

Complexe de cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$: Motifs de Tate mixtes et polylogarithmes multiples

Ismaël Soudères

Universität Duisburg - Essen
Fakultät für Mathematik

8 mars 2012

1 Introduction

- Définitions : DGA, onstruction bar et modèle 1-minimal
- Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz
- Cycles et motifs de Tate mixtes
- Idée géométrique

2 Premiers exemples

- Cycles et polylogarithmes
- Poids 3 : première correction pour $t = 1$
- Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

3 Combinatoire : crochets de Lyndon, arbres et différentielle

- Arbres et algèbre de Lie
- Arbres duaux des crochets de Lyndon
- Une autre différentielle sur les arbres

4 Des arbres aux cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

- Des arbres aux cycles : une première approche
- Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$
- Cycles admissibles pour " $t = 1$ "

5 Cycles et construction bar

- Cycles et constrcution bar

1 Introduction

- Définitions : DGA, onstruction bar et modèle 1-minimal
- Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz
- Cycles et motifs de Tate mixtes
- Idée géométrique

2 Premiers exemples

- Cycles et polylogarithmes
- Poids 3 : première correction pour $t = 1$
- Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

3 Combinatoire : crochets de Lyndon, arbres et différentielle

- Arbres et algèbre de Lie
- Arbres duaux des crochets de Lyndon
- Une autre différentielle sur les arbres

4 Des arbres aux cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

- Des arbres aux cycles : une première approche
- Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$
- Cycles admissibles pour " $t = 1$ "

5 Cycles et construction bar

- Cycles et construction bar

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de

Tate mixtes

Idée géométrique

Premiers
exemples

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Définitions : DGA, construction bar et modèle 1-minimal

Construction bar sur une algèbre différentielle graduée

Définition (DGA)

Soit $A = \bigoplus A^k$ une algèbre graduée et $d : A^k \rightarrow A^{k+1}$ une différentielle. Pour a dans A^k on note $|a| = k$ son degré. A est :

- *graduée commutative* si $a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a$
- *différentielle* si d satisfait la règle de Leibniz :

$$d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot d(b)$$

On suppose A augmentée et on note $A^+ = \ker(\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{Q})$.

Définition (Construction bar)

La construction bar sur A est : $B(A) = \bigoplus_n (A^+)^{\otimes n} \subset \bigoplus_n (A)^n$.

$B(A)$ admet une structure d'algèbre de Hopf différentielle graduée commutative $(\mathfrak{m}, D, \Delta)$.

Problème général

- Décrire les groupes de cohomologie d'une DGA (A, d) .

↪ On va remplacer A par une DGA plus simple à contrôler.

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de

Tate mixtes

Idée géométrique

Premiers
exemples

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Définitions : DGA, construction bar et modèle 1-minimal

Modèle 1-minimal

Définition (DGA génériquement nilpotente)

- Une **extension de Hirsch** de A est de la forme : $A \otimes \Lambda(V)$
où : $V = \mathbb{Q}.v$ tel que $dV \in (A^+)^2$ et v de degré k .
- Une DGA A est **génériquement nilpotente** si :
 - on a $\mathbb{Q} \subset A_1 \subset \dots \subset A_l \subset \dots$
 - $A = \bigcup A_l$
 - $A_l = A_{l-1} \otimes \Lambda(V_l)$ est une extension de Hirsch ;
 - en particulier $A = \Lambda(V)$.

Théorème (Sullivan)

Soit A une DGA cohomologiquement connexe.

Il existe une DGA génériquement nilpotente $M_A = \Lambda(V)$ et un morphisme

$$\varphi : M_A \longrightarrow A$$

induisant :

$$H^0(M_A) \simeq H^0(A), \quad H^1(M_A) \simeq H^1(A), \quad H^0(M_A) \hookrightarrow H^0(A).$$

On parle de **modèle 1-minimal**

Définitions : DGA, construction bar et modèle 1-minimal

Modèle 1-minimal

Remarque

Soit $A = \Lambda(V)$ génériquement nilpotente avec V en degré 1.

V admet alors une structure de coalgèbre de Lie :

$$V \xrightarrow{d} \Lambda^2(V) = V \wedge V$$

où $d^2 = 0$ est dual de l'identité de Jacobi.

Construction inductive du modèle 1-minimal

- 1 On pose : $V_1 = H^1(A)$ en degré 1 et $M_1 = \Lambda(V_1)$.
- 2 On pose : $V_{i+1} = \ker(H^2(M_i) \xrightarrow{\varphi_i} H^2(A))$ en degré 1 et $M_{i+1} = M_i \otimes \Lambda(V_{i+1})$.
- 3 On pose enfin $V = \cup V_i$ et $M = \cup M_i$.

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de

Tate mixtes

Idée géométrique

Premiers

exemples

Combinatoire

Des arbres aux

cycles

Cycles et
construction bar

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de

Tate mixtes

Idée géométrique

Premiers

exemples

Combinatoire

Des arbres aux

cycles

Cycles et
construction bar

Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz

Par la suite on note $X = \text{Spec}(\mathbb{Q})$ ou $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.
 Bloch et Kriz définissent une DGA à partir de groupes de cycles.

Le cube

- On note \square^n pour l'espace affine $(\mathbb{P}^1 \setminus \{1\})^n$
- les faces de \square^n sont données par $u_{i_1} = \dots = u_{i_l} = 0, \infty$.

Groupes de cycles

$Z^p(X, n)$ est le groupe libre

$$\mathbb{Z} \left\langle W \subset X \times \square^n \text{ tel que } \begin{cases} W \text{ fermé irréductible} \\ \text{codim}(W)=p \\ \text{codim}(W \cap X \times F)=p \text{ ou } W \cap X \times F=\emptyset \end{cases} \right\rangle$$

Opérations

- Différentielle $d : Z^p(X, n) \rightarrow Z^p(X, n-1)$ définie par intersection avec les faces $d = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\partial_0^i - \partial_\infty^i)$.
- Action de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et de \mathcal{S}_n sur \square^n . On note Alt_n le projecteur induit sur $Z^p(X, n)$.

Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz

Définition (\mathcal{N}_X^\bullet)

- Soit $\mathcal{N}_X^k(p)$ le groupe $Alt_{2p-k}(Z^p(X, 2p-k))$ placé en degré k .
 On obtient un complexe

$$\mathcal{N}_X^\bullet(p) : \dots \rightarrow \mathcal{N}_X^k(p) \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_X^{k+1}(p) \rightarrow \dots$$

- On pose $\mathcal{N}_X^\bullet = \bigoplus_p \mathcal{N}_X^\bullet(p)$.

Produit

On définit un produit :

$$\mathcal{N}_X^k(p) \times \mathcal{N}_X^l(q) \rightarrow \mathcal{N}_X^{k+l}(p+q)$$

par concaténation des coordonnées, pull-back par la diagonale et projection par $Alt_{2(p+q)-(k+l)}$:

$$X \times \square^{2p-k} \times X \times \square^{2q-l} \xrightarrow{\sim} X \times X \times \square^{2(p+q)-(k+l)} \leftarrow X \times \square^{2(p+q)-(k+l)}.$$

Proposition ([BK94])

\mathcal{N}_X^\bullet est une algèbre différentielle graduée. Ses groupes de cohomologie sont les groupes de Chow supérieurs de X .

Cycles et motifs de Tate mixtes

On note

- $MTM(X)$ la catégorie des motifs de Tate mixtes sur X
- \mathcal{X}_X l'algèbre de Hopf associée à la catégorie tannakienne $MTM(X)$.
- \mathcal{M}_X la coalgèbre de Lie correspondante.

Théorème ($X = \text{Spec}(\mathbb{Q})$: [BK94]; $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{3 \text{ pts}\}$: [Lev11])

Le 1 modèle minimal, $M_{\mathcal{N}_X}$ de \mathcal{N}_X est donné en degré 1 par les indécomposables de $H^0(B(\mathcal{N}_X))$:

$$M_{\mathcal{N}_X} \simeq \Lambda(H^0(B(\mathcal{N}_X))^+ / \text{produits}).$$

On a de plus les isomorphismes suivants :

$$\mathcal{X}_X \simeq H^0(B(\mathcal{N}_X)) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_X \simeq (H^0(B(\mathcal{N}_X))^+ / \text{produits}).$$

Remarque

Le H^0 de la construction bar sur \mathcal{N}_X redonne :

- Le modèle 1 minimal de \mathcal{N}_X .
- L'algèbre de Hopf des motifs de Tate mixtes sur X .

Cycles et motifs de Tate mixtes

Ici, $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Théorème ([Lev11])

On a de plus la suite exacte courte de coalgèbre de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{M}_{geom} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{M}_{geom} est (comme espace) la coalgèbre de Lie associée à $\widehat{\pi_1^{top}(X)}^{uni}$.

- $\pi_1^{top}(X)$ est libre à 2 générateurs.
- On a $\widehat{\pi_1^{top}(X)}^{uni} = \pi_1^{mot}(X)$, le groupe fondamental motivique défini par Deligne et Goncharov.

Question

Donner une base explicite de $\mathcal{M}_X = H^0(B(\mathcal{N}_X))^+ / \text{produits}$ (relativement à $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$) :

- à partir de cycles explicites dans $X \times \square^\bullet$,
- compatible avec la différentielle (induite par $\Delta_{H^0(B(\mathcal{N}_X))}$).

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de Tate mixtes

Idée géométrique

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles et construction bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de Tate mixtes

Idée géométrique

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles et construction bar

Cycles et motifs de Tate mixtes

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_X \xrightarrow{r} \mathcal{M}_{geom} \longrightarrow 0$$

Objectifs

- Obtenir une section.
- Décrire la coaction $d_{\mathcal{M}_X} : \mathcal{M}_{geom} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \wedge \mathcal{M}_{geom}$, c'est à dire le coproduit motivique de Goncharov.
- Obtenir des cycles algébriques correspondant aux MZV.

Idee : construction inductive du 1-modèle minimal

- Base du $H^1(\mathcal{N}_X) : L_{[0]} = [t; t], \quad L_{[1]} = [t, 1-t] \subset X \times \square^1$.
- $\ker(H^2(M_i) \xrightarrow{\varphi_i} H^2(A))$: on utilise le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \in M_i^2 & & \in \mathcal{N}_X^2 \\
 b = \sum \alpha_{k,l} c_k \wedge c_l \xrightarrow{\varphi_i} \sum \alpha_{k,l} \varphi_i(c_k) \cdot \varphi_i(c_l) \xrightarrow{d} 0 & & \\
 & & \begin{array}{c} \uparrow d \\ \exists c \in \mathcal{N}_X^1 \end{array}
 \end{array}$$

Difficultés

- Combinatoires : quelles combinaisons linéaires $\sum \alpha_{k,l} c_k \wedge c_l$ conviennent ?
- Géométriques : comment décrire $c \subset X \times \square^{2p-1}$ explicitement ?

Idee géométrique

Supposons que l'on ait :

- Les cycles désirés jusqu'en poids $\leq p : c_1, \dots, c_N$
- et $b = \sum \alpha_{i_k, i_l} c_{i_k} \wedge c_{i_l} \subset X \times \square^{2(p+1)-2}$ tel que $b \xrightarrow{d} 0$.

Question :

À quelles conditions a-t-on $c \in \mathcal{N}_X$ tel que $d(c) = b$?

Approche : $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{A}^1$

On considère $(\mathcal{N}_{\mathbb{A}^1}, d_{\mathbb{A}^1})$. Soit \bar{b} la clôture de b dans $\mathbb{A}^1 \times \square^{2(p+1)-2}$.

- Si $d_{\mathbb{A}^1}(\bar{b}) = 0$ alors il existe $\bar{c} \in \mathcal{N}_{\mathbb{A}^1}^1$ et $c \subset X \times \square^{2(p+1)-1}$.
- Dans ce cas $c = \mu^*(b)$ où μ est induit par la multiplication $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$:

$$X \times \square^1 \times \square^{2(p+1)-2} \xrightarrow{\mu} X \times \square^{2(p+1)-2}$$

$$[t; u_1, u_2, \dots, u_{2(p+1)-1}] \longmapsto \left[\frac{t}{1-u_1}; u_2, \dots, u_{2(p+1)-1} \right].$$

- Pour avoir $d_{\mathbb{A}^1}(\bar{b}) = 0$, on veut imposer $\bar{b}|_0 = \emptyset$ et $\bar{c}_{i_k}|_1 = 0$ dès que $c_{i_l} = L_1$.
- Par construction on a $\bar{c}|_0 = \emptyset$.

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de Tate mixtes

Idee géométrique

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Définitions

Complexe de cycles

Cycles et motifs de Tate mixtes

Idee géométrique

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

- 1 Introduction
 - Définitions : DGA, onstruction bar et modèle 1-minimal
 - Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz
 - Cycles et motifs de Tate mixtes
 - Idée géométrique
- 2 Premiers exemples
 - Cycles et polylogarithmes
 - Poids 3 : première correction pour $t = 1$
 - Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis
- 3 Combinatoire : crochets de Lyndon, arbres et différentielle
 - Arbres et algèbre de Lie
 - Arbres duaux des crochets de Lyndon
 - Une autre différentielle sur les arbres
- 4 Des arbres aux cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$
 - Des arbres aux cycles : une première approche
 - Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$
 - Cycles admissibles pour " $t = 1$ "
- 5 Cycles et construction bar
 - Cycles et constrcution bar

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Cycles et
polylogarithmes
Poids 3 : première
correction pour
 $t = 1$
Exemples
combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Cycles et polylogarithmes

Par la suite $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. On pose :

$$L_{[0]} = [t; t] \quad \text{et} \quad L_{[1]} = [t; 1 - t] \quad \subset X \times \square^1.$$

Poids 2 : $L_{[01]} \simeq \text{Li}_1(t)$

On considère la combinaison

$$b = L_{[0]} \cdot L_{[1]} = [t; t, 1 - t] \subset X \times \square^2.$$

On a $\bar{b}|_0 = \bar{b}|_1 = \emptyset$. Le pull-back par

$$X \times \square^1 \times \square^2 \xrightarrow{\mu} X \times \square^2$$

$$[t; u_1, u_2, u_3] \longmapsto \left[\frac{t}{1-u_1}; u_2, \dots, u_3 \right]$$

donne le cycle de Totaro déjà présent dans [BK94]

$$L_{[01]} = \mu^*(b) = \left[t; 1 - \frac{t}{x_1}, x_1, 1 - x_1 \right] \in \mathcal{N}_X^1(2).$$

Remarque

- $L_{[01]}$ s'étend sur \mathbb{A}^1 .
- $L_{[01]}|_{t=0} = \emptyset$ et $L_{[01]}|_{t=1}$ est bien défini.
- $L_{[01]}$ correspond à la fonction $\text{Li}_2(t)$.

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Cycles et
polylogarithmes
Poids 3 : première
correction pour
 $t = 1$
Exemples
combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Cycles et polylogarithmes

Polylogarithmes : $L_{[0\dots 01]} \rightsquigarrow \text{Li}_n(t)$

Par récurrence, on construit les cycles $L_n = L_{[0\dots 01]}$. On considère :

$$b = L_{[0]} \cdot L_{n-1}.$$

On a alors $d(b) = L_{[0]} \cdot L_{[0]} \cdot L_{n-2} = 0$ et

$$b|_{t=0,1}(L_{[0]} \cdot L_{n-1})|_{0,1} = \emptyset.$$

On en déduit qu'il existe

$$L_n \subset X \times \square^{2n-1} \quad \text{tel que} \quad d(L_n) = L_{[0]} \cdot L_{n-1} \subset X \times \square^{2n-2}.$$

Le calcul de $\mu^*(b)$ donne en particulier

$$L_n = [t; 1 - \frac{t}{x_{n-1}}, x_{n-1}, 1 - \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, x_{n-2}, \dots, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1] \in \mathcal{N}_X^1(p).$$

Remarque

- L_n s'étend sur \mathbb{A}^1 et $L_n|_{t=0} = \emptyset$.
- On retrouve en particulier l'expression donnée dans [BK94].
- $L_n = L_{[0\dots 01]}$ correspond à $\text{Li}_n(t)$ ([BK94]).

Poids 3 : première correction pour $t = 1$

On a vu $L_{[001]}$ tel que $d(L_{[001]}) = L_{[0]} \cdot L_{[01]}$.

Le cas de $L_{[011]}$

On peut aussi considérer le produit

$$b = L_{[01]} \cdot L_{[1]} = [t; 1 - \frac{t}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - t].$$

Mais alors

$$d_{\mathbb{A}^1}(\bar{b}) = L_{[01]}|_{t=1} \cdot [1; 0] \neq 0.$$

On introduit le cycle constant $L_{[01]}(1)$ tel que

$$\forall a \in X \quad L_{[01]}|_{t=a} = L_{[01]}|_{t=1}.$$

Concrètement : $L_{[01]}(1) = [t; 1 - \frac{1}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - t] \subset X \times \square^3$.

On considère la combinaison linéaire

$$b = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}.$$

On a bien :

$$d(b) = 0, \quad d_{\mathbb{A}^1}(b) = 0, \quad b|_{t=0} = \emptyset.$$

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Cycles et
polylogarithmes

Poids 3 : première
correction pour
 $t = 1$

Exemples
combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Cycles et
polylogarithmes

Poids 3 : première
correction pour
 $t = 1$

Exemples
combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Poids 3 : première correction pour $t = 1$

Le cas de $L_{[011]}$

Le pull-back par la multiplication de

$$b = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$$

donne alors :

$$L_{[011]} = \mu^*(b) = [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2] \\ + [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - x_2, 1 - \frac{1}{x_1}, x_1, 1 - x_1]$$

- Le cycle $L_{[011]}$ est bien défini sur $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- On a $d(L_{[011]}) = b = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$.

Remarque

- $L_{[011]}$ n'est pas admissible au point $t = 1$.
- Ce problème est similaire à celui rencontré dans [GGL09].

Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

Supposons pour l'instant que

- $L_{[011]}$ est bien défini pour $t = 1$.
- Ceci pour nous concentrer sur la combinatoire.

Question combinatoire

Quelles sont les combinaisons linéaires $b = \sum \alpha_{i_k, i_l} c_{i_k} \wedge c_{i_l}$ possibles ?

- On suppose à chaque fois pouvoir construire le c tel que $d(c) = b$.

Poids 4

- Un exemple similaire à $L_{[011]}$:

$$d(L_{[0111]}) = (L_{[011]} - L_{[011]}(1)) \cdot L_{[1]}.$$

La multiplication par $L_{[1]}$ induit une correction par $-L_{[1W]}(1)$.

- La correction en $-L_{[01]}(1)$ de $L_{[011]}$ "se propage" :

$$d(L_{[0011]}) = L_{[0]} \cdot L_{[011]} + (L_{[001]} - L_{[001]}(1)) \cdot L_{[1]} + L_{[01]} \cdot L_{[01]}(1)$$

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Cycles et
polylogarithmes

Poids 3 : première
correction pour
 $t = 1$

Exemples
combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Cycles et
polylogarithmes

Poids 3 : première
correction pour
 $t = 1$

Exemples
combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

Poids 5

En poids 5 apparaissent les premiers exemples tels que $d(L_{[-]})|_{t=1} \neq 0$:

$$d(L_{[01011]}) = L_{[01]} \cdot L_{[011]} + (L_{[0011]} - L_{[0011]}(1)) \cdot L_{[1]} + 2L_{[011]} \cdot L_{[01]}(1)$$

- Jusqu'à présent $d(L_{[-]}(1)) = 0$.
- Ces termes n'interviennent pas dans le calcul de $d(b) = 0$.
- Ce n'est plus le cas en poids 6.

Poids 6

On a par exemple :

$$d(L_{[010111]}) = L_{[01]} \cdot L_{[0111]} + (L_{[00111]} - L_{[00111]}(1)) \cdot L_{[1]} + (L_{[01011]} - L_{[01011]}(1)) \cdot L_{[1]} + 3L_{[0111]} \cdot L_{[01]}(1) + 2L_{[011]} \cdot L_{[011]}(1).$$

Le terme en $d(-L_{[01011]}(1) \cdot L_{[1]}) = L_{[01]}(1) \cdot L_{[011]}(1) \cdot L_{[1]}$ vient compenser les termes similaires provenant de

$$d(L_{[0111]} \cdot L_{[01]}(1)) \quad \text{et} \quad d(L_{[011]} \cdot L_{[011]}(1)).$$

Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

Observations : les combinaisons linéaires b se composent :

- d'une "partie principale" en noir ;
- d'une correction "géométrique et combinatoire" en rouge lors de la multiplication par $L_{[1]}$;
- d'un "terme correctif" en bleu correspondant à "une propagation".

cadre combinatoire

- La partie principale est :
 - duale aux crochets de Lyndon dans $\text{Lie}(X_0, X_1)$, l'algèbre de Lie libre ;
 - codée par des arbres trivalent avec d_{Lie} dual au crochet de Lie.
- Les termes correctifs sont liés à une autre différentielle d_{cy} sur les mêmes arbres.

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Cycles et polylogarithmes
Poids 3 : première correction pour $t = 1$

Exemples combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Cycles et polylogarithmes
Poids 3 : première correction pour $t = 1$

Exemples combinatoires

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

- 1 Introduction
 - Définitions : DGA, onstruction bar et modèle 1-minimal
 - Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz
 - Cycles et motifs de Tate mixtes
 - Idée géométrique
- 2 Premiers exemples
 - Cycles et polylogarithmes
 - Poids 3 : première correction pour $t = 1$
 - Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis
- 3 Combinatoire : crochets de Lyndon, arbres et différentielle
 - Arbres et algèbre de Lie
 - Arbres duaux des crochets de Lyndon
 - Une autre différentielle sur les arbres
- 4 Des arbres aux cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$
 - Des arbres aux cycles : une première approche
 - Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$
 - Cycles admissibles pour " $t = 1$ "
- 5 Cycles et construction bar
 - Cycles et constrcution bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Arbres et algèbre de Lie

Définition

On note \mathcal{T}^t le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par :

- les arbres trivalents enracinés
- aux feuilles décorées par 0 et 1.

On pose

$$\mathcal{T}^{t,r} = \mathcal{T} / \left(\begin{array}{c} T_1 \\ | \\ T_2 \quad T_3 \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} T_1 \\ | \\ T_3 \quad T_2 \end{array} \right).$$

On munit $\mathcal{T}^{t,r}$ de la loi interne \wedge définie par

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \wedge \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ T_3 \quad T_4 \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \end{array}.$$

Remarque

La relation \wedge correspond au crochet de Lie :

$$\mathcal{T}^{t,r} \otimes \mathcal{T}^{t,r} \longrightarrow \mathcal{T}^{t,r} \quad T_1 \otimes T_2 \longmapsto [T_1; T_2].$$

- \wedge est antisymétrique
- mais **ne vérifie pas** Jacobi.

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Arbres et algèbre de Lie

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Lemme

On a : $\mathcal{T}^{t,r}$ / identité de Jacobi \simeq Lie(X_0, X_1).

Définition

- Un mot de Lyndon en X_0 et X_1 est tel que

$$W = U \cdot V \quad U, V \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad W <_{lexi.} V.$$

- Soit W un mot de Lyndon. On définit par récurrence

$$[W] = [[W_1], [W_2]] \in \text{Lie}(X_0, X_1) \quad \text{avec} \begin{cases} W = W_1 \cdot W_2 \\ W_2 \text{ minimal.} \end{cases}$$

Propriété des crochets de Lyndon

- L'écriture $[W] = [[W_1], [W_2]]$ avec $W_1 < W_2$ est unique.
- Les crochets de Lyndon $[W]$ forment une base de Lie(X_0, X_1).
- Les $([W_1] \wedge [W_2])_{W_1 < W_2}$ forment une base de Lie(X_0, X_1)².
- Le crochet de Lie $[\ ; \]$ s'écrit dans ces bases :

$$[[W_1], [W_2]] = \sum_W \alpha_{W_1, W_2, W} [W].$$

Arbres duaux des crochets de Lyndon

On a alors un ordre total $<$ sur \mathcal{T} et une base \mathfrak{T} de $\mathcal{T}^{t,r}$:

$$\mathfrak{T} = \left\{ T \text{ tel que } \begin{array}{c} | \\ \wedge \\ T_1 \ T_2 \end{array} \text{ sous arbre de } T \Rightarrow T_1 < T_2 \right\}$$

Dualité

- On identifie $\mathcal{T}^{t,r}$ à son dual via la base \mathfrak{T} .
- On obtient $\text{coLie}(X_0, X_1)$ comme sous espace de $\mathcal{T}^{t,r}$.
- On a $(T_{[W]})_W$ la base duale des crochets de Lyndon $([W])_W$.
- On a une différentielle duale du crochet :

$$d_{Lie} : \text{coLie}(X_0, X_1) \longrightarrow \text{coLie}(X_0, X_1)^{\wedge 2}, \quad d_{Lie} \left(\begin{array}{c} \odot \\ | \\ \wedge \\ T_1 \ T_2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \odot \\ | \\ T_1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} \odot \\ | \\ T_2 \end{array}.$$

Proposition

On a par dualité : $d_{Lie}(T_{[W]}) = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \wedge T_{[W_2]}$.

On peut de plus construire les T_W par récurrence :

$$T_{[W]} = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \wedge T_{[W_2]}.$$

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

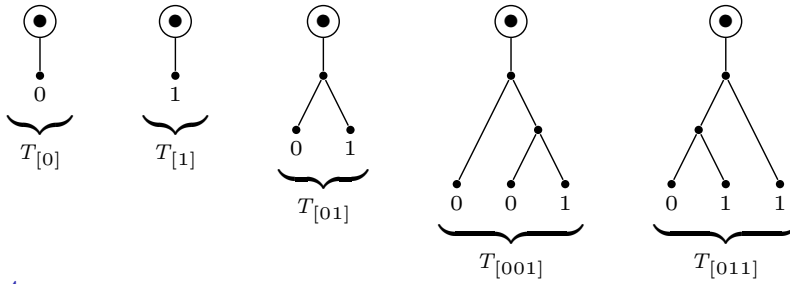
Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

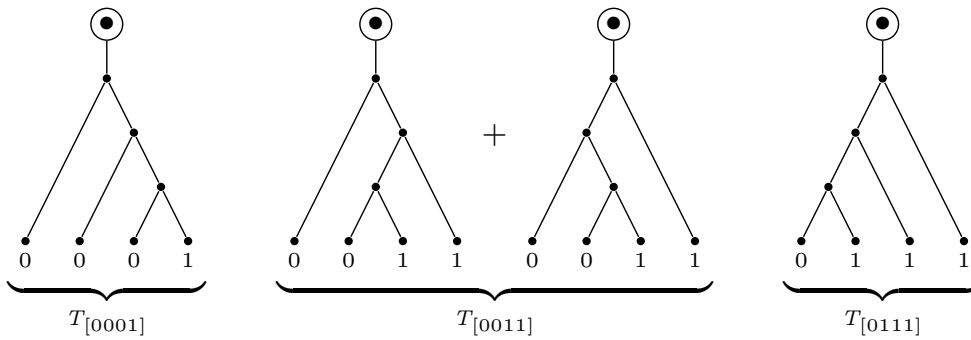
Arbres duaux des crochets de Lyndon

Exemples

Poids 1, 2 et 3



Poids 4



Une autre différentielle sur les arbres

Arbres et cycles

- Dans [GGL09], Gangl, Goncharov et Levin introduisent une différentielle d_{cy} sur des arbres.
- La différentielle d_{cy} reflète la différentielle dans $\mathcal{N}_{\text{Spec}(\mathbb{Q})}$.

Définition

Une *orientation* ω d'un arbre T est une numérotation des arrêtes.

Les arbres orientés de [GGL09]

- On pose V^t le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les forêts d'arbres T
 - orientés,
 - à la racine décorée : t , 0 ou 1
 - aux feuilles décorées par 0 ou 1
- L'union disjointe induit un produit noté \cdot .

L'algèbre $\mathcal{T}^{dec,or}$

On note $\mathcal{T}^{dec,or}$ l'algèbre quotient de V^t par les relations :

$$(T, \sigma(\omega)) = \varepsilon(\sigma)(T, \omega), \quad \begin{matrix} 0 \\ \circ \\ \wedge \\ T_1 T_2 \end{matrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{matrix} 1 \\ \circ \\ | \\ 0 \end{matrix} = 0.$$

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

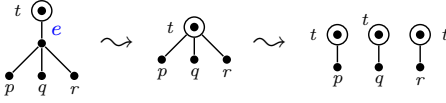
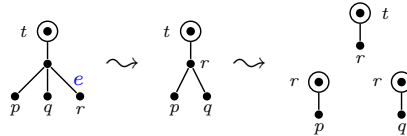
Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Une autre différentielle sur les arbres

d_{cy} : Contraction d'arêtes

Soit e une arête d'un arbre T . La contraction T/e de T à e est :

- Si e contient la racine
 
- Si e contient une feuille :
 
- Si e est interne : on contracte simplement.
- On a une orientation induite sur T/e .

Définition

La différentielle d_{cy} est définie par :

$$d_{cy}(T, \omega) = \sum_{e \in T} (T/e, i_e(\omega)) \quad \text{et la règle de Leibniz.}$$

Proposition

$\mathcal{T}^{dec,or}$ muni de d_{cy} est une DGA.

Une autre différentielle sur les arbres

Proposition (Soud.)

Soit W un mot de Lyndon. On note encore $T_{[W]}$ son image dans $\mathcal{T}^{dec,or}$ (t décore la racine). On a

$$d_{cy}(T_{[W]}) = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \cdot T_{[W_2]} + \sum_{W_1 \leq W_2} \beta_{W_1, W_2, W} T_{[W_1]} \cdot T_{[W_2]}(1) + \sum_{W_1 < W_2} \beta_{W_2, W_1, W} T_{[W_2]} \cdot T_{[W_1]}(1) \quad \text{(ED-T)}$$

où $T_{[W_2]}(1)$ désigne l'arbre $T_{[W_2]}$ avec la racine décorée par 1.

Idée de la preuve (par récurrence).

- Comme $d_{Lie}^2 = 0$, les arêtes internes ne contribuent pas.
- Les termes en $T_{[W_2]}(1)$ viennent des feuilles décorées par 1.
- La décomposition de crochets dans la base de Lyndon montrent que l'on a exactement des termes en $T_{[W_1]} \cdot T_{[W_2]}(1)$.

□

Une autre différentielle sur les arbres

Exemples

- $T_{[011]}$:

$$d_{cy} \left(\begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

- $T_{[0011]}$:

$$d_{cy} \left(\begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} t \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

Une autre différentielle sur les arbres

Un exemple en poids 5 : $T_{[01011]}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \xrightarrow{d_{cy}} \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\ + \left(\begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right) \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} t \odot \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 1 \end{array} \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right) \\ + 2 \cdot \begin{array}{c} t \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \odot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array} \end{array}$$

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

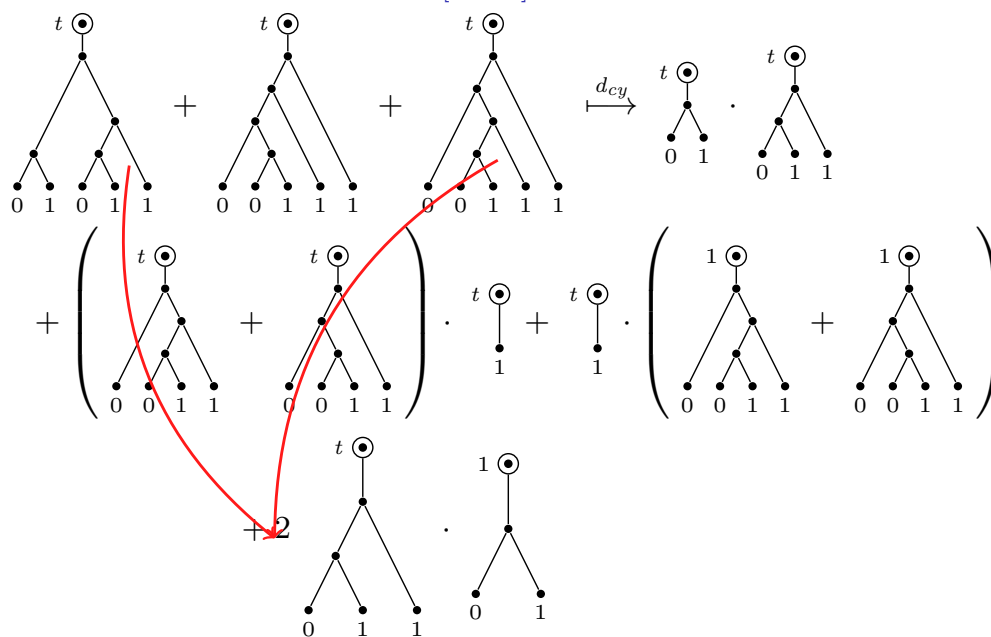
Une autre différentielle sur les arbres

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Une autre différentielle sur les arbres

Un exemple en poids 5 : $T_{[01011]}$



Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Arbres et algèbre de Lie

Arbres duaux des crochets de Lyndon

Une autre différentielle sur les arbres

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

1 Introduction

- Définitions : DGA, onstruction bar et modèle 1-minimal
- Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz
- Cycles et motifs de Tate mixtes
- Idée géométrique

2 Premiers exemples

- Cycles et polylogarithmes
- Poids 3 : première correction pour $t = 1$
- Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

3 Combinatoire : crochets de Lyndon, arbres et différentielle

- Arbres et algèbre de Lie
- Arbres duaux des crochets de Lyndon
- Une autre différentielle sur les arbres

4 Des arbres aux cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

- Des arbres aux cycles : une première approche
- Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$
- Cycles admissibles pour " $t = 1$ "

5 Cycles et construction bar

- Cycles et construction bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Une première approche

Cas de $L_{[011]}$

Cycles admissibles pour " $t = 1$ "

Cycles et construction bar

Des arbres aux cycles : une première approche

Observation

- Le système (ED-T) redonne les exemples formels précédents ($T_{[W]} \rightsquigarrow L_{[W]}$).
- On a donc trouvé un cadre combinatoire.

Passer des arbres aux cycles

Dans [GGL09], Gangl, Goncharov et Levin associent un cycle à un arbre de la façon suivante :

- À chaque arête correspond un facteur \square^1 de \square^n .
- Les sommets internes sont décorés par des paramètres x_i .

$$\bullet \begin{array}{c} x_i \\ \vdots \\ x_{i+1} \end{array} \mapsto 1 - \frac{x_i}{x_{i+1}}, \quad \begin{array}{c} x_i \\ \vdots \\ 0 \end{array} \mapsto x_i, \quad \begin{array}{c} x_i \\ \vdots \\ 1 \end{array} \mapsto 1 - x_i.$$

Problème

Les cycles obtenus **ne sont pas** admissibles.

Cependant :

- Considérer le “système différentiel” correspondant à (ED-T) donne d’autres cycles.
- Au départ notre problème est une construction inductive.

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Une première approche

Cas de $L_{[011]}$

Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”

Cycles et construction bar

Des arbres aux cycles : une première approche

Système “différentiel”

On considère dans \mathcal{N}_X le système “différentiel” suivant :

$$d(L_{[W]}) = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} L_{[W_1]} \cdot L_{[W_2]} + \sum_{W_1 \leq W_2} \beta_{W_1, W_2, W} L_{[W_1]} \cdot L_{[W_2]}(1) + \sum_{W_1 < W_2} \beta_{W_2, W_1, W} L_{[W_2]} \cdot L_{[W_1]}(1) \quad (\text{ED-L})$$

où :

- W, W_1, W_2 sont des mots de Lyndon ;
- $L_{[W_2]}(1)$ désigne le cycle constant égal à $L_{[W_2]}|_{t=1}$;
- $\alpha_{W_1, W_2, W}$ et $\beta_{W_1, W_2, W}$ sont ceux de (ED-T).

Question

Peut-on construire les cycles $L_{[W]}$ satisfaisant (ED-L) ?

Remarque

- Il est essentiel d’avoir des cycles définis sur \mathbb{A}^1 .
- En particulier les cycles doivent être admissibles pour $t = 1$.
- Les cycles restreints à $t = 1$ correspondent aux MZV.

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Une première approche

Cas de $L_{[011]}$

Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”

Cycles et construction bar

Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$

Le système (ED-L) : $d(L_{[011]}) = (L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$

Le pull-back par la multiplication de $(L_{[01]} - L_{[01]}(1)) \cdot L_{[1]}$ donne

$$L_{[011]} = [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2] \\ + [t; 1 - \frac{t}{x_2}, 1 - x_2, 1 - \frac{1}{x_1}, x_1, 1 - x_1].$$

Remarque

- Le cycle $L_{[011]}$ est bien admissible sur $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- Le second terme de la somme n'apparaît pas en ne considérant que l'arbre.

Problème

- Il ne s'étend pas sur \mathbb{A}^1 . Il n'est pas admissible en $t = 1$.
- On ne peut donc pas par la suite définir $L_{[011]}(1)$.
- Exemple :

$$d(L_{[00111]}) = L_{[0]} \cdot L_{[0111]} + (L_{[0011]} - L_{[0011]}(1)) \cdot L_{[1]} \\ + L_{[01]} \cdot L_{[011]}(1) + L_{[011]} \wedge L_{[01]}(1).$$

Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$

Stratégie : modifier "l'équation différentielle"

- Il faut que le facteur devant $L_{[1]}$ soit vide à $t = 1$.
- On remplace $L_{[01]} - L_{[01]}(1)$ par

$$\mathcal{L}_{[01]}^1 \quad \text{tel que} \quad \mathcal{L}_{[01]}^1|_{t=1} = \emptyset.$$

- On calcule le pull-back de $\mathcal{L}_{[01]}^1 \cdot L_{[1]}$ pour obtenir $\mathcal{L}_{[011]}$.

Concrètement

Comme $\frac{x-t}{x-1} = (1 - \frac{t}{x})(1 - \frac{1}{x})^{-1}$, on utilise une formule de multiplication pour obtenir

$$\mathcal{L}_{[01]}^1 = [t; \frac{x_1 - t}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1].$$

On a ainsi

$$\mathcal{L}_{[011]} = [t; 1 - \frac{t}{x_2}, \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2]$$

Remarque

- Il faut modifier le système (ED-L).
- Les deux cycles $L_{[011]}$ et $\mathcal{L}_{[011]}$ donnent le même élément dans $H^0(B(\mathcal{N}_X))$

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Une première
approche

Cas de $L_{[011]}$

Cycles admissibles
pour " $t = 1$ "

Cycles et
construction bar

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Une première
approche

Cas de $L_{[011]}$

Cycles admissibles
pour " $t = 1$ "

Cycles et
construction bar

Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”

Idée

On remplace le système d'équation (ED-L) par deux systèmes d'équations (ED- \mathcal{L}) et (ED- \mathcal{L}^1) donnant respectivement des cycles vides en $t = 0$ et en $t = 1$.

Définition

À partir des coefficients de (ED-L) α_{W_1, W_2} , β_{W_1, W_2} et β_{W_2, W_1} on pose pour $W_1 \leq W_2$:

$$\begin{cases} a_{W_1, W_2, W} = \alpha_{W_1, W_2, W} + \beta_{W_1, W_2, W} - \beta_{W_2, W_1, W} \\ b_{W_1, W_2, W} = -\beta_{W_1, W_2, W} \\ b_{W_2, W_1, W} = -\beta_{W_2, W_1, W}. \end{cases}$$

et pour $0 < W_1 < W_2$

$$\begin{cases} a'_{W_1, W_2, W} = -a_{W_1, W_2, W} \\ b'_{W_1, W_2, W} = a_{W_1, W_2, W} + b_{W_1, W_2, W} \\ b'_{W_2, W_1, W} = -a_{W_1, W_2, W} + b_{W_2, W_1, W} \\ a'_{0, W_2} = a_{0, W_2} \text{ et } b'_{W_1, W_1, W} = b_{W_1, W_1, W} \end{cases}$$

Remarque

Pour obtenir les $a_{W_1, W_2, W}$, $b_{W_1, W_2, W}$ et $b_{W_2, W_1, W}$:

- partir de (ED-L)
- remplacer les $L_{[W_2]}(1)$ par $-(L_{[W_2]} - L_{[W_2]}(1)) + L_{[W_2]}$.

Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”

Systèmes d'équations (ED- \mathcal{L}) et (ED- \mathcal{L}^1)

On considère pour tout mot de Lyndon W de longueur ≥ 2 .

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}_{[W]}) = & \sum_{W_1 < W_2} a_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]} \cdot \mathcal{L}_{[W_2]} \\ & + \sum_{W_1 \leq W_2} b_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]} \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^1 \\ & + \sum_{W_1 < W_2} b_{W_2, W_1, W} \mathcal{L}_{[W_2]} \cdot \mathcal{L}_{[W_1]}^1. \quad (\text{ED-}\mathcal{L}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}_{[W]}^1) = & \sum_{W_1 < W_2} a'_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]}^1 \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^1 \\ & + \sum_{W_1 \leq W_2} b'_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]} \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^1 \\ & + \sum_{W_1 < W_2} b'_{W_2, W_1, W} \mathcal{L}_{[W_2]} \cdot \mathcal{L}_{[W_1]}^1 \quad (\text{ED-}\mathcal{L}^1) \end{aligned}$$

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Une première approche

Cas de $L_{[011]}$

Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”

Cycles et construction bar

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Une première approche

Cas de $L_{[011]}$

Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”

Cycles et construction bar

Cycle admissible pour $t = 1$

On pose $\mathcal{L}_{[0]} = L_{[0]}$ et $\mathcal{L}_{[1]} = L_{[0]}$.

Théorème (Soud.)

Pour chaque mot W de longueur $p \geq 2$ il existe un cycle $\mathcal{L}_{[W]}$ (resp. $\mathcal{L}_{[w]}^1$) dans $\mathcal{N}_X^1(p)$ tel que :

- $\mathcal{L}_{[W]}$ (resp. $\mathcal{L}_{[W]}^1$) s'étend en un cycle dans $\mathcal{N}_{\mathbb{A}^1}^1(p)$.
- $\mathcal{L}_{[W]}|_{t=0} = \emptyset$ (resp. $\mathcal{L}_{[W]}^1|_{t=1} = \emptyset$).
- $\mathcal{L}_{[W]}$ (resp. $\mathcal{L}_{[W]}^1$) satisfait (ED- \mathcal{L}) (resp. (ED- \mathcal{L}^1)).

Idée de la preuve

Par induction. On note A_0 (resp. A, B) le membre de droite de (ED-T) (resp. (ED- \mathcal{L}), (ED- \mathcal{L}^1)).

- Comme $d_{cy}(A_0) = 0$ on montre que $d(A) = d(B) = 0$
- en utilisant que $\mathcal{L}_{[W']}|_{t=0} = \mathcal{L}_{[W']}^1|_{t=1} = \emptyset$, on montre que $d_{\mathbb{A}^1}(A) = d_{\mathbb{A}^1}(B) = 0$ et que $A|_{t=0} = B|_{t=1} = \emptyset$.
- On construit alors $\mathcal{L}_{[W]} = \mu^*(A)$ via le pull-back par la multiplication $\mu : X \times \square^1 \rightarrow X$.
- On construit $\mathcal{L}_{[W]}^1 = \nu^*(B)$ via le pull-back par la multiplication tordue par $t \mapsto 1 - t$, $\nu : X \times \square^1 \rightarrow X$.

Cycles admissibles pour “ $t = 1$ ”

Exemples de cycles paramétrés en poids 4 : première combinaison linéaire

On a

$$d(\mathcal{L}_{[0011]}) = \mathcal{L}_{[0]} \cdot \mathcal{L}_{[011]} + \mathcal{L}_{[001]}^1 \cdot \mathcal{L}_{[1]} - \mathcal{L}_{[01]} \cdot \mathcal{L}_{[01]}^1$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[0011]} = & [t; 1 - \frac{t}{x_3}, x_3, 1 - \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_2] \\ & [t; 1 - \frac{t}{x_3}, \frac{x_3 - x_2}{x_3 - 1}, x_2, 1 - \frac{x_2}{x_1}, x_1, 1 - x_1, 1 - x_3] \\ & - [t; 1 - \frac{t}{x_3}, 1 - \frac{x_3}{x_2}, x_2, 1 - x_2, \frac{x_1 - x_3}{x_1 - 1}, x_1, 1 - x_1] \end{aligned}$$

Différence entre (ED- \mathcal{L}) et (ED- \mathcal{L}^1) en poids 5



$$d(\mathcal{L}_{[00101]}) = \mathcal{L}_{[001]} \cdot \mathcal{L}_{[01]} + \mathcal{L}_{[1]} \mathcal{L}_{[0001]}^1 \quad (\text{ED-}\mathcal{L})$$


et



$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}_{[00101]}^1) = & -\mathcal{L}_{[001]}^1 \cdot \mathcal{L}_{[01]}^1 + \mathcal{L}_{[001]} \cdot \mathcal{L}_{[01]}^1 - \mathcal{L}_{[01]} \cdot \mathcal{L}_{[001]}^1 \\ & + \mathcal{L}_{[1]} \cdot \mathcal{L}_{[0001]}^1 \quad (\text{ED-}\mathcal{L}^1) \end{aligned}$$

La différence entre $d(\mathcal{L}_{[00101]})$ et $d(\mathcal{L}_{[00101]}^1)$ intervient de façon cruciale en poids 6.

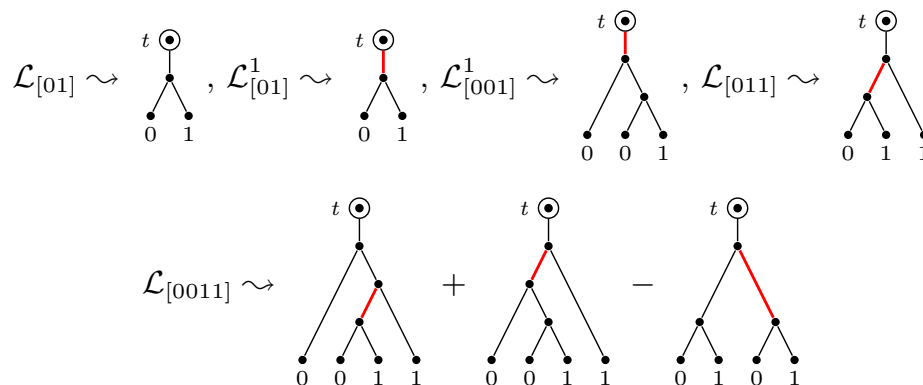
Représentation combinatoire : arbres colorés

- arête colorées  et la relation :  = 0.

- à une arête  correspond $\frac{a - b}{a - 1}$

-  correspond à μ^* et  à ν^*

- Exemples :



1 Introduction

- Définitions : DGA, onstruction bar et modèle 1-minimal
- Construction du complexe de cycles de Bloch-Kriz
- Cycles et motifs de Tate mixtes
- Idée géométrique

2 Premiers exemples

- Cycles et polylogarithmes
- Poids 3 : première correction pour $t = 1$
- Poids 4, 5 et 6 exemples formels choisis

3 Combinatoire : crochets de Lyndon, arbres et différentielle

- Arbres et algèbre de Lie
- Arbres duaux des crochets de Lyndon
- Une autre différentielle sur les arbres

4 Des arbres aux cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

- Des arbres aux cycles : une première approche
- Cas de $L_{[011]}$: problème d'admissibilité en $t = 1$
- Cycles admissibles pour " $t = 1$ "

5 Cycles et construction bar

- Cycles et constrcution bar

Cycles et construction bar

Note : $B(\mathcal{N}_X) \subset \bigoplus_n \mathcal{N}_X^{\otimes n}$ munit de $\cdot, \boxplus, \Delta, D$.

On rappelle que $\mathcal{M}_X \simeq H^0(B(\mathcal{N}_X))^+ / \text{produit } \boxplus$

Objectif initial :

- Décrire le 1-modèle minimal de \mathcal{N}_X .
- C'est à dire : donner une base de \mathcal{M}_X (relativement à $\mathcal{M}_{\text{Spec}(\mathbb{Q})}$).

\leadsto En explicitant la construction inductive du 1-modèle minimal, on a obtenu les cycles $\mathcal{L}_{[W]}$ (et $\mathcal{L}_{[W]}^1$).

\leadsto Construire les éléments correspondants dans $H^0(B(\mathcal{N}_X))$.

Remarque

\mathcal{M}_X est un quotient : modulo $D(B^{-1}(\mathcal{N}_X))$ et modulo produits.

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles et construction bar

Cycles et construction bar

Exemples en poids 2

$$\mathcal{L}_{[01]}^B = [\mathcal{L}_{[01]}] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}] \in \mathcal{N}_X \oplus \mathcal{N}_X^{\otimes 2} \quad \mathcal{L}_{[01]}^{1,B} = [\mathcal{L}_{[01]}^1] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}]$$

On a

$$\mathcal{L}_{[01]}^1 = \mathcal{L}_{[01]} - \mathcal{L}_{[01]}(1) + d(C_{[01]}),$$

avec $C_{[01]} \in \mathcal{N}_X^0$. Comme $[C_{[01]}] \in B^{-1}$, on en déduit que

$$\mathcal{L}_{[01]}^{1,B} = \mathcal{L}_{[01]}^B - \mathcal{L}_{[01]}^B(1) \in \mathcal{M}_X$$

Exemple en poids 4

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[0011]}^B &= [\mathcal{L}_{[0011]}] & \mathcal{N}_X^{\otimes 1} \\ &- [\mathcal{L}_{[001]}^1|\mathcal{L}_{[1]}] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[011]}] + [\mathcal{L}_{[01]}|\mathcal{L}_{[01]}^1] & \mathcal{N}_X^{\otimes 2} \\ &- [\mathcal{L}_{[01]}|\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}] - [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}|\mathcal{L}_{[01]}^1] & \mathcal{N}_X^{\otimes 3} \\ &+ [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}|\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}] + [\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[0]}|\mathcal{L}_{[1]}|\mathcal{L}_{[1]}] & \mathcal{N}_X^{\otimes 4} \end{aligned}$$

Remarques

- modulo $D(B^{-1}) \leadsto$ modulo termes en :
 - $[\dots|d(C)|\dots]$ avec $C \in \mathcal{N}_X^0$
 - certains produits $[\dots|\mathcal{L}_{[W]} \cdot d(C)|\dots]$
- modulo produit $\boxplus \leadsto$ questions d'ordre dans $[a_1|\dots|a_n]$.

Cycles sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers exemples

Combinatoire

Des arbres aux cycles

Cycles et construction bar

Cycles et construction bar

Cycles et construction bar

Proposition

Pour tout mot de Lyndon W de poids ≥ 2 , on a dans \mathcal{M}_X :

$$\mathcal{L}_{[W]}^{1,B} = \mathcal{L}_{[W]}^B - \mathcal{L}_{[W]}^B(1)$$

Le coproduit sur $H^0(B(\mathcal{N}_X))$ induit une différentielle sur \mathcal{M}_X .

Théorème (Soud.)

Dans \mathcal{M}_X , les éléments $\mathcal{L}_{[W]}^B$ satisfont l'équation (ED-T) :

$$d^{\mathcal{M}}(\mathcal{L}_{[W]}^B) = \sum_{W_1 < W_2} \alpha_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]}^B \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^B \\ + \sum_{W_1 < W_2} (\beta_{W_1, W_2, W} \mathcal{L}_{[W_1]}^B \cdot \mathcal{L}_{[W_2]}^B(1) - \beta_{W_2, W_1, W} \mathcal{L}_{[W_2]}^B \cdot \mathcal{L}_{[W_1]}^B(1))$$

Remarques

- $d^{\mathcal{M}}$ correspond au produit motivique de Goncharov (modulo produit).
- De façon équivalente, $d^{\mathcal{M}}$ est dual du crochet de Ihara (ou crochet de Poisson).



Spencer Bloch and Igor Kriz, *Mixed Tate motives*, Anna. of Math. **140** (1994), no. 3, 557–605.



H. Gangl, A. B. Goncharov, and A. Levin, *Multiple polylogarithms, polygons, trees and algebraic cycles*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 547–593.



Marc Levine, *Tate motives and the fundamental group.*, Srinivas, V. (ed.), Cycles, motives and Shimura varieties. Proceedings of the international colloquium, Mumbai, India, January 3–12, 2008. New Delhi : Narosa Publishing House/Published for the Tata Institute of Fundamental Research. 265-392 (2011)., 2011.

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Cycles et
construction bar

Cycles sur
 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

I. Soudères

Introduction

Premiers
exemples

Combinatoire

Des arbres aux
cycles

Cycles et
construction bar

Cycles et
construction bar