

Géométrie des relations de double mélange

Ismaël Soudères

Université Paris Diderot - Paris 7
Institut de Mathématiques de Jussieu

Séminaire Claude Chevalley
25 mars 2010

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

- 1 Introduction
- 2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
- 3 Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
- 4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
- 5 En cours de rédaction et projets

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Introduction

Valeurs zêta multiples

Définition des MZV

Pour tout p -uplet $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ d'entiers avec $k_1 \geq 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Introduction

Valeurs zêta multiples

Définition des MZV

Pour tout p -uplet $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ d'entiers avec $k_1 \geq 2$, la valeur zêta multiple (MZV) $\zeta(\mathbf{k})$ est définie par

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}.$$

Relations de doubles mélanges

Ces nombres réels satisfont deux familles de relations quadratiques, appelées double mélange ou shuffle et stuffle.

- Le stuffle ou mélange contractant vient de la représentation en termes de séries ci dessus,
- le shuffle ou mélange vient d'une représentation en termes d'intégrales des valeurs zêta multiples.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicités entre MZV

Géométrie et régularisation

Introduction

Motifs et MZVs

Motifs

On cherche à obtenir des objets motiviques qui ont le même comportement que les MZV (*valeurs zêta multiples motiviques*) car :

- On espère que des idées géométriques ainsi qu'une forte contrainte de structure permettront d'expliquer les propriétés des MZV.
- C'est avec la théorie des motifs qu'on obtient la borne supérieure de la conjecture de la dimension.

Motifs et espaces de modules de courbes [GM04]

D'une part $\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}$. et, il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut $\zeta(k_1, \dots, k_p)$:

$$\zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{fr.\mathcal{M}}(k_1, \dots, k_p) = [H^n(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}); [\omega_{\mathbf{k}}], [\Phi_n]].$$

on notera B^A pour $B \setminus (A \cap B)$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Introduction

Résultats et propriétés

Théorème ([Sou09])

Soit \mathbf{k}, \mathbf{l} deux uplets d'entiers de poids n et m avec $k_1, l_1 \geq 2$ alors

$$\zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{M}_{0,m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \text{ terme du shuffle}} \zeta_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma)$$

$$\text{et } \zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{M}_{0,m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \text{ terme du stuffle}} \zeta_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma)$$

- On parlera ici essentiellement du **stuffle**.

Étapes intermédiaires

- Obtenir une représentation intégrale du stuffle.
- Observer les similitudes de stuffle et shuffle sur $\mathcal{M}_{0,n+m+3}$. Problèmes pour passer aux motifs dans le cas du stuffle.
- Construire une famille de variétés X_n compatible aux symétries du stuffle et simple d'un point vue des motifs.
- Construire de nouvelles MZV motiviques.
- Conclure.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

- 1 Introduction
- 2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
 - Mélange contractant (stuffle) et séries
 - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
 - Produit stuffle et intégrales
- 3 Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
 - Espaces de modules de courbes et MZV
 - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
- 4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
 - Une stratégie d'évitement : exemples
 - Stratégie : cas général
 - Éclatements, construction de X_n et stratification
 - Le mélange contractant est motivique
- 5 En cours de rédaction et projets
 - En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
 - Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Mélange contractant (stuffle) et séries

Combinatoire du mélange contractant

Soit $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, k_p)$ ($\mathbf{k}_0 = (k_1, \dots, k_{p-1})$) et $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_0, l_q)$ ($\mathbf{l}_0 = (l_1, \dots, l_{q-1})$) deux uplets d'entiers.

Définition (Stuffle)

Le produit stuffle de \mathbf{k} et \mathbf{l} est défini de façon inductive par la formule

$$(\mathbf{k}) * (\mathbf{l}) = (\mathbf{k} * \mathbf{l}_0) \cdot l_q + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}) \cdot k_p + (\mathbf{k}_0 * \mathbf{l}_0) \cdot (k_p + l_q) \quad (1)$$

et $\mathbf{k} * () = () * \mathbf{k} = \mathbf{k}$.

On écrira $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ pour désigner un élément σ de la somme formelle $\mathbf{k} * \mathbf{l}$.

Exemple

$$(n) * (m) = (n, m) + (m, n) + (n + m)$$

$$(u) * (v, w) = (u, v, w) + (v, u, w) + (v, w, u) + (u + v, w) + (v, u + w).$$

Mélange contractant (stuffle) et séries

Stuffle et valeurs zêta multiple

Proposition (Relations de stuffle)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets d'entiers avec $k_1, l_1 \geq 2$. On a alors l'égalité

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) &= \left(\sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}} \right) \left(\sum_{m_1 > \dots > m_q > 0} \frac{1}{m_1^{l_1} \cdots m_q^{l_q}} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta(\sigma).\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\zeta(k)\zeta(l) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k m^l} = \sum_{n > m > 0} \frac{1}{n^k m^l} + \sum_{m > n > 0} \frac{1}{m^l n^k} + \sum_{n=m} \frac{1}{n^{k+l}} \\ &= \zeta(k, l) + \zeta(l, k) + \zeta(k + l).\end{aligned}$$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

MZV et intégrales simpliciales

À un p -uplet \mathbf{k} , de poids $n = k_1 + \dots + k_p$, on associe le n -uplet

$$\bar{\mathbf{k}} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_1-1 \text{ fois}}, 1, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_p-1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1).$$

En posant $\Delta_n = \{0 < t_1 < \dots < t_n < 1\}$, on a

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \underbrace{(-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}}_{=\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\bar{\mathbf{k}}}}.$$

Exemple

On a

$$\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}, \quad \zeta(2,2) = \int_{\Delta_4} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_3}{1-t_3} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1},$$

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

Le changement de variables

$$t_n = x_1, t_{n-1} = x_1 x_2, \dots, t_1 = x_1 \dots x_n, \quad (2)$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1 - x_1 x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1 - x_1 x_2},$$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

MZV comme intégrale sur un cube

Le changement de variables

$$t_n = x_1, t_{n-1} = x_1 x_2, \dots, t_1 = x_1 \dots x_n, \quad (2)$$

correspondant à une suite d'éclatements à l'origine, donne pour $n = 2$

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1 - x_1 x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1 - x_1 x_2},$$

et pour $n = 4$

$$\zeta(4) = \int_{[0,1]^4} \frac{d^4 x}{1 - x_1 x_2 x_3 x_4} \quad \zeta(2, 2) = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1 x_2 d^4 x}{(1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_2 x_3 x_4)}.$$

On a aussi

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{1 - x_1 x_2} \frac{1}{1 - x_3 x_4} d^4 x.$$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$

$\zeta(2)\zeta(2)$ par les intégrales

Pour toute variable α et β on a l'égalité

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} + \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\beta\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha\beta}. \quad (3)$$

En posant $\alpha = x_1x_2$ et $\beta = x_3x_4$ dans (3), on retrouve la relation de stuffle

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \left(\frac{x_1x_2}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)} + \frac{x_3x_4}{(1-x_3x_4)(1-x_3x_4x_1x_2)} + \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4} \right) d^4x$$

c'est à dire,

$$\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(2,2) + \zeta(2,2) + \zeta(4).$$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k}_0, k_p)$ un p -uplet d'entiers et $n = k_1 + \dots + k_p$.

Définition

On définit la fonction f_{k_1, \dots, k_p} de n variables sur $[0, 1]^n$ comme

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1, \dots, k_{p-1}}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}} \quad (4)$$

avec $\mathbf{x}_0 = ((x_1, \dots, x_{n-k_p}))$, $\prod \mathbf{x}_0 = \prod_{i=1}^{n-k_p} x_i$, $\prod \mathbf{x} = \prod_{i=1}^n x_i$.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et intégrales

MZV comme intégrale sur un cube : cas général

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k}_0, k_p)$ un p -uplet d'entiers et $n = k_1 + \dots + k_p$.

Définition

On définit la fonction f_{k_1, \dots, k_p} de n variables sur $[0, 1]^n$ comme

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1, \dots, k_{p-1}}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}} \quad (4)$$

avec $\mathbf{x}_0 = ((x_1, \dots, x_{n-k_p}))$, $\prod \mathbf{x}_0 = \prod_{i=1}^{n-k_p} x_i$, $\prod \mathbf{x} = \prod_{i=1}^n x_i$.

Proposition

Pour tout p -uplet d'entiers (k_1, \dots, k_p) avec $k_1 \geq 2$, on a $(n = k_1 + \dots + k_p)$

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{[0,1]^n} f_{k_1, \dots, k_p}(x_1, \dots, x_n) d^n x.$$

Produit stuffle et intégrales

Représentation intégrale du Stuffle

Proposition (Décomposition de Cartier)

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets avec $n = k_1 + \dots + k_p$ et $m = l_1 + \dots + l_q$. On a alors

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}) \cdot f_{l_1, \dots, l_q}(\mathbf{x}') = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} f_{\sigma}(y_{\sigma}).$$

Idée

- On part de $f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{l}} = f_{\mathbf{k}_0} f_{\mathbf{l}_0} \prod \mathbf{x}_0 \prod \mathbf{x}'_0 \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}} \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'}$
- On applique (3) à $\frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}} \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'}$
- On réorganise pour remarquer que le produit $f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{l}}$ vérifie la même équation de récurrence que le produit stuffle.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

- 1 Introduction
- 2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
 - Mélange contractant (stuffle) et séries
 - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
 - Produit stuffle et intégrales
- 3 Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
 - Espaces de modules de courbes et MZV
 - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
- 4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
 - Une stratégie d'évitement : exemples
 - Stratégie : cas général
 - Éclatements, construction de X_n et stratification
 - Le mélange contractant est motivique
- 5 En cours de rédaction et projets
 - En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
 - Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ avec $k_1 \geq 2$, $n = k_1 + \dots + k_p$.

Objectifs

Il s'agit d'écrire

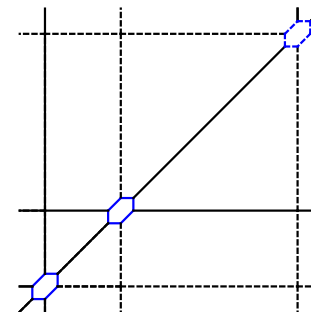
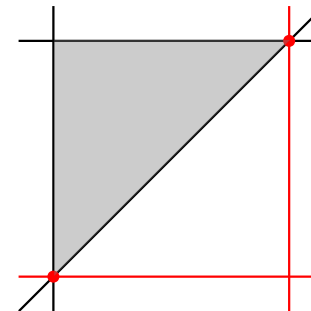
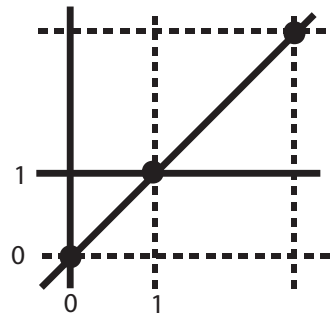
$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}}$$

où le lieu $A_{\mathbf{k}}$ des singularités de $\omega_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de Φ_n .

Ce n'est pas le cas dans la représentation

$$\zeta(2) = \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{1}{t_2} \frac{1}{1-t_1} dt_1 dt_2.$$

Par contre après éclatement de $(0, 0)$
 $(1, 1)$ (et (∞, ∞))



Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Définition

L'espace de modules de courbes de genre 0 avec n points marqués $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Définition

L'espace de modules de courbes de genre 0 avec n points marqués $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'ensemble des sphères de Riemann avec n points marqués modulo les isomorphismes de sphères de Riemann envoyant points marqués sur points marqués.

Concrètement

L'ensemble des isomorphismes de la sphère de Riemann est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ d'où

$$\mathcal{M}_{0,n+3} = \{(z_0, \dots, z_{n+2}), z_i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ tel que } z_i \neq z_j\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ étant tri-transitif, on peut choisir de fixer 3 des points (z_0, z_{n+1} et z_{n+2} par ex.) sur 0, 1 et ∞ :

$$\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^n \setminus \{\text{grande diagonale}\}.$$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicités entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

espaces $\mathcal{M}_{0,n+3}$ et éclatements

Exemples

- Pour $n = 1$ on a $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- Pour $n = 2$ on a $\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})^2 \setminus \{t_1 = t_2\}$.

Il existe une compactification $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ qui continue à être un espace de modules.

Théorème ([DM69],[Knu83])

$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est projectif, irréductible lisse. Le bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est un diviseur à croisements normaux.

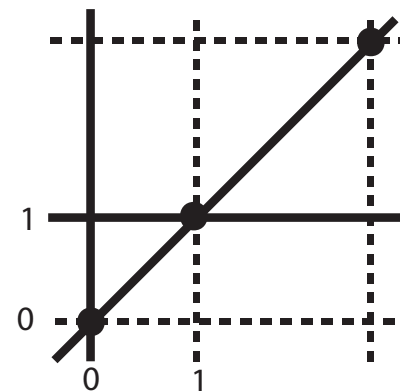


FIG.: $\mathcal{M}_{0,5}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^2$

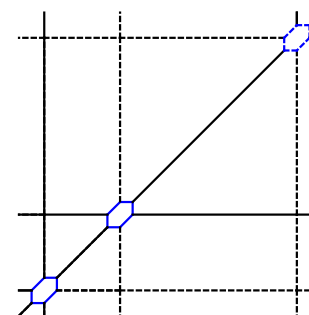


FIG.: $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(\mathbb{R})$

Double mélange, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules de courbes et MZV

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Notations générales sur $\mathcal{M}_{0,j+3}$

- On note t_i la coordonnée (simpliciale) telle que

$$t_i(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty) = z_i.$$

- L'ensemble des points réels $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_{0,j+3}$ n'est pas connexe.
- Une comp. connexe (cellule) de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ peut s'identifier à l'ordre (sur \mathbb{R}) dans lequel sont classés les points.
- On note $\beta_j : \mathcal{M}_{0,j+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^j$ l'application

$$(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty) \mapsto (z_1, \dots, z_j),$$

et $\Phi_j = \beta_j^{-1}(\Delta_j)$ la cellule ouverte (cellule standard) de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$ préimage de Δ_j par β_j
On a donc $(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty) \in \Phi_j$ ssi

$$0 < z_1 < \dots < z_j < 1 < \infty.$$

Espaces de modules de courbes et MZV

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Théorème ([GM04])

Soit \mathbf{k} un uplet d'entiers de poids n ($k_1 \geq 2$). On a

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$$

avec $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$ et $\Phi_n = \beta_n^{-1}(\Delta_n)$.

De plus, le diviseur $A_{\mathbf{k}}$ des singularités de $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de Φ_n .

Espaces de modules de courbes et MZV

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicités entre MZV

Géométrie et régularisation

Théorème ([GM04])

Soit \mathbf{k} un uplet d'entiers de poids n ($k_1 \geq 2$). On a

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{\Phi_n} \widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$$

avec $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}})$ et $\Phi_n = \beta_n^{-1}(\Delta_n)$.

De plus, le diviseur $A_{\mathbf{k}}$ des singularités de $\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de Φ_n .

Théorème ([GM04])

Il existe un motif de Tate mixte encadré dont la période vaut

$\zeta(k_1, \dots, k_p)$:

$$\zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{fr.\mathcal{M}}(k_1, \dots, k_p) = [H^n(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}); [\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}}], [\Phi_n]]$$

où B_n est la clôture de Zariski du bord de Φ_n .

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Produit shuffle

Soit $\beta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \rightarrow \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ l'application définie par

$$(0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) \mapsto (0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty) \times (0, z_{n+1}, \dots, z_{n+m}, 1, \infty).$$

Proposition

Le produit de mélange shuffle peut être déduit du changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \widetilde{\omega}_{\mathbf{k}} \wedge \widetilde{\omega}_{\mathbf{l}} = \int_{\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \beta^*(\widetilde{\omega}_{\mathbf{k}} \wedge \widetilde{\omega}_{\mathbf{l}}).$$

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Produit stuffle

Coordonnées cubiques

Les coordonnées cubiques sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3}$ sont définies par

$$u_1 = t_r, u_1 u_2 = t_{r-1}, \dots, u_1 \cdots u_r = t_1.$$

Soit $\delta : \mathcal{M}_{0,n+m+3} \rightarrow \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3}$ l'application définie par :

$$(0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) \longmapsto (0, z_{m+1}, \dots, z_{m+n}, 1, \infty) \times (0, z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \infty).$$

Proposition

Le produit de mélange stuffle peut être déduit du changement de variables :

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}})$$

avec $\omega_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}(u_1, \dots, u_n) d^n u$ et $\omega_{\mathbf{l}} = f_{\mathbf{l}}(u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) d^m u$.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicitites entre MZV

Géométrie et régularisation

Applications d'oubli et double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Produit stuffle

Remarque

- La décomposition de Cartier ne reste pas (d'un point de vue algébrique) dans les espaces de module de courbes.
- En effet, des formes différentielles qui ne sont pas holomorphes à l'intérieur de l'espace de modules apparaissent.
- Par exemple dans la décomposition du produit $f_{2,1}(u_1, u_2, u_3)f_{2,1}(u_4, u_5, u_6)$ on trouve le terme

$$\frac{u_1 u_2 u_4 u_5 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6}{(1 - u_1 u_2 u_4 u_5)(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)}$$

qui n'est pas holomorphe sur $\mathcal{M}_{0,9}$ (mais holomorphe sur Φ_6).

- Il faut séparer le diviseur des singularités du bord du domaine d'intégration.
- Il faut pouvoir permuter les u_i (ou les x_i).

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

- 1 Introduction
- 2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
 - Mélange contractant (stuffle) et séries
 - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
 - Produit stuffle et intégrales
- 3 Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
 - Espaces de modules de courbes et MZV
 - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
- 4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
 - Une stratégie d'évitement : exemples
 - Stratégie : cas général
 - Éclatements, construction de X_n et stratification
 - Le mélange contractant est motivique
- 5 En cours de rédaction et projets
 - En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
 - Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Stratégie : le cas de $n = 3$

Description de la situation pour $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$

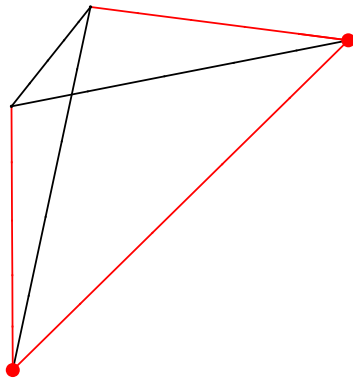


FIG.: \mathbb{A}^3

← éclatement de $(0,0,0)$
puis de $(0,0,z)$

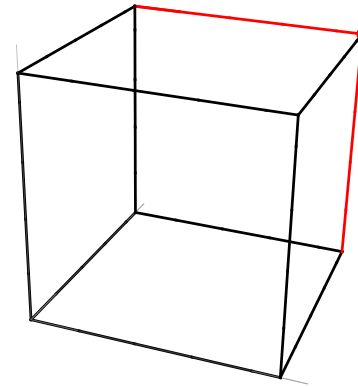


FIG.: vers $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$

Situation symétrique en les x_i

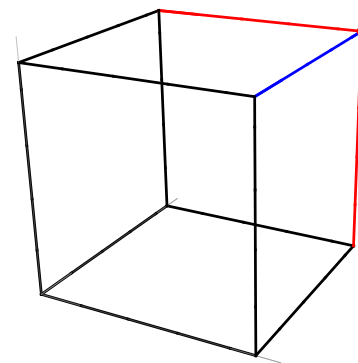


FIG.: vers X_3

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.

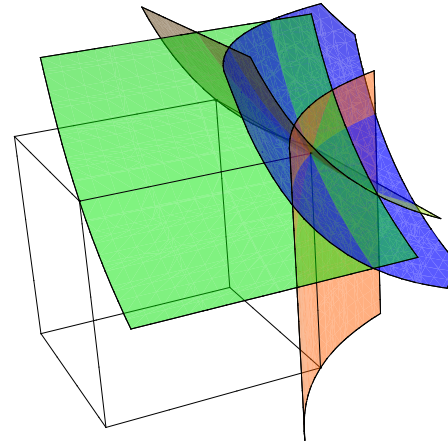


FIG.: \mathbb{A}^3

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Stratégie : le cas de $n = 3$

Dans notre situation on a

- les faces du cube,
- les diviseurs $x_i = 1$,
- les 3 diviseurs $1 - x_i x_j = 0$,
- le diviseur $1 - x_1 x_2 x_3 = 0$.

L'union de ces diviseurs n'est pas à croisements normaux.

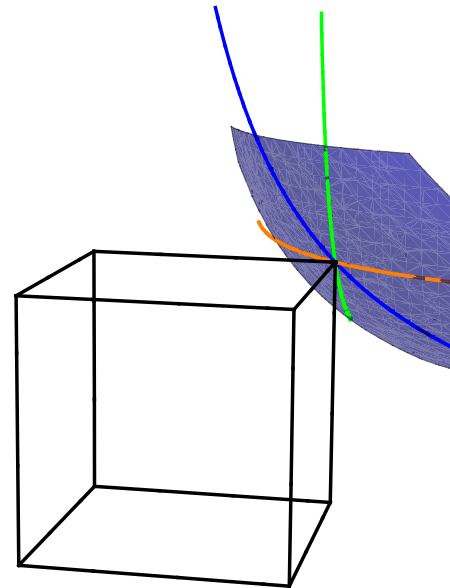
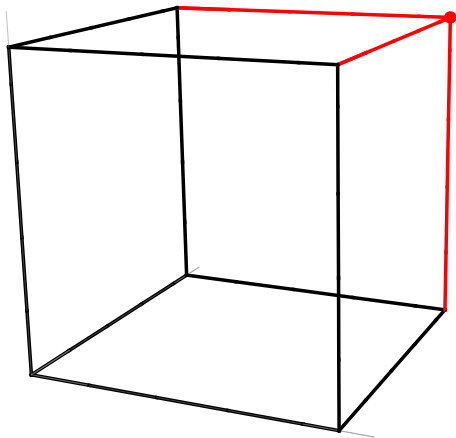


FIG.: \mathbb{A}^3

On doit donc éclater

- un point,
- 3 lignes,
- 3 courbes hyperboles.

Stratégie : cas général

Ce que l'on veut

On cherche à obtenir pour chaque uplet \mathbf{k} ($k_1 \geq 2$) et pour toute permutation s un *motif de Tate mixte encadré*

$$\left[H^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{k}}^s; \widehat{B}_n \setminus (\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s \cap \widehat{B}_n)); [\omega_{\mathbf{k},s}]; [\widehat{C}_n] \right]$$

on notera B^A pour $B \setminus (A \cap B)$

- X_n est une variété issue d'une suite d'éclatements
 $p_n : X_n \longrightarrow \mathbb{A}^n$.
- X_n admet une action du groupe symétrique correspondant « à la permutation des variables x_i . »
- $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s$ est le diviseur des singularités de $\omega_{\mathbf{k},s}$ pull-back sur X_n de $f_{\mathbf{k}}(x_s) d^n x$.
- \widehat{B}_n est la clôture de Zariski du bord de \widehat{C}_n préimage du cube $[0, 1]^n$.
- $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s$ n'intersecte pas le bord de \widehat{C}_n .
- $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s \cup \widehat{B}_n$ est un diviseur à croisements normaux (d.c.n).

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Stratégie : obtenir un motif de Tate mixte

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Considérons :

- \mathcal{M} une variété quasi-projective (dim. n , def. sur \mathbb{Q}).
- $D = A \cup B$ un diviseur à croisements normaux à composantes irréductibles lisses, A et B sans composantes irréductibles communes.
- \mathcal{M} ainsi que chaque composante irréductible de $A_i \cap B_j$ est une variété de Tate (leur motif est $\oplus_i \mathbb{Q}(m_i)[n_i]$).

Sous ces hypothèses, on a :

Théorème (Goncharov [Gon02])

On a un motif de Tate mixte

$$H^n(\mathcal{M} \setminus A; B \setminus (B \cap A))$$

dont la réalisation de Hodge est le groupe de cohomologie relative correspondant.

Stratégie : cas général

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Situation de départ

- On a les diviseurs suivants de \mathbb{A}^n :

$$\text{pour } I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \quad A_I : 1 - \prod_{i \in I} x_i = 0.$$

- Un ensemble de strates :

$$\mathcal{D} = \{ \text{comp. irr. de } A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_k} \text{ tel que } I_j \subset \llbracket 1; n \rrbracket \}$$

Étapes

- 1 Construire $p_n : X_n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ ainsi que \widehat{D}_n^1 d.c.n. au-dessus de $\cup A_I$.
- 2 Décrire les formes $\omega_{\mathbf{k},s} = p_n^*(f_{\mathbf{k}}(x_s) d^n x)$ et leurs comportements vis à vis de \widehat{C}_n .
- 3 Vérifier que X_n et les strates de \widehat{D}_n sont des variétés de Tate.
- 4 Obtenir un motif de Tate mixte encadré associé à $\zeta(\mathbf{k})$ et X_n .

Construction des espaces X_n

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicités entre MZV

Géométrie et régularisation

Théorème (Hu [Hu03])

Soit X_0 ouvert de X lisse avec $X \setminus X_0 = \cup_{i \in I} D_i$ tel que

- D_i fermée, lisse irréductible ;
- D_i et D_j se rencontrent proprement avec $D_i \cap D_j = \emptyset$ ou $\cup D_r$.

En posant $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$, il existe alors une suite d'éclatements

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X \rightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq k-1} X \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq 0} X \rightarrow X$$

telle que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ soit lisse et $(\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X) \setminus X_0 = \cup_{i \in I} \widetilde{D}_i$ soit un diviseur à croisements normaux ;

Il faut adapter le théorème au cadre des motifs de Tate mixtes.

Proposition ([Sou09])

Soit X et $\mathcal{D} = \cup D_i$ comme précédemment. Supposons de plus que X ainsi que tous les D_i sont des variétés de Tate.

Alors $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ ainsi que tous les intersections des \widetilde{D}_i sont des variétés de Tate.

Construction des espaces X_n

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Soit $n \geq 2$ un entier. On définit les diviseurs suivants dans \mathbb{A}^n :

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$ pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup_I A_I = \bigcup_i \{x_i = 1\} \cup \left(\bigcup_{I, |I| \geq 2} A_I \right)$

Lemme ([Sou09])

Soit I_1, \dots, I_k des sous ensemble des $\llbracket 1, n \rrbracket$. L'intersection $A_{I_1} \cap A_{I_2} \cap \dots \cap A_{I_k}$ est isomorphe à

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m^s \times \prod \{x^{e_i} = 1\}.$$

Construction des espaces X_n

Soit $n \geq 2$ un entier. On définit les diviseurs suivants dans \mathbb{A}^n :

- $A_I = \{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$ pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $I \neq \emptyset$
- $D_n^1 = \bigcup_I A_I = \bigcup_i \{x_i = 1\} \cup \left(\bigcup_{I, |I| \geq 2} A_I \right)$

Lemme ([Sou09])

Soit I_1, \dots, I_k des sous ensemble des $\llbracket 1, n \rrbracket$. L'intersection $A_{I_1} \cap A_{I_2} \cap \dots \cap A_{I_k}$ est isomorphe à

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m^s \times \prod \{x^{e_i} = 1\}.$$

Construction de X_n

La variété $X_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}^n$ est définie comme le résultat de l'application du théorème de Hu à la situation $X = \mathbb{A}^n$ et

$$\mathcal{D} = \{\text{comp. irr. de } A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_k} \text{ tel que } I_j \subset \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

En particulier $X_n \setminus \widehat{D}_n^1 \simeq \mathbb{A}^n \setminus D_n^1$ et \widehat{D}_n^1 est un d.c.n.

Propriétés des espaces X_n

Formes différentielles et domaine d'intégration

Proposition

Le diviseur

$$\widehat{A}_n = \widehat{D}_n^1 \setminus \{\text{préimage dans } X_n \text{ de l'union des } \{x_i = 1\}\}$$

n'intersecte pas le bord de \widehat{C}_n (préimage de $[0, 1]^n$) dans $X_n(\mathbb{R})$.

Proposition

Le diviseur des singularités \widehat{A}_k^s de

$$\omega_{\mathbf{k},s} = p_n^*(f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_s) d^n x).$$

est inclus dans \widehat{A}_n .

On a un énoncé similaire pour une forme du type $\omega_{\mathbf{k},s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l},s_2}$.

Lemme

Le diviseur $\widehat{D}_n = \widehat{B}_n^0 \cup \widehat{D}_n^1$ est un d.c.n. et munit X_n d'une stratification de Tate.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

MZV motiviques alternatives

Proposition ([Sou09])

Soit \mathcal{M} une variété (q.-p., lisse, dim. $n \geq 2$) et $D = A \cup B$ un d.c.n. à composantes irréductibles lisses avec A et B sans composantes irréductibles communes. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A, B^A)) &\simeq \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A)) \\ \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus A, B^A)) &\simeq \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}^n(\mathcal{M}, B)). \end{aligned}$$

Théorème ([Sou09])

Soit \mathbf{k} un uplet d'entiers avec $k_1 \geq 2$ et s une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors il existe un motif de Tate mixte encadré

$$\zeta_{X_n}^{fr., \mathcal{M}}(\mathbf{k}, s) = \left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{k}}^s; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s}); [\omega_{\mathbf{k}, s}]; [\widehat{C}_n] \right]$$

ayant pour période $\zeta(k_1, \dots, k_n)$.

On a, de même, un motif de Tate mixte encadré $\zeta_{X_{n+m}}^{fr., \mathcal{M}}(\mathbf{k}, s_1 | \mathbf{l}, s_2)$
($\leadsto \omega_{\mathbf{k}, s_1} \wedge \omega_{\mathbf{l}, s_2}$).

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}}$

Un léger souci

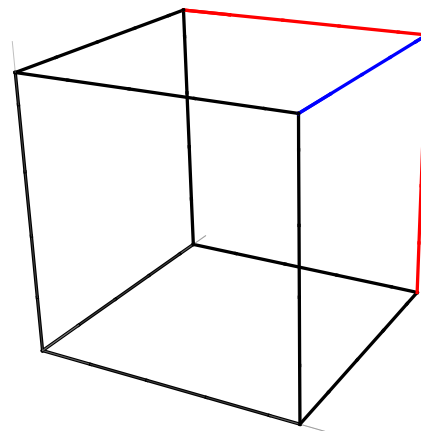
On ne peut pas obtenir le stuffle directement avec les espaces X_n car on ne sait pas relier $X_n \times X_m$ à X_{n+m} .

Lemme

Soit $r \geq 2$ un entier. On notera A_r une union particulière de composantes de $\overline{\partial \mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus B_r$. Il existe alors une suite de drapeaux $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$, d'éléments de \mathcal{D}_r^1 vérifiant les conditions nécessaires

$$X_r = \text{Bl}_{\mathcal{F}_N, \dots, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\alpha_r} \overline{\mathcal{M}_{0,r+3}} \setminus A_r = \text{Bl}_{\mathcal{F}_r, \dots, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\tilde{\delta}_r} \mathbb{A}^r.$$

La situation cubique (simplexe après deux éclatements) de départ est :



Double mélange, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

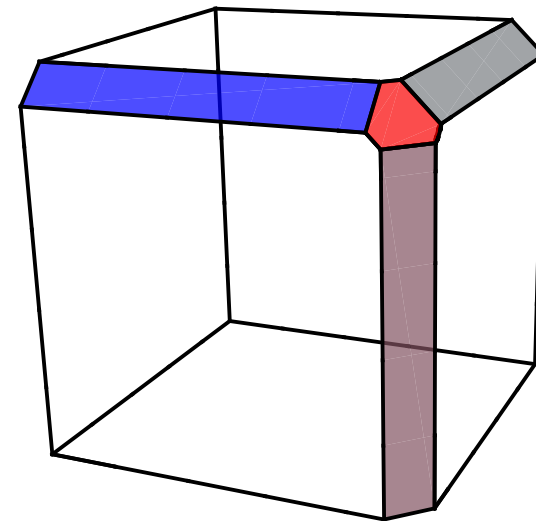
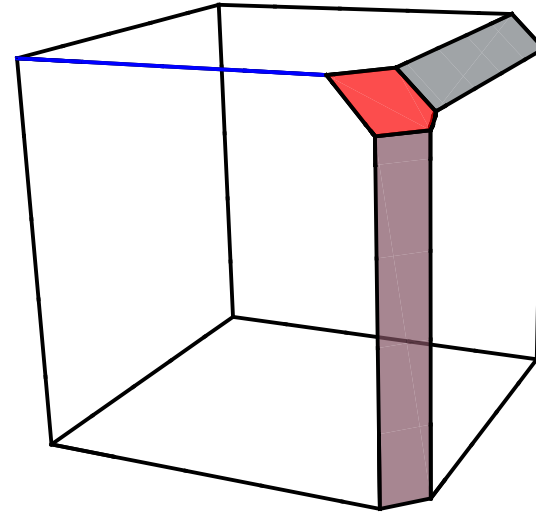
Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

En éclatant :

- le point $(1, 1, 1)$
- les droites $(1, 1, z)$ et $(x, 1, 1)$

on obtient $\overline{\mathcal{M}_{0,6}} \setminus A_3$.



Puis l'éclatement de la dernière ligne donne :

On éclate enfin le long des hyperboles (ce qui ne change pas le dessin).

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Comparaison avec $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$: les MZV motiviques

Proposition

Avec $r = n + m$ la proposition précédente donne :

- d'une part

$$\zeta_{X_{n+m}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id}) = \zeta_{\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k})$$

- et d'autre part

$$\zeta_{X_{n+m}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id} | \mathbf{l}, \text{id}) = \left[\mathbb{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, B_{n+m}^{A_{\mathbf{k},\mathbf{l}}} \right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

En particulier, pour tout $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, le motif encadré $\zeta_{\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma)$ associé à $\zeta(\sigma)$ sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}$ est égal à son avatar sur X_{n+m} , $\zeta_{X_{n+m}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma)$.

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Produit stuffle et motifs de Tate mixtes

Conclusion

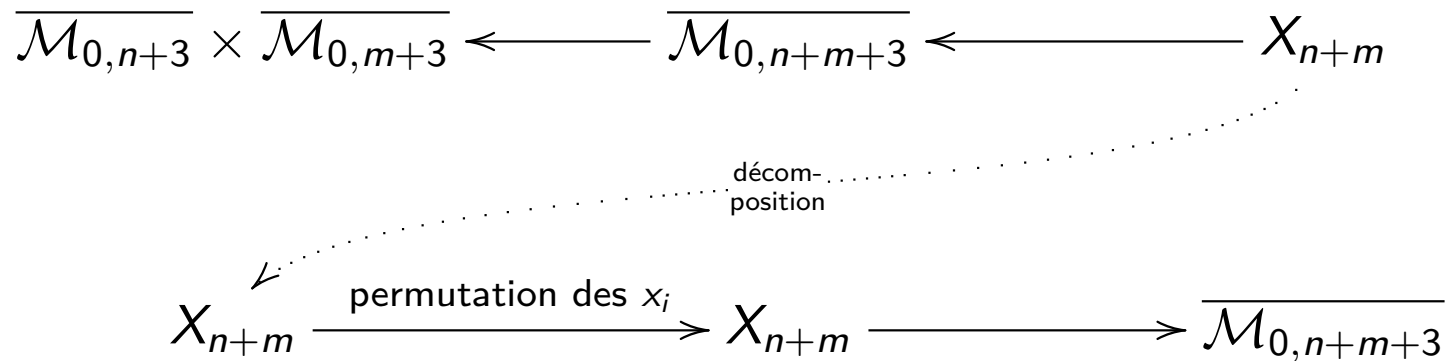
Théorème ([Sou09])

Soit \mathbf{k} et \mathbf{l} avec $k_1, l_1 \geq 2$ on a

$$\zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}) \zeta_{\mathcal{M}_{0,m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma).$$

idée

$$\zeta_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}) \zeta_{\mathcal{M}_{0,m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}|\mathbf{l}) = \zeta_{X_{n+m}}^{fr.\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id} | \mathbf{l}, \text{id})$$



$$\sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta_{X_{n+m}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, \mathbf{s}_\sigma) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta_{X_{n+m}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, \text{id}) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta_{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}^{fr.\mathcal{M}}(\sigma)$$

Double mélange, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

- 1 Introduction
- 2 Représentation intégrale du mélange contractant (stuffle)
 - Mélange contractant (stuffle) et séries
 - Produit stuffle et intégrales : $\zeta(2)\zeta(2)$
 - Produit stuffle et intégrales
- 3 Le point de vue des espaces de module de courbes en genre 0
 - Espaces de modules de courbes et MZV
 - Applications d'oubli et produits de mélanges sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
- 4 Mélange contractant et motifs de Goncharov-Manin
 - Une stratégie d'évitement : exemples
 - Stratégie : cas général
 - Éclatements, construction de X_n et stratification
 - Le mélange contractant est motivique
- 5 En cours de rédaction et projets
 - En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre valeurs zêta multiples
 - Projets : Géométrie de la régularisation stuffle des MVZs

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Double mélange, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Drinfel'd définit un élément Φ_{KZ} de $\mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ associé à une équation différentielle KZ.

Théorème ([Dri91])

L'élément Φ_{KZ} est « group-like » ($\Delta(\Phi) = \Phi \otimes \Phi$) et

$$\Phi_{KZ}(X_0, X_1)\Phi_{KZ}(X_1, X_0) = 1 \quad (\text{I})$$

$$e^{i\pi X_0}\Phi_{KZ}(X_\infty, X_0)e^{i\pi X_\infty}\Phi_{KZ}(X_1, X_\infty)e^{i\pi X_1}\Phi_{KZ}(X_0, X_1) = 1 \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{KZ}(X_{12}, X_{23}), \Phi_{KZ}(X_{34}, X_{45})\Phi_{KZ}(X_{51}, X_{12})\Phi_{KZ}(X_{23}, X_{34}) \\ \Phi_{KZ}(X_{45}, X_{51}) = 1 \quad (\text{III}) \end{aligned}$$

où (III) a lieu dans $U\mathfrak{B}_5 = \mathbb{C}\langle\langle X_{ij} \rangle\rangle_{1 \leq i, j \leq 5} / \mathcal{R}$.

Théorème ([LM96], [Fur03])

$$\Phi_{KZ}(X_0, X_1) = \sum_{W \in \{X_0, X_1\}^*} (-1)^{\text{wt}(W)} \zeta^{\text{III}}(W) W$$

où $\zeta^{\text{III}}(W)$ est une extension de la définition des MZV.

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Double mélange, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Les relations (I), (II) et (III) induisent des relations entre les coefficients de la série $\Phi_{kz}(X_0, X_1)$, c'est-à-dire entre les MZV $\zeta^{\text{III}}(W)$.

Proposition

La relation (I) est équivalente à la famille de relations :

$$\forall W \in \{X_0, X_1\}^*, \quad \sum_{U_1 U_2 = W} (-1)^{|U_2|} \zeta^{\text{III}}(U_1) \zeta^{\text{III}}(\theta(U_2)) = 0$$

où $\theta(X_0) = X_1$ et $\theta(X_1) = X_0$.

- On a de même une famille de relations explicites équivalente à (II).
- L'identification

$$U\mathcal{B}_5 \simeq \mathbb{C}\langle\langle X_{24}, X_{34}, X_{45} \rangle\rangle \rtimes \mathbb{C}\langle\langle X_{12}, X_{23} \rangle\rangle$$

donne une base, B_4 de $U\mathcal{B}_5$. Cette base est formée des monômes de la forme $U_{24,34,45} V_{12,23}$.

- Pour un mot W en les X_{ij} , on a donc $W = \sum_{b_4} l_{b_4, W} b_4$.

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Double mélange, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Théorème ([Sou10])

La relation (III) est équivalente à la famille de relations :

$$\forall b_4 \in B_4 \ (b_4 \neq 1) \quad \sum_{W \in \{X_{24}, X_{34}, X_{45}, X_{12}, X_{23}\}^*} I_{b_4, W} C_{\text{III}, W} = 0$$

où les coefficients $C_{\text{III}, W} = \sum \prod \zeta^{\text{III}}(U)$ sont explicites alors que les $I_{b_4, W}$ ne sont pas explicites.

On veut comprendre la « géométrie » de ces relations et obtenir une famille explicite de relations.

Définition (Construction Bar [Bro06])

Un élément $\omega \in B(\mathcal{M}_{0,5})$ est une somme finie

$$\sum_{(i,j)} c_{i,j} [\omega_{i_1 j_1} | \cdots | \omega_{i_k j_k}] \quad \text{avec } \omega_{ij} \in \Omega^1(\mathcal{M}_{0,5})$$

telle que pour tout chemin $\gamma \stackrel{\text{homo.}}{\sim} 0$ dans $\mathcal{M}_{0,5}$,

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{(i,j)} c_{i,j} \int_{\gamma} \omega_{i_1 j_1} \circ \cdots \circ \omega_{i_k j_k} = 0.$$

En cours de rédaction : Associateurs et relations explicites entre MZVs

Proposition

À tout mot $W \in \{X_{24}, X_{34}, X_{45}, X_{12}, X_{23}\}^*$ on associe le bar symbole $\omega_W = [\omega_{i_1 j_1} | \cdots | \omega_{i_k j_k}]$ où on a remplacé les X_{ij} par $|\omega_{ij}|$. On a alors :

$$\int_{\diamond} \omega_W = C_{\text{III}, W}$$

Où \diamond est le bord de la cellule standard Φ_5 sur $\mathcal{M}_{0,5}$.

Théorème ([Sou10])

La relation (III) est équivalente à la famille de relations entre MZV donnée par

$$\forall \omega \in B(\mathcal{M}_{0,5}) \quad \int_{\diamond} \omega = 0.$$

Question : Y-a-t-il une famille explicite de ω engendrant $B(\mathcal{M}_{0,5})$?

Double mélange, éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

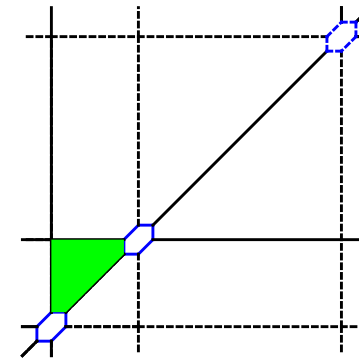
Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate mixtes

En cours de rédaction et projets

Associateurs et relations explicites entre MZV

Géométrie et régularisation



Projets : Géométrie de la régularisation shuffle

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Shuffle et intégrales

Shuffle et MZV

Shuffle et intégrales : ex.

Shuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Shuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Shuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Régularisation shuffle

Il existe une famille de réels $\zeta^{\text{III}}(W)$ telle que

$$\zeta^{\text{III}}(X_0) = \zeta^{\text{III}}(X_1) = 0,$$

- $\zeta^{\text{III}}(W) = \zeta(W)$ pour tout $W \in X_0\{X_0, X_1\}^*X_1$,
- $\zeta^{\text{III}}(V)\zeta^{\text{III}}(W) = \sum_{U \in \text{sh}(V,W)} \zeta^{\text{III}}(U)$ pour tout $V, W \in \{X_0, X_1\}^*$.

À W on associe ω_W en remplaçant X_0 par $\frac{dt}{t}$ et X_1 par $\frac{dt}{1-t}$. On a alors

$$\int_{\Delta_\varepsilon} \omega_W = P_W(\varepsilon, \log(\varepsilon)) \quad \text{avec } P_W \in \mathbb{C}[X, Y]$$

Théorème

Pour tout mot W en X_0 et X_1 le terme constant de P_W vaut $\zeta^{\text{III}}(W)$.

La régularisation *shuffle* est compatible avec la représentation intégrale du shuffle sur les MZV ordinaires :

$$\int_{\Delta_1} \omega_{W_1} \int_{\Delta_2} \omega_{W_2} = \int_{\Delta_1 \times \Delta_2} \omega_{W_1} \wedge \omega_{W_2} = \sum_{\sigma} \int_{\Delta_\sigma} \omega_{W_1} \wedge \omega_{W_2} = \sum_{\sigma} \int_{\Delta} \omega_{\sigma}.$$

Projets : Géométrie de la régularisation stuffle

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

La représentation intégrale du stuffle s'écrit avec des intégrales sur des cubes :

$$\int_{\square} f_{\mathbf{k}} \int_{\square} f_{\mathbf{l}} = \int_{\square} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{l}} = \int_{\square} \sum_{\sigma} f_{\sigma}.$$

Régularisation stuffle

Il existe une famille de réels $\zeta^*(\mathbf{k})$ avec $k_1 \geq 1$ telle que $\zeta^*(1) = 0$ et

- $\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$ pour tout \mathbf{k} avec $k_1 \geq 2$,
- $\zeta^*(\mathbf{k})\zeta^*(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta^*(\sigma)$ pour tout \mathbf{k} et \mathbf{l} ($k_i, l_j > 0$).

Question

A-t-on pour tout uplet \mathbf{k} ($k_1 \geq 1$)

$$\int_{\square_{\varepsilon}} f_{\mathbf{k}} = P_{\mathbf{k}}(\varepsilon, \log(\varepsilon)) \quad \text{avec } P \in \mathbb{C}[X, Y]$$

avec $\zeta^*(\mathbf{k}) =$ terme constant de $P_{\mathbf{k}}(\varepsilon, \log(\varepsilon))$?

Projets : Géométrie de la régularisation shuffle

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Les deux régularisations peuvent-elle s'interpréter à l'aide de la géométrie des $\mathcal{M}_{0,n}$?

Régularisation shuffle :

Peut-on déduire $\zeta^{\text{III}}(W)$ de

$$\int_{\Phi_{\text{III}, \varepsilon}} \omega_W ?$$

Est-ce compatible avec la famille d'application d'oubli β correspondant au shuffle ?

Régularisation stuffle :

Peut-on déduire $\zeta^*(\mathbf{k})$ de

$$\int_{\Phi_{*, \varepsilon}} f_{\mathbf{k}} ?$$

Est-ce compatible avec la famille d'application d'oubli δ correspondant au stuffle ?

Renormalisation

- C'est une technique introduite en physique afin d'attribuer une valeur finie (un sens physique) à des intégrales divergentes.
- Il s'agit de compenser pas à pas les différents types de divergences d'une intégrale.
- A. Connes et D. Kreimer ont formalisé cette opération dans le cadre des algèbres de Hopf [CK98].
- L. Guo et B. Zhang l'ont mise en oeuvre dans les cas des MZVs avec le point de vue des séries.

Projets : Géométrie de la régularisation stuffle

Double mélange,
éclatements et $\mathcal{M}_{0,n}$

I. Soudères

Introduction

Stuffle et intégrales

Stuffle et MZV

Stuffle et intégrales : ex.

Stuffle et intégrales

Double mélange et
 $\mathcal{M}_{0,n}$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,n}$

Double mélange sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Stuffle motivique

Stratégie

Stratégie : cas général

Construction de X_n

Stuffle et motifs de Tate
mixtes

En cours de rédaction
et projets

Associateurs et relations
explicites entre MZV

Géométrie et régularisation

Espaces de modules et renormalisation

On veut construire une algèbre de Hopf \mathcal{H}_F à partir des $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n})$ telle que

- le produit et le coproduit soient compatibles à une famille d'applications d'oubli F (celle du shuffle ou du stuffle) ;
- La régularisation (ζ^{III} ou ζ^*) découle d'une renormalisation sur \mathcal{H}_F .

Projets à long termes

- Faire le lien entre \mathcal{H}_F et le groupe fondamental motivique de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ de Deligne et Goncharov [DG05].
- Reprendre l'approche de Gangl, Goncharov et Levin sur les liens entre cycles algébriques et polylogarithmes mais en modifiant l'algèbre de Bloch et Kritz à l'aide des espaces de modules de courbes.
- Passer en genre 1, c'est à dire regarder les périodes elliptiques.



Francis Brown, *Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{R})$* , Ph.D. thesis, Université de Bordeaux, arXiv :mmath/0606419, 2006.



Alain Connes and Dirk Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1998), no. 1, 203–242. MR MR1660199 (99h :81137)



Pierre Deligne and Alexander B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.



Pierre Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1969), no. 36, 75–109.



V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , translation in Leningrad Math. J. **2** (1991), no. 4, 829–860.



Hidekazu Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), no. 4, 695–720.