(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k+1})^*(\varpi) = \frac{dX_1}{X_1^{\beta_1}} \wedge \frac{dY_2}{Y_2^{\alpha_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dY_k}{Y_k^{\alpha_k}} \wedge \underbrace{g(z_{k+1}, \dots, z_n)}_{\text{méromorphe}} \underbrace{f'(X_1, Y_2 X_1 \dots X_k X_1, z_{k+1})}_{\text{holomorphe}} dz_{k+1} \wedge \dots$$

preuve 1
preuve 2

avec $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 + \dots + \alpha_k - 1$.

On considère alors l'ouvert $V = U \setminus (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{n-k})^{-1}(Z_n)$. Cet ouvert ne sera pas "touché" par les éclatements suivants. Soit W l'image de V dans $\mathcal{M}_{0,n+3}$. L'hyperplan $Y_k = 0$ s'envoie dans $W \subset \mathcal{M}_{0,n+3}$ sur une sous-variété Z irréductible de codimension 1. ω admet alors un pôle d'ordre supérieur ou égal à deux le long de Z , ce qui est absurde.

Ceci termine la démonstration du théorème 4.1.

Preuve 4.2

Démonstration.

On a tout d'abord :

$$\omega = p_*(\Omega) = \frac{dx_n}{x_n - \varepsilon_n} \wedge \dots \wedge \frac{dx_1}{x_1 - \varepsilon_1} \quad \text{les } x_i \text{ sont les coordonnées sur } (\mathbb{P}^1)^n$$

On remarque tout d'abord que ω a un pôle d'ordre k le long des sous-variétés de la forme :

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = \infty.$$

Ces sous-variétés sont de codimension k . Les composantes irréductibles de $\overline{\partial\mathcal{M}_{0,n+3}}$ qui leurs correspondent sont donc (d'après le théorème 4.1) dans le diviseur des singularités de $\Omega(\varepsilon)$.

Ce sont justement toutes les 2-partitions de type ∞ respectant ε .

Soit $D = z_{i_1} \dots z_{i_k} 0 | \sigma 1 \infty$ une partition de type 0 respectant ε ($\sigma \cup \{z_{i_1}, \dots, z_{i_k}\} = \{z_1, \dots, z_n\}$). L'image D' de D par p est définie par $x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0$ et est de codimension k . Comme

$\varepsilon_j = 0 \quad \forall j \in \{i_1, \dots, i_k\}$, ω s'écrit :

$$\omega = \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{i_k}}{x_{i_k}} \wedge f(x_1, \dots, x_n)$$